文章编号: 1674-7070(2011)04-0371-05

GM(1,1)模型的建模条件

姚天祥[1]　曹杰[1]

摘要

GM(1,1)模型是灰色系统理论的核心预测模型,对GM(1,1)模型的建模条件进行研究是提高模拟精度的基础.采用理论证明和数值算例相结合的方法对GM(1,1)模型的建模条件进行研究,拓展了经典灰色预测模型的级比判定条件.结果表明:当原始序列的累加序列值都相等时,发展系数不存在;提高原始序列光滑度不是提高模拟精度的充分条件.

关键词

灰色系统;GM(1,1)模型;级比;光滑比

中图分类号 N941.5
文献标志码 A

收稿日期 2010-02-22
资助项目 国家自然科学基金(71171116);教育部人文社会科学青年基金(09-YJC630129);江苏省高校哲学社会科学基金(09SJD6300-59);江苏政府留学奖学金(JS-2010-174);南京信息工程大学科研启动基金(SK20100092)

作者简介

姚天祥,男,博士,主要研究方向为灰色系统理论.ytxnj@163.com

1 南京信息工程大学 经济管理学院,南京,210044

0 引言

GM(1,1)模型是灰色预测理论的基本模型,自创立以来得到了广泛应用,通过对灰色预测模型进行拓展,提出了诸多新思路、新模型和新方法,发展了灰色预测理论体系[1-2].发展GM(1,1)模型建模新技术,提高灰色预测精度,其关键在于研究GM(1,1)模型的性质,找出GM(1,1)模型建模的条件[3],因此对于灰色预测建模条件进行研究具有重要意义.邓聚龙[4-5]建立了GM(1,1)模型参数包的求解方法;并对只需要4个数据就能建立GM(1,1)模型进行了理论证明[6].李希灿在文献[7]中的研究表明原始序列乘以常数ρ后,发展系数及误差均不变,但灰色输出b及预测值均扩大ρ倍.肖新平等[8-9]分别讨论了GM(1,N)模型和GM(0,N)模型的数乘变换影响.李炳乾[10]研究了原始序列特征与发展系数的关系,结果表明若原始序列是单调递增序列,则$a<0$;若原始序列为单调递减序列,则$a>0$.邓聚龙[11]还研究了投入系数b的边界区间问题.冯利华[12]得到预测值增大的3个充分条件,即计算零点升高、序列的第2项减少、累加次数增多.刘思峰等[13]研究了发展系数的取值条件,讨论了GM(1,1)模型的适用范围.

以上学者在经典GM(1,1)模型的参数特性、建模条件和适用范围方面的研究取得了较大成就.本文将研究经典GM(1,1)模型发展系数存在的初始条件,对于级比、光滑比建模条件存在的问题进行探讨,拓展经典GM(1,1)模型的级比判定条件.

1 GM(1,1)模型

定义1 设$X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(1),\cdots,x^{(0)}(n)\}$,$X^{(1)}=\{x^{(1)}(1),x^{(1)}(1),\cdots,x^{(1)}(n)\}$,$Z^{(1)}=\{z^{(1)}(1),z^{(1)}(1),\cdots,z^{(1)}(n)\}$,其中$z^{(1)}(k)=0.5(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k-1))$,则称$x^{(1)}(k)+az^{(1)}(k)=b$为GM(1,1)模型的基本形式,$a$为发展系数,$b$为灰色作用量.

GM(1,1)模型的时间响应式为[1]

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{-ak}+\frac{b}{a},k=1,2,\cdots,n.\qquad(1)$$

还原值

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k)=(1-\mathrm{e}^{a})\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{-ak};$$

$$k = 1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

称 $\hat{X}^{(0)} = \{\hat{x}^{(0)}(1),\hat{x}^{(0)}(1),\cdots,\hat{x}^{(0)}(n)\}$ 为 $X^{(0)}$ 的模拟序列,$\hat{x}^{(1)}(k+1)$ 为 $x^{(1)}(k+1)$ 的模拟值.

GM(1,1) 模型的求解公式

$$a = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k)\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) - \sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) z^{(1)}(k)}{\sum_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^2 - \frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)\right)^2}, \tag{3}$$

$$b = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{k=2}^{n} x^{(0)}(k) + a\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)\right]. \tag{4}$$

2 *GM*(1,1) 模型建模条件

引理1 令非负序列 $X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\}$,$X^{(1)} = \{x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n)\}$,其中 $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^{k} x^{(0)}(i)$,$k = 1,2,\cdots,n$. 令 $Z^{(1)} = \{z^{(1)}(1),z^{(1)}(2),\cdots,z^{(1)}(n)\}$,$z^{(1)}(k) = 0.5(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1))$. 若 $x^{(0)}(k) = 0$,$k = 2,3,\cdots,n$ 不成立,则 $z^{(1)}(k) = z^{(1)}(k+1)$,$k = 2,3,\cdots,n-1$ 不成立.

证明 引理 1 成立的条件是其逆否命题成立,即"若 $z^{(1)}(k) = z^{(1)}(k+1)$,$k = 2,3,\cdots,n-1$ 成立,则 $x^{(0)}(k) = 0$,$k = 2,3,\cdots,n$."

若 $z^{(1)}(k)$,$k = 2,3,\cdots,n$ 同时相等,即 $z^{(1)}(k) = z^{(1)}(k+1)$. $k = 2,3,\cdots,n-1$.

由 $z^{(1)}(k) = 0.5(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1))$,$k = 2,3,\cdots,n$ 得

$$0.5(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)) = 0.5(x^{(1)}(k+1) + x^{(1)}(k)), \tag{5}$$

$$x^{(1)}(k-1) = x^{(1)}(k+1), k = 2,3,\cdots,n. \tag{6}$$

由 $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^{k} x^{(0)}(i)$,$k = 1,2,\cdots,n$,得

$$\sum_{i=1}^{k-1} x^{(0)}(i) = \sum_{i=1}^{k+1} x^{(0)}(i). \tag{7}$$

由 $\sum_{i=1}^{k+1} x^{(0)}(i) = \sum_{i=1}^{k-1} x^{(0)}(i) + x^{(0)}(k) + x^{(0)}(k+1)$,得

$$\sum_{i=1}^{k-1} x^{(0)}(i) = \sum_{i=1}^{k-1} x^{(0)}(i) + x^{(0)}(k) + x^{(0)}(k+1). \tag{8}$$

即 $x^{(0)}(k) + x^{(0)}(k+1) = 0$,由于 $x^{(0)}(k)$ 非负,则

$$x^{(0)}(k) = 0, k = 2,3,\cdots,n. \tag{9}$$

若 $X^{(0)} \neq \{\lambda,0,0,\cdots,0\}$,则 $z^{(1)}(k)$,$k = 2,3,\cdots,n$ 不同时相等.

定理1 令 $X^{(0)}$,$X^{(1)}$,$Z^{(1)}$ 定义如引理 1 所述,$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & -z^{(1)}(3) & \cdots & -z^{(1)}(n) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$. 若 $x^{(0)}(k) = 0$,$k = 2,3,\cdots,n$ 不成立,则 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 可逆.

证明 只需要证明 $|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}| \neq 0$.

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & -z^{(1)}(3) & \cdots & -z^{(1)}(n) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & -z^{(1)}(3) & \cdots & -z^{(1)}(n) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} =$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^2 & -\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) \\ -\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k) & n-1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

则

$$|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}| = (n-1)\sum_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^2 - \left(\sum_{k=2}^{n} z^{(1)}(k)\right)^2. \tag{11}$$

令 $\eta_k = z^{(1)}(k)$,则

$$|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}| = (n-1)\sum_{k=2}^{n}\eta_k^2 - \left(\sum_{k=2}^{n}\eta_k\right)^2. \tag{12}$$

用数学归纳法证明. 因为建立 GM 模型需要至少 4 个数据,当 $n = 4$ 时,

$$(\eta_2 - \eta_3)^2 + (\eta_2 - \eta_4)^2 + (\eta_3 - \eta_4)^2 \geqslant 0. \tag{13}$$

若 $x^{(0)}(k) = 0$,$k = 2,3,\cdots,n$ 不成立,由引理 1,$\eta_k(k=2,3,4)$ 不同时相等,则

$$(\eta_2 - \eta_3)^2 + (\eta_2 - \eta_4)^2 + (\eta_3 - \eta_4)^2 > 0, \tag{14}$$

$$2(\eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2) > 2\eta_2\eta_3 + 2\eta_2\eta_4 + 2\eta_3\eta_4, \tag{15}$$

$$3(\eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2) > (\eta_2 + \eta_3 + \eta_4)^2. \tag{16}$$

即当 $n = 4$ 时,$(n-1)\sum_{k=2}^{n}\eta_k^2 > \left(\sum_{k=2}^{n}\eta_k\right)^2$ 成立.

假定当 $n = i$ 时,$(i-1)\sum_{k=2}^{i}\eta_k^2 > \left(\sum_{k=2}^{i}\eta_k\right)^2$ 成立,则当 $n = i+1$ 时,由于 $x^{(0)}(k) = 0$,$k = 2,3,\cdots,n$ 不成立,由引理 1,$\eta_k(k = 2,3,\cdots,i+1)$ 不同时相等,结论成立. 则

$$\sum_{k=2}^{i}(\eta_{i+1} - \eta_k)^2 > 0, \tag{17}$$

$$(\eta_{i+1} - \eta_2)^2 + (\eta_{i+1} - \eta_3)^2 + (\eta_{i+1} - \eta_4)^2 + \cdots + (\eta_{i+1} - \eta_i)^2 > 0, \tag{18}$$

$$\sum_{k=2}^{i}\eta_k^2 + (i-1)\eta_{i+1}^2 - 2\eta_{i+1}\sum_{k=2}^{i}\eta_k > 0, \tag{19}$$

$$\sum_{k=2}^{i}\eta_k^2 + (i-1)\eta_{i+1}^2 > 2\eta_{i+1}\sum_{k=2}^{i}\eta_k, \tag{20}$$

$$\sum_{k=2}^{i}\eta_k^2 + i\eta_{i+1}^2 > 2\eta_{i+1}\sum_{k=2}^{i}\eta_k + \eta_{i+1}^2. \tag{21}$$

由 $(i-1)\sum_{k=2}^{i}\eta_k^2 > \left(\sum_{k=2}^{i}\eta_k\right)^2$,则

$$(i-1)\sum_{k=2}^{i}\eta_k^2+\sum_{k=2}^{i}\eta_k^2+i\eta_{i+1}^2 > \left(\sum_{k=2}^{i}\eta_k\right)^2+2\eta_{i+1}\sum_{k=2}^{i}\eta_k+\eta_{i+1}^2, \quad (22)$$

$$i\sum_{k=2}^{i}\eta_k^2+\sum_{k=2}^{i}\eta_k^2-\sum_{k=2}^{i}\eta_k^2+i\eta_{i+1}^2 > \left(\sum_{k=2}^{i}\eta_k\right)^2+2\eta_{i+1}\sum_{k=2}^{i}\eta_k+\eta_{i+1}^2, \quad (23)$$

$$i\sum_{k=2}^{i}\eta_k^2+i\eta_{i+1}^2 > \left(\sum_{k=2}^{i}\eta_k\right)^2+2\eta_{i+1}\sum_{k=2}^{i}\eta_k+\eta_{i+1}^2, \quad (24)$$

$$i\left(\sum_{k=2}^{i}\eta_k^2+\eta_{i+1}^2\right) > \left(\sum_{k=2}^{i}\eta_k+\eta_{i+1}\right)^2, \quad (25)$$

$$i\sum_{k=2}^{i+1}\eta_k^2 > \left(\sum_{k=2}^{i+1}\eta_k\right)^2. \quad (26)$$

即当 $n=i+1$ 时,$i\sum_{k=2}^{i+1}\eta_k^2 > \left(\sum_{k=2}^{i+1}\eta_k\right)^2$ 成立,则当 $x^{(0)}(k)$,$k=2,3,\cdots,n$ 不同时相等时 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 可逆.

定义 2[4] 令 $\otimes_i$ 与 $\otimes_j$ 为连续灰数,$\forall\tilde{\otimes}_i\in\otimes_i\Rightarrow\tilde{\otimes}_i\in[a_i,b_i]$,$\forall\tilde{\otimes}_j\in\otimes_j\Rightarrow\tilde{\otimes}_j\in[a_j,b_j]$,$[a_i,b_j]$ 为联通区间; 令 Opr 为除运算,则有连续覆盖除运算为

$$\forall\tilde{\otimes}_i\mathrm{Opr}\,\tilde{\otimes}_j\in\otimes_i\,\mathrm{Opr}\otimes_j,\mathrm{Opr}\Leftrightarrow\div,\Rightarrow\tilde{\otimes}_i/\tilde{\otimes}_j\in$$
$$\left[\min\left\{\frac{a_i}{a_j},\frac{a_i}{b_j},\frac{b_i}{a_j},\frac{b_i}{b_j}\right\},\max\left\{\frac{a_i}{a_j},\frac{a_i}{b_j},\frac{b_i}{a_j},\frac{b_i}{b_j}\right\}\right]. \quad (27)$$

注: 定义 2 即文献[4]定义 2.38.

定义 2 默认 $b_i\geqslant a_i\geqslant 0$,$b_j\geqslant a_j\geqslant 0$.

命题 1[4] 令 $X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\}$,令 $X^{(0)}$ 的 GM(1,1) 建模为 GM∘AGO: $X^{(0)}\to(a,b)$,a 为发展系数,$a=\dfrac{CD-(n-1)E}{(n-1)F-C^2}$,若有 $x^{(0)}(k)\in[0,\beta]$,$k=1,2,\cdots,n$,则 a 的覆盖为 $a\in\left(-\dfrac{2}{n+1},\dfrac{2}{n+1}\right)$.

命题 1 可参见文献[4]定理 3.13. 部分证明如下.

由 $a=\dfrac{\Delta_a}{\Delta}$,$\Delta_a\in[-H,H]$,$\Delta\in[L,M]$,其中

$$H=\frac{\beta^2}{2}(n^2-1)(n-1),L=-\frac{\beta^2}{4}(n^2-1)^2,$$

$$M=\frac{\beta^2}{4}(n-1)\left(\frac{1}{3}n(4n^2-1)-1\right). \quad (28)$$

由定义 2 知

$$a=\frac{\Delta_a}{\Delta}\in\left[\min\left\{\frac{-H}{L},\frac{H}{L},\frac{-H}{M},\frac{H}{M}\right\},\max\left\{\frac{-H}{L},\frac{H}{L},\frac{-H}{M},\frac{H}{M}\right\}\right]. \quad (29)$$

灰色系统建模需要至少 4 个数据,即 $n\geqslant 4$,则容易证明

$$L=-\frac{\beta^2}{4}(n^2-1)^2\leqslant 0,$$

$$M=\frac{\beta^2}{4}(n-1)\left(\frac{1}{3}n(4n^2-1)-1\right)\geqslant 0. \quad (30)$$

因此 $a=\dfrac{\Delta_a}{\Delta}\in\left[\min\left\{\dfrac{-H}{L},\dfrac{H}{L},\dfrac{-H}{M},\dfrac{H}{M}\right\},\max\left\{\dfrac{-H}{L},\dfrac{H}{L},\dfrac{-H}{M},\dfrac{H}{M}\right\}\right]$ 成立的条件不充分.

结论 $a\in\left(-\dfrac{2}{n+1},\dfrac{2}{n+1}\right)$ 成立的条件不充分. 级比 $\sigma(k)\in(\mathrm{e}^{\frac{-2}{n+1}},\mathrm{e}^{\frac{2}{n+1}})$ 成立的条件不充分. 命题 1 成立的条件不充分.

假如 $\sigma(k)\in(\mathrm{e}^{\frac{-2}{n+1}},\mathrm{e}^{\frac{2}{n+1}})$ 成立,由此产生的结论是 $X^{(0)}$ 的数据越多,n 越大,级比覆盖越靠近 1[4],而级比越接近于 1,通常模拟精度越高,这显然与 GM(1,1) 模型小样本建模比大样本建模具有更高精度不符合.

定理 2[14] 令 $X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\}$,其中 $x^{(0)}(k)=a^k$,$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i)$,$\hat{x}^{(1)}(1)=x^{(0)}(1)$(或 $\hat{x}^{(1)}(1)=x^{(0)}(n)$). 若 $\hat{x}^{(0)}(k)$ 是建立离散 GM(1,1) 模型的还原值,则 $\hat{x}^{(0)}(k)=a^k$,其中 $k=1,2,\cdots,n$.

由定理 2 可以看出,由于离散 GM(1,1) 模型可以完全拟合等比序列,文献[4]提出灰建模数据的处理原则"经过处理后的级比 $\sigma_y(k)$ 应尽量靠近 1,也就是 $\delta_y(k)$ 应尽可能小",可以拓展为"经过处理后的级比 $\sigma_y(k)$ 应尽量靠近某一个常数 c". 文献[4]提出灰建模数据的处理原则仅仅是一种特殊情况.

虽然命题 1 级比存在范围不够严密,但是级比判断对于建立 GM(1,1) 模型仍然具有重要意义. 在选择建模数据样本时,如果级比接近于 1,通常模型的模拟精度较高,这主要是因为发展系数较小的缘故. 即使级比不接近于 1,只要 $\sigma(k)$,$k=2,3,\cdots,n$ 比较接近,原始序列的指数特性明显,通常模型仍然具有较高的模拟精度. 经典 GM(1,1) 模型要求发展系数 $|a|<2$,当发展系数接近于 2 时,即使所有级比都接近于一个常数,模型的模拟值相对偏差仍然较大,这是因为在对经典 GM(1,1) 模型的基本形式求

解时采用了白化方程求解,而这两类方程并不是同解方程. 由于离散 GM(1,1) 模型对于发展系数和原始序列没有限制,当离散 GM(1,1) 模型的所有级比都接近于一个常数时,模型具有较高的模拟精度.

命题 2[4] 令 $X^{(0)}=\{x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)\}$,令 $X^{(0)}$ 的 GM(1,1) 建模为 GM∘AGO: $X^{(0)}\to(a,b)$,b 为灰作用量,$b=\dfrac{DF-CE}{(n-1)F-C^2}$,若 $x^{(0)}(k)\in[0,\beta]$,$k=1,2,\cdots,n$,则 b 的覆盖为

$$b\in\left[-\beta\frac{(n-1)\left(\frac{1}{3}n(4n^2-1)-1\right)}{(n^2-1)^2},\beta\right]. \quad (31)$$

命题 2 可参见文献[4]定理 3.14. 部分证明如下.

$$P=-\frac{\beta^3}{4}(n^2-1)^2,$$

$$Q=\frac{\beta^3}{4}(n-1)\left(\frac{1}{3}n(4n^2-1)-1\right),$$

$$\Delta=(n-1)F-C^2\in[L,M], \quad (32)$$

$$L=-\frac{\beta^2}{4}(n^2-1)^2,$$

$$M=\frac{\beta^2}{4}(n-1)\left(\frac{1}{3}n(4n^2-1)-1\right). \quad (33)$$

有 $Q=\beta M$,$P=\beta L$.

由于 b 的表达式为

$$b=\frac{\Delta_b}{\Delta}=\frac{DF-CE}{(n-1)F-C^2}, \quad (34)$$

由定义 2 知

$$\frac{\Delta_b}{\Delta}\in\left[\min\left\{\frac{P}{L},\frac{Q}{L},\frac{P}{M},\frac{Q}{M}\right\},\max\left\{\frac{P}{L},\frac{Q}{L},\frac{P}{M},\frac{Q}{M}\right\}\right]. \quad (35)$$

灰色系统建模需要至少 4 个数据,即 $n\geqslant4$,则容易证明

$$L=-\frac{\beta^2}{4}(n^2-1)^2\leqslant0,$$

$$M=\frac{\beta^2}{4}(n-1)\left(\frac{1}{3}n(4n^2-1)-1\right)\geqslant0. \quad (36)$$

因此 $b=\dfrac{\Delta_b}{\Delta}\in\left[\min\left\{\dfrac{P}{L},\dfrac{Q}{L},\dfrac{P}{M},\dfrac{Q}{M}\right\},\max\left\{\dfrac{P}{L},\dfrac{Q}{L},\dfrac{P}{M},\dfrac{Q}{M}\right\}\right]$ 成立的条件不充分. 命题 2 成立的条件不充分.

定义 3[2] 称 $\rho(k)=\dfrac{x(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}x(i)}$;$k=2,3,\cdots,n$ 为序列 X 的光滑比.

定理 3[15] 若 $x(k)$ 为递增数列,且 $x(1)\geqslant \mathrm{e}$,则 $\dfrac{\ln x(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}\ln x(i)}\leqslant\dfrac{x(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}x(i)}$.

很多文章用降低光滑比的方法提高建模的模拟精度. 通常光滑比越小,反映模型精度的模拟值平均相对偏差越小,但是降低光滑比不是提高模拟精度的充分条件,有时当光滑比降低时,平均相对偏差反而增大. 如以下例子.

令 $X^{(0)}=\{3,3.3,3.63,3.993,4.3923\}$,采用降低光滑比的对数变换方法得到 $Y^{(0)}=\{1.09861,1.19392,1.28923,1.38454,1.47985\}$,首先直接对 $X^{(0)}$ 建立 GM(1,1) 模型,记为原模型,其次对 $Y^{(0)}$ 建立 GM(1,1) 模型并还原得到原始序列的模拟值,记为新模型. 2 种模型的模拟精度如表 1 所示.

表 1 模拟精度比较

Table 1 Simulation result comparison

序号	实际值	原模型		新模型	
		模拟值	相对误差/%	模拟值	相对误差/%
2	3.3	3.297 4	0.079 4	3.310 4	0.315 2
3	3.63	3.626 9	0.086 5	3.616 2	0.379 5
4	3.993	3.989 3	0.093 7	3.976 2	0.421 4
5	4.392 3	4.387 9	0.100 9	4.402 7	0.236 0

由表 1 可以看出,原始序列的模拟值平均相对误差为 0.090 1%,采用对数变换再还原的模拟值平均相对偏差为 0.338 0%,降低光滑比并未提高原始序列的光滑度,降低光滑比不是提高模拟精度的充分条件.

3 结束语

本文对经典 GM(1,1) 模型的建模条件、级比和光滑比判断存在的问题进行了研讨. 研究结果表明:当原始序列的累加序列都相等时,经典 GM(1,1) 模型的发展系数不存在,建立经典模型对于原始数据有一定要求. 经典模型的级比判定条件是一个特例,本文对经典模型的建模条件进行了拓展. 尽管提高原始序列的光滑度通常可以提高建模精度,但是提高光滑度并不是提高模拟精度的充分条件. 关于 GM(1,1) 模型的建模条件还有待进一步研究.

参考文献

References

[1] Liu S F, Lin Y. An introduction to grey systems: Foundations, methodology and applications [M]. Grove City:

IIGSS Academic Publisher,1998

[2] Yao T X,Liu S F,Xie N M. On the properties of small sample of GM (1,1) model [J]. Applied Mathematical Modelling,2009,33(4):1894-1903

[3] 肖新平,宋中民,李峰. 灰技术基础及其应用 [M]. 北京:科学出版社,2005
XIAO Xinping,SONG Zhongmin,LI Feng. Basic theories of grey technique and its applications [M]. Beijing: Science Press,2005

[4] 邓聚龙. 灰预测与灰决策 [M]. 武汉:华中科技大学出版社,2002
DENG Julong. Grey forecasting and decision making [M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science and Technology,2002

[5] 邓聚龙. 灰理论基础 [M]. 武汉:华中科技大学出版社,2002
DENG Julong. Basis of grey theory [M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science and Technology,2002

[6] Deng J L. Proving GM (1,1) modeling via four data: At least [J]. The Journal of Grey System,2004,16(1):1-4

[7] Li X C. On parameters in grey model GM (1,1) [J]. The Journal of Grey System,1998,10(2):155-162

[8] Xiao X P. On parameters in grey models [J]. The Journal of Grey System,1999,11(4):315-324

[9] 肖新平,邓聚龙. 数乘变换下 GM(0,N) 模型中的参数特征 [J]. 系统工程与电子技术,2000,22(10):1-3
XIAO Xinping,DENG Julong. Parameter characteristics of GM (0,N) model under multiple transformation [J]. Systems Engineering and Electronics,2000,22(10):1-3

[10] 李炳乾. 原始序列特征与灰色模型的选择 [J]. 灰色系统理论与实践,1992,2(1):63-66
LI Bingqian. The characteristics of raw sequence and the selection of grey model [J]. Grey Systems Theory & Practice,1992,2(1):63-66

[11] Deng J L. On boundary of grey input b in GM (1,1) [J]. The Journal of Grey System,2001,13(1):68-69

[12] 冯利华. 灰色预测模型的问题讨论 [J]. 系统工程理论与实践,1997,17(12):125-128
FENG Lihua. Problem discussion of grey forecasting model [J]. Systems Engineering: Theory & Practice,1997,17(12):125-128

[13] 刘思峰,邓聚龙. GM (1,1) 模型的适用范围 [J]. 系统工程理论与实践,2000,20(5):121-124
LIU Sifeng,DENG Julong. The range suitable for GM (1,1) [J]. Systems Engineering: Theory & Practice,2000,20(5):121-124

[14] 姚天祥,刘思峰. 改进的离散灰色预测模型 [J]. 系统工程,2007,25(9):103-106
YAO Tianxiang,LIU Sifeng. Improvement of a forecasting discrete GM (1,1) [J]. Systems Engineering,2007,25(9):103-106

[15] 何斌,蒙清. 灰色预测模型拓广方法研究 [J]. 系统工程理论与实践,2002,22(9):138-141
HE Bin,MENG Qing. Study on generalization for grey forecasting model [J]. Systems Engineering: Theory & Practice,2002,22(9):138-141

Modeling conditions of GM (1,1) model

YAO Tianxiang[1] CAO Jie[1]

1 School of Economics and Management,Nanjing University of Information Science & Technology,Nanjing 210044

Abstract GM (1,1) model is the core prediction model in grey system. The study on the modeling conditions of grey system has been considered the base of improving the simulation accuracy. This paper adopts the method of combining theory proof and numerical example to study the modeling conditions of grey system,with the purpose to expand the class ratio judgment conditions of traditional grey prediction model. Results indicate that when the accumulate values of the raw sequence are equal,the development coefficient does not exist. The class ratio judgment intervals of the traditional modeling condition are not accurate enough,due to the still incomplete understanding of class ratio. Improving the smooth degree of the raw sequence is not the adequate condition to improve the simulation accuracy. Therefore,the modeling conditions of the traditional GM (1,1) model still need further research.

Key words grey system; GM(1,1) model; class ratio; smooth ration