文章编号:1674-7070(2013)05-0478-03

关于《关于正规矩阵的一些奇异值不等式》的注记

冯秀红[1]

摘要

在半正定矩阵特征值的控制不等式基础上,利用奇异值和特征值之间的关系以及正规矩阵的特点,推导出正规矩阵奇异值的控制不等式,推广了有关文献的相关结论.

关键词

奇异值;特征值;正规矩阵;控制不等式

中图分类号 O151

文献标志码 A

收稿日期 2011-05-31

资助项目 国家自然科学基金(10871138)子项目(20100076);国家自然科学基金(11171246)子项目(2012h169)

作者简介

冯秀红,女,博士,主要从事数学的教学与研究. fengxiuhong@ nuist. edu. cn

1 南京信息工程大学 数学与统计学院,南京,210044

0 引言

矩阵奇异值在数值代数、统计、线性系统、工程以及经济等学科有着重要应用. 本文利用半正定矩阵的特征值不等式推导出正规矩阵乘积的奇异值不等式,推广了文献[1]的相关结论,指出了文献[1]的错误.

本文采用如下记号:给定一个向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,令 $x_{[1]}\geqslant x_{[2]}\geqslant\cdots\geqslant x_{[n]}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 的分量按递减顺序排列,记 $\boldsymbol{x}_{\downarrow}=(x_{[1]},x_{[2]},\cdots x_{[n]})$,令 $x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 的分量按递增顺序排列,记 $\boldsymbol{x}_{\uparrow}=(x_{(1)},x_{(2)},\cdots x_{(n)})$. 令 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$,$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$,则 Handmard 积 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=(x_1y_1,\cdots,x_ny_n)$. 记矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值组成的向量为 $\lambda(\boldsymbol{A})=(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(\boldsymbol{A}))$,其中 $|\lambda_1(\boldsymbol{A})|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n(\boldsymbol{A})|$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值组成的向量为 $\sigma(\boldsymbol{A})=(\sigma_1(\boldsymbol{A}),\cdots,\sigma_n(\boldsymbol{A}))$,其中 $\sigma_1(\boldsymbol{A})\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(\boldsymbol{A})$. $\boldsymbol{A}\geqslant 0$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵.

先介绍本文将要用到的有关概念.

定义 1 令 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$,$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$,若 $\sum_{i=1}^{k}x_{[i]}\leqslant\sum_{i=1}^{k}y_{[i]}$,$k=1,2,\cdots,n$. 称 $\boldsymbol{x}$ 弱受控于 $\boldsymbol{y}$,记 $\boldsymbol{x}\prec_w\boldsymbol{y}$. 若 $\boldsymbol{x}\prec_w\boldsymbol{y}$,且 $\sum_{i=1}^{n}x_{[i]}=\sum_{i=1}^{n}y_{[i]}$,称 $\boldsymbol{x}$ 受控于 $\boldsymbol{y}$,记 $\boldsymbol{x}\prec\boldsymbol{y}$.

定义 2 令 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$,$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}_+^n$,若 $\prod_{i=1}^{k}x_{[i]}\leqslant\prod_{i=1}^{k}y_{[i]}$,$k=1,2,\cdots,n$. 称 $\boldsymbol{x}$ log- 弱受控于 $\boldsymbol{y}$,记 $\log\boldsymbol{x}\prec_w\log\boldsymbol{y}$. 若 $\log\boldsymbol{x}\prec_w\log\boldsymbol{y}$,且 $\prod_{i=1}^{n}x_{[i]}=\prod_{i=1}^{n}y_{[i]}$,称 $\boldsymbol{x}$ log- 受控于 $\boldsymbol{y}$,记 $\log\boldsymbol{x}\prec\log\boldsymbol{y}$.

1 主要内容

引理 1[2] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\geqslant 0$,且 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$,则

$$\prod_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(\boldsymbol{AB})\leqslant\prod_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(\boldsymbol{A})\lambda_t(\boldsymbol{B}).$$

注 1 若令 $i_t=t$,则有 $\prod_{t=1}^{k}\lambda_t(\boldsymbol{AB})\leqslant\prod_{t=1}^{k}\lambda_t(\boldsymbol{A})\lambda_t(\boldsymbol{B})$,即 $\log\lambda(\boldsymbol{AB})\prec\log(\lambda(\boldsymbol{A})\cdot\lambda(\boldsymbol{B}))$.

引理 2[2] 设 $A,B\geqslant 0$,且 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$,则 $\prod_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(\boldsymbol{A})\lambda_{n-i_t+1}(\boldsymbol{B})\leqslant\prod_{t=1}^{k}\lambda_t(\boldsymbol{AB})$.

由引理 2 的结论,有

$$\max_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\prod_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(\boldsymbol{A})\lambda_{n-i_t+1}(\boldsymbol{B})\leqslant\prod_{t=1}^{k}\lambda_t(\boldsymbol{AB}),$$

则隐含控制不等式

$$\log(\lambda(\boldsymbol{A})\cdot\lambda(\boldsymbol{B})_{\uparrow})\prec\log\lambda(\boldsymbol{AB}).$$

引理 3[3-4] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\geqslant 0$,且 $0<s<l$,则

$$\log(\lambda(\boldsymbol{A})\cdot\lambda(\boldsymbol{B})_{\uparrow})\prec\log\lambda^{\frac{1}{s}}(\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{B}^s)\prec\log\lambda^{\frac{1}{l}}(\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{B}^l)\prec\log(\lambda(\boldsymbol{A})\cdot\lambda(\boldsymbol{B})).$$

注 2 由引理 3 的最后一个控制不等式可推出:设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\geqslant 0$,当 $r>0$ 时,由 $\log\lambda^{\frac{1}{r}}(\boldsymbol{A}^r\boldsymbol{B}^r)\prec\log(\lambda(\boldsymbol{A})\cdot\lambda(\boldsymbol{B}))$,可得 $\log\lambda(\boldsymbol{A}^r\boldsymbol{B}^r)\prec\log(\lambda^r(\boldsymbol{A})\cdot\lambda^r(\boldsymbol{B}))$,由 $\log\lambda(\boldsymbol{AB})\prec\log(\lambda(\boldsymbol{A})\cdot\lambda(\boldsymbol{B}))$,可得 $\log\lambda^r(\boldsymbol{AB})\prec\log(\lambda^r(\boldsymbol{A})\cdot\lambda^r(\boldsymbol{B}))$;当 $r<1$ 时,$\log\lambda^{\frac{1}{r}}(\boldsymbol{A}^r\boldsymbol{B}^r)\prec\log\lambda(\boldsymbol{AB})$,由上面 2 个控制不等式联合得到 $\log\lambda(\boldsymbol{A}^r\boldsymbol{B}^r)\prec\log\lambda^r(\boldsymbol{AB})\prec\log(\lambda^r(\boldsymbol{A})\cdot\lambda^r(\boldsymbol{B}))$;当 $r>1$ 时,$\log\lambda(\boldsymbol{AB})\prec\log\lambda^{\frac{1}{r}}(\boldsymbol{A}^r\boldsymbol{B}^r)$,由上面 2 个控制不等式联合得到 $\log\lambda^r(\boldsymbol{AB})\prec\log\lambda(\boldsymbol{A}^r\boldsymbol{B}^r)\prec\log(\lambda^r(\boldsymbol{A})\cdot\lambda^r(\boldsymbol{B}))$.

引理 4[3-4] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\geqslant 0$,且 $s>0$,则

$$\lambda_1^{-\frac{1}{s}}(\boldsymbol{A}^{-s}\boldsymbol{B}^{-s})=\lambda_n^{\frac{1}{s}}(\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{B}^s),$$
$$\lambda_n(\boldsymbol{A})\lambda_n(\boldsymbol{B})\leqslant\lambda_n(\boldsymbol{AB})\leqslant\lambda_1(\boldsymbol{A})\lambda_n(\boldsymbol{B})\leqslant\lambda_1(\boldsymbol{AB})\leqslant\lambda_1(\boldsymbol{A})\lambda_1(\boldsymbol{B}).$$

由引理 4 及文献[4]中定理 6 的证明很容易得出如下定理:

定理 1 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\geqslant 0$,且 $0<s<l$,则

$$①\begin{cases}\lambda_n(\boldsymbol{A})\lambda_n(\boldsymbol{B})\leqslant\lambda_1^{-\frac{1}{l}}(\boldsymbol{A}^{-l}\boldsymbol{B}^{-l})\leqslant\\ \quad\lambda_1^{-\frac{1}{s}}(\boldsymbol{A}^{-s}\boldsymbol{B}^{-s})\leqslant\lambda_1(\boldsymbol{A})\lambda_n(\boldsymbol{B}),\\ \lambda_1(\boldsymbol{A})\lambda_n(\boldsymbol{B})\leqslant\lambda_1^{\frac{1}{s}}(\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{B}^s)\leqslant\\ \quad\lambda_1^{\frac{1}{l}}(\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{B}^l)\leqslant\lambda_1(\boldsymbol{A})\lambda_1(\boldsymbol{B}).\end{cases}$$

$$②\begin{cases}\lambda_n(\boldsymbol{A})\lambda_n(\boldsymbol{B})\leqslant\lambda_n^{\frac{1}{l}}(\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{B}^l)\leqslant\\ \quad\lambda_n^{\frac{1}{s}}(\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{B}^s)\leqslant\lambda_1(\boldsymbol{A})\lambda_n(\boldsymbol{B}),\\ \lambda_1(\boldsymbol{A})\lambda_n(\boldsymbol{B})\leqslant\lambda_n^{-\frac{1}{s}}(\boldsymbol{A}^{-s}\boldsymbol{B}^{-s})\leqslant\\ \quad\lambda_n^{-\frac{1}{l}}(\boldsymbol{A}^{-l}\boldsymbol{B}^{-l})\leqslant\lambda_1(\boldsymbol{A})\lambda_1(\boldsymbol{B}).\end{cases}$$

由文献[1]定理 2 的证明及引理 4 可以推得.

定理 2 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为正规矩阵,且 $0<s<l$,则

$$③\begin{cases}\sigma_n(\boldsymbol{A})\sigma_n(\boldsymbol{B})\leqslant\sigma_1^{-\frac{1}{l}}(\boldsymbol{A}^{-l}\boldsymbol{B}^{-l})\leqslant\\ \quad\sigma_1^{-\frac{1}{s}}(\boldsymbol{A}^{-s}\boldsymbol{B}^{-s})\leqslant\sigma_1(\boldsymbol{A})\sigma_n(\boldsymbol{B}),\\ \sigma_1(\boldsymbol{A})\sigma_n(\boldsymbol{B})\leqslant\sigma_1^{\frac{1}{s}}(\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{B}^s)\leqslant\\ \quad\sigma_1^{\frac{1}{l}}(\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{B}^l)\leqslant\sigma_1(\boldsymbol{A})\sigma_1(\boldsymbol{B}).\end{cases}$$

$$④\begin{cases}\sigma_n(\boldsymbol{A})\sigma_n(\boldsymbol{B})\leqslant\sigma_n^{\frac{1}{l}}(\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{B}^l)\leqslant\\ \quad\sigma_n^{\frac{1}{s}}(\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{B}^s)\leqslant\sigma_1(\boldsymbol{A})\sigma_n(\boldsymbol{B}),\\ \sigma_1(\boldsymbol{A})\sigma_n(\boldsymbol{B})\leqslant\sigma_n^{-\frac{1}{s}}(\boldsymbol{A}^{-s}\boldsymbol{B}^{-s})\leqslant\\ \quad\sigma_n^{-\frac{1}{l}}(\boldsymbol{A}^{-l}\boldsymbol{B}^{-l})\leqslant\sigma_1(\boldsymbol{A})\sigma_1(\boldsymbol{B}).\end{cases}$$

定理 3 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为正规矩阵,且 $0<s<l$,则

$$\log(\sigma(\boldsymbol{A})\cdot\sigma(\boldsymbol{B})_{\uparrow})\prec\log\sigma^{\frac{1}{s}}(\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{B}^s)\prec\log\sigma^{\frac{1}{l}}(\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{B}^l)\prec\log(\sigma(\boldsymbol{A})\cdot\sigma(\boldsymbol{B})).$$

证法 1 若 $\boldsymbol{A}$ 为正规矩阵,即 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$,则 $(\boldsymbol{AA}^*)^s=\boldsymbol{A}^s(\boldsymbol{A}^*)^s$,由引理 2 得

$$\begin{aligned}\prod_{t=1}^{k}\sigma_t^{\frac{1}{s}}(\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{B}^s)&=\prod_{t=1}^{k}\lambda_t^{\frac{1}{2s}}[(\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{B}^s)(\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{B}^s)^*]=\\ &\left\{\prod_{t=1}^{k}\lambda_t[(\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{B}^s)(\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{B}^s)^*]\right\}^{\frac{1}{2s}}=\\ &\left\{\prod_{t=1}^{k}\lambda_t[(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^s(\boldsymbol{BB}^*)^s]\right\}^{\frac{1}{2s}}\geqslant\\ &\prod_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}^{\frac{1}{2s}}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^s\lambda_{n-i_t+1}^{\frac{1}{2s}}(\boldsymbol{BB}^*)^s=\\ &\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}(\boldsymbol{A})\sigma_{n-i_t+1}(\boldsymbol{B}),\end{aligned}$$

则 $\max\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\prod_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}(\boldsymbol{A})\sigma_{n-i_t+1}(\boldsymbol{B})\leqslant\prod_{t=1}^{k}\sigma_t^{\frac{1}{s}}(\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{B}^s)$,此隐含控制不等式

$$\log(\sigma(\boldsymbol{A})\cdot\sigma(\boldsymbol{B})_{\uparrow})\prec\log\sigma^{\frac{1}{s}}(\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{B}^s).$$

再由引理 3 的第 2 个控制不等式可得

$$\begin{aligned}\prod_{t=1}^{k}\sigma_t^{\frac{1}{s}}(\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{B}^s)&=\prod_{t=1}^{k}\lambda_t^{\frac{1}{2s}}[(\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{B}^s)(\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{B}^s)^*]=\\ &\left\{\prod_{t=1}^{k}\lambda_t[(\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{B}^s)(\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{B}^s)^*]\right\}^{\frac{1}{2s}}=\\ &\left\{\prod_{t=1}^{k}\lambda_t[(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^s(\boldsymbol{BB}^*)^s]\right\}^{\frac{1}{2s}}\leqslant\\ &\left\{\prod_{t=1}^{k}\lambda_t[(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^l(\boldsymbol{BB}^*)^l]\right\}^{\frac{1}{2l}}=\\ &\prod_{t=1}^{k}\sigma_t^{\frac{1}{l}}(\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{B}^l).\end{aligned}$$

所以,$\log\sigma^{\frac{1}{s}}(A^sB^s)\prec\log\sigma^{\frac{1}{l}}(\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{B}^l)$.

由注 1

$$\prod_{t=1}^{k}\sigma_t^{\frac{1}{l}}(\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{B}^l)=\prod_{t=1}^{k}\lambda_t^{\frac{1}{2l}}[(\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{B}^l)(\boldsymbol{A}^l\boldsymbol{B}^l)^*]=$$

$$\left\{\prod_{t=1}^{k}\lambda_t[(A^lB^l)(A^lB^l)^*]\right\}^{\frac{1}{2l}}=$$
$$\left\{\prod_{t=1}^{k}\lambda_t[(A^*A)^l(BB^*)^l]\right\}^{\frac{1}{2l}}\leqslant$$
$$\left\{\prod_{t=1}^{k}\lambda_t^{\frac{1}{2}}(A^*A)\lambda_t^{\frac{1}{2}}(BB^*)\right\}=$$
$$\prod_{t=1}^{k}\sigma_t(A)\sigma_t(B).$$

即: $\log\sigma^{\frac{1}{l}}(A^lB^l)\prec\log(\sigma(A)\cdot\sigma(B))$. 证毕.

其中文献[1]中的定理1为本文的定理3的特殊情形,文献[1]关于定理1的第1个控制不等式的证明是错误的,即由不等式 $\prod_{t=1}^{k}\sigma_t^{m+1}(A^{\frac{1}{m+1}}B^{\frac{1}{m+1}})\geqslant\prod_{t=1}^{k}\sigma_t(A)\sigma_{n-t+1}(B)$ 不能推出控制不等式

$$\log(\sigma(A)\cdot\sigma(B)_{\uparrow})\prec\log\sigma^{m+1}(A^{\frac{1}{m+1}}B^{\frac{1}{m+1}}),$$

但反之很容易推出.

证法2 由文献[2]中可知,设 $A,B\in\mathbf{C}^{n\times n}$,则

$$\log(\sigma(A)\cdot\sigma(B)_{\uparrow})\prec\log\sigma(AB)\prec\log(\sigma(A)\cdot\sigma(B)).$$

当 $s>0$ 时,将 A^s,B^s 代入得

$$\log(\sigma(A^s)\cdot\sigma(B^s)_{\uparrow})\prec\log\sigma(A^sB^s)\prec\log(\sigma(A^s)\cdot\sigma(B^s)),$$

则 $\log\left(\sigma^{\frac{1}{s}}(A^s)\cdot\sigma^{\frac{1}{s}}(B^s)_{\uparrow}\right)\prec\log\sigma^{\frac{1}{s}}(A^sB^s)\prec$

$$\log\left(\sigma^{\frac{1}{s}}(A^s)\cdot\sigma^{\frac{1}{s}}(B^s)\right).$$

当 A 为正规矩阵时,奇异值满足等式

$$\sigma_i(A^s)=\lambda_i^{\frac{1}{2}}(A^s(A^s)^*)=\lambda_i^{\frac{1}{2}}(A^s(A^*)^s)=\lambda_i^{\frac{1}{2}}((AA^*)^s)=\lambda_i^{\frac{s}{2}}(AA^*)=\sigma_i^s(A),$$

所以当 A,B 为正规矩阵时,上式即为 $\log(\sigma(A)\cdot\sigma(B)_{\uparrow})\prec\log\sigma^{\frac{1}{s}}(A^sB^s)\prec\log(\sigma(A)\cdot\sigma(B))$.

当 $0<s<l$ 时,控制不等式 $\log\sigma^{\frac{1}{s}}(A^sB^s)\prec\log\sigma^{\frac{1}{l}}(A^lB^l)$ 可由定理2中③的第2个式子利用 k 级复合矩阵 $A^{(k)},B^{(k)}$ 的性质得到[1],综合起来可得此定理3. 证毕.

注3 定理3的第2,3个控制不等式都可以由定理2中③的式子利用 k 级复合矩阵 $A^{(k)},B^{(k)}$ 的性质得到,但是定理3的第1个控制不等式不能由此得到.

当 s,l 为其他情形时结果参见文献[1].

参考文献
References

[1] 曹月,何淦瞳. 关于正规矩阵的一些奇异值不等式[J]. 贵州大学学报:自然科学版,2007,24(6):565-568
CAO Yue,HE Gantong. On some inequalities about singular values of normal matrix[J]. Journal of Guizhou University:Natural Science Edition,2007,24(6):565-568

[2] 王伯英. 控制不等式基础[M]. 北京:北京师范大学出版社,1990
WANG Boying. Introduction of control inequality[M]. Beijing:Beijing Normal University Publishing Group,1990

[3] 詹兴致. 矩阵论[M]. 北京:高等教育出版社,2008
ZHAN Xingzhi. Matrix theory[M]. Bejing:Higher Education Press,2008

[4] Wang B Y,Gong M P. Some eigenvalue inequalities for positive semidefinite matrix power products[J]. Linear Algebra and Its Applications,1993,184:249-260

A note on paper On Some Inequalities About Singular Values of Normal Matrix

FENG Xiuhong[1]

1 School of Mathematics & Statisticss,Nanjing University of information & Technology,Nanjing 210044

Abstract In this paper,based on some eigenvalue majorization inequalities of semi-definite matrices,we get some singular majorization inequalities of normal matrices by using the characteristics of the normal matrix and the relationship between eigenvalue and singular value. The note extends related results in previous literatures.

Key words singular value;eigenvalue;normal matrix;majorization inequalitiy