

# 线性天线阵列空间相关性函数的分析

吕波<sup>1</sup> 周杰<sup>1</sup>

## 摘要

推导了在线性天线阵列中的3种典型角能量分布的空间相关性方程,即高斯分布、高斯空间分布和均匀分布.其中高斯分布是由高斯空间分布推导得到的.空间相关性方程是空间天线,阵列几何以及角能量分布的一个函数.分别对在高斯角能量分布和均匀角能量分布下的空间相关性方程进行了分析,将天线间的距离和角能量分布的标准差作为参数在 Matlab 环境下进行了仿真.结果表明:在一定范围内增大天线间的距离以及角能量分布标准差可以减小天线阵列空间相关性,改善系统性能;同时,在中长距离内,高斯角能量分布更有利于提高系统的性能.

## 关键词

线性天线阵列;空间相关性;角度扩展;角能量分布

中图分类号 TP391.9

文献标志码 A

收稿日期 2010-06-08

资助项目 教育部留学基金委启动项目(教外司留[2007]1108);江苏省高校自然科学基金研究计划项目(08KJB510009)

## 作者简介

吕波,男,硕士生,主要研究无线通信系统的天线阵列空间相关性. lvbo1986122@sina.com

周杰,男,教授,博士生导师,主要研究无线通信系统. zhoujie@nuist.edu.cn

## 0 引言

### Introduction

下一代无线通信系统是一个基于在全球不同网络间传输的混合的移动服务的重要通信系统.在如此复杂的无线通信环境下,多径衰落严重损害了移动通信系统的性能,利用信号处理方法进行智能天线阵列的分集接收技术被认为是提高信道容量和克服多径衰落的最有效无线传输技术.然而,分集增益会随着天线阵元间衰落信号的相关性下降<sup>[1-2]</sup>.

先前空间相关性的计算主要是依赖数值积分和无穷级数来计算各种角能量分布下的空间两点的相关性,因此每种角能量分布下的各个参数都必须考虑<sup>[3-4]</sup>.本文采用较为简单且常用的线性天线阵列作为系统模型,推导出了在线性天线阵列中的3种典型角能量分布即高斯分布,高斯空间分布和均匀分布的空间相关性通用方程.通过改变空间相关性方程中的某些参数获得更好的系统性能.在一定范围内改变角能量分布标准差的值,得到了不同的相关性计算结果.仿真结果表明,该函数在3种角能量分布下具有良好的通用性,且与理论结果一致.

## 1 阵列几何与角能量分布

### Array geometry and angular energy distribution

### 1.1 阵列几何

在天线阵列系统中,天线阵列用于无线网络用户在基站中使用相同或者不同的如 FDMA, TDMA, CDMA 等多址技术接收信息.天线阵列可能采用不同的几何排列.在线性阵列中,无论任意一个平面上的所有天线都位于一条直线,天线阵元可以在极坐标和直角坐标两种不同的坐标系上表示,而传播时延的产生是因为天线之间的信号通过仅有一个仰角函数的线性阵列进行传播<sup>[5]</sup>;在平面阵列的各种情况中,到达角的仰角和方位角定义了传播时延.简而言之,只有方位平面才可以被用作是数学模型.图1即为本文所研究的线性天线几何阵列.多天系统可能是全向的或者是对入射波的角度和频率参数具有非均匀敏感性的,且天线间的间距可能是等距或者非等距的.在无线通信环境中,天线间距在对抗由于用户访问相同信道以及本地和远程信号散射点引起的信号失真使用正确的处理方法起到了非常重要的作用.

<sup>1</sup> 南京信息工程大学 电子与信息工程学院, 南京, 210044

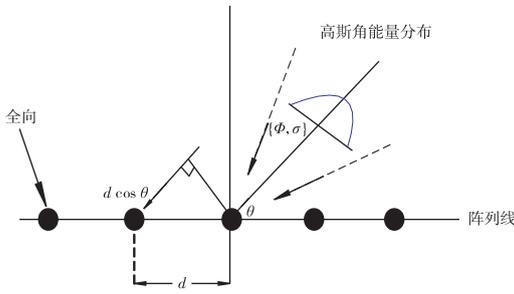


图1 线性天线几何阵列  
Fig.1 Linear antenna array

## 1.2 角能量分布

通常首先采用的空间信道模型是高斯角能量分布模型。高斯角能量分布方程可以表示为<sup>[6]</sup>

$$p(\theta) = \frac{\kappa}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\theta-\phi)^2/2\sigma^2}, \quad (1)$$

$$\theta \in [-\pi + \phi, \pi + \phi].$$

其中: $\phi$ 表示中心到达角; $\sigma$ 是角能量分布的标准差;

$\kappa$ 是标准化因子,  $\kappa = \frac{1}{\text{erf}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}\sigma}\right)}$ ,  $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

是误差函数,在扩展角度较小时, $\kappa$ 通常等于1.

其次经常使用的空间信道模型是高斯空间模型,这种分布模拟了散射点周围接收机在空间使用双变量的高斯分布,换句话说,散射点在 $(x, y)$ 位置的概率为<sup>[7]</sup>

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_s} e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2\sigma_s^2}}. \quad (2)$$

式(2)中: $\sigma_s$ 是 $x$ 与 $y$ 位置处的标准差; $(x_0, y_0)$ 是角能量分布中心.

图2绘制了高斯空间分布的三维模型.

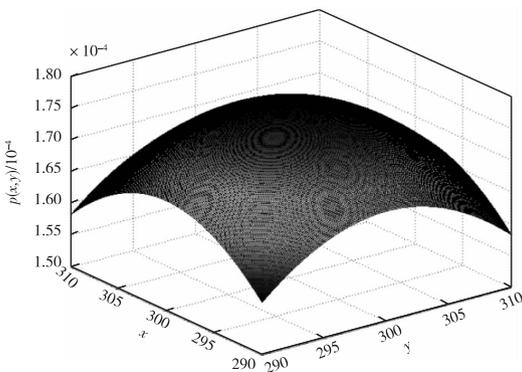


图2 高斯空间分布  
Fig.2 Gaussian spatial distribution model

为了找到角能量分布的到达角,可以进行坐标变换.将 $x = r\sin(\theta)$ ,  $y = r\cos(\theta)$ 代入方程(2),并定义 $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ ,  $\phi = \tan^{-1}(x_0/y_0)$ ,则可以得到

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{R^2}{2\sigma_s^2} + \frac{R\cos(\theta-\phi)}{\sqrt{2\pi}\sigma_s}} \cdot Q\left(-\frac{R\cos(\theta-\phi)}{\sigma_s}\right). \quad (3)$$

其中 $Q(x) = \text{erfc}(x/\sqrt{2})/2$ .

图3将 $[x_0 = 320, y_0 = 320]$ ,  $\sigma_s = 30$ 时的高斯空间分布和 $\phi = 45^\circ$ ,  $\sigma = 4^\circ$  ( $0.07 \text{ rad}$ )时的高斯分布进行了比较.可以看出,当 $\theta - \phi$ 较小时,方程(3)与(1)的高斯分布结果近似一样.从式(3)可以发现,当 $R/\sigma_s$ 较大, $\theta - \phi$ 较小时可以用高斯分布来模拟高斯空间分布,其中方程(1)中的 $\sigma = \sigma_s/R$ .

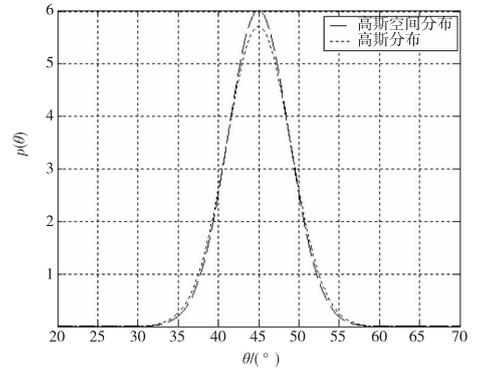


图3  $[x_0 = 320, y_0 = 320]$ ,  $\sigma_s = 30$ 时的高斯空间分布与 $[\sigma = 4^\circ, \phi = 45^\circ]$ 时的高斯分布比较

Fig.3 Comparison of angular energy distributions between Gaussian spatial distribution  $[x_0 = 320, y_0 = 320, \sigma_s = 30]$  and Gaussian angular energy distribution  $[\sigma = 4^\circ, \phi = 45^\circ]$

另外一种常用的角能量分布是均匀分布.均匀分布的角能量分布方程可以表示为<sup>[8]</sup>

$$p(\theta) = \frac{1}{2\Delta}, \quad \theta \in [\phi - \Delta, \phi + \Delta]. \quad (4)$$

式(4)中 $2\Delta$ 是中心到达角 $\phi$ 的角度范围.

## 2 线性阵列的空间相关性函数

Spatial correlation function of linear antenna arrays

如图1所示,假设一个平面波信号到达线性天线阵列时的到达角为 $\theta$ ,两天线阵元间的距离为 $d$ ,则线性几何阵列的响应向量 $\mathbf{v}(\theta)$ 可以表示为

$$\mathbf{v}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-j2\pi\frac{d}{\lambda}\cos\theta} \\ e^{-j2\pi\frac{2d}{\lambda}\cos\theta} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi\frac{(M-1)d}{\lambda}\cos\theta} \end{pmatrix}$$

其中,  $d$  和  $M$  分别表示天线间距和天线数, 天线阵列的阵元  $m$  和  $n$  的空间相关性可表示为<sup>[9]</sup>

$$\rho(m, n) = E[\mathbf{v}_m(\theta)\mathbf{v}_n(\theta)^*] = \int_{\theta} \mathbf{v}_m(\theta)\mathbf{v}_n(\theta)^* p(\theta) d\theta, \quad (5)$$

$p(\theta)$  是角能量分布方程的入射信号的概率密度函数. 均匀角能量分布时, 线性天线阵列的空间相关性方程的实部和虚部分别表示为

$$\text{Re}[\rho(m, n)] = J_0(Z_l) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(Z_l) \cos(2k\phi) \cdot \text{sinc}(2k\Delta), \quad (6)$$

$$\text{Im}[\rho(m, n)] = 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(Z_l) \sin((2k+1)\phi) \cdot \text{sinc}((2k+1)\phi). \quad (7)$$

在式(6)和式(7)中,  $\Delta = \sqrt{3}\sigma$ ,  $Z_l = 2\pi \frac{(m-n)d}{\lambda}$ ,  $J_n(x)$  是修正的第一类贝塞尔函数.

若入射信号不是均匀分布, 而是高斯角能量分布, 则可以对方程(5)使用类似的方法得到高斯角能量分布的线性天线阵列的实部和虚部分别为

$$\text{Re}[\rho(m, n)] = J_0(Z_l) + 2k \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(Z_l) \cos(2k\phi) \cdot e^{-2k^2\sigma^2} \text{Re}\left[\text{erf}\left(\frac{\pi + i2k\sigma^2}{\sqrt{2}}\right)\right], \quad (8)$$

$$\text{Im}[\rho(m, n)] = 2k \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(Z_l) \sin((2k+1)\phi) \cdot e^{-(2k+1)^2\sigma^2/2} \text{Re}\left[\text{erf}\left(\frac{\pi + i(2k+1)\sigma^2}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right]. \quad (9)$$

### 3 天线分离

#### Antenna separation

根据文献[3], 易得所需要的距离来确保空间相关性  $|\rho|$ , 可以用以下公式进行近似计算:

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{\sqrt{-2\ln(1-|\rho|)}}{2\pi\sigma\cos(\phi)}. \quad (10)$$

图4绘制了式(10)在  $|\rho| = 0.5$ ,  $\phi$  分别取3个不同值时所需的天线间最小距离的曲线. 由图4可知,  $1 \leq \sigma \leq 2$  时确保了  $10\lambda$  间距的经典拇指距离. 显然, 当  $\phi = 0$ ,  $d = 11/\sigma$  时为需要分离的天线提供了

良好的近似算法, 进而使获得的天线空间相关性的值小于 0.5.

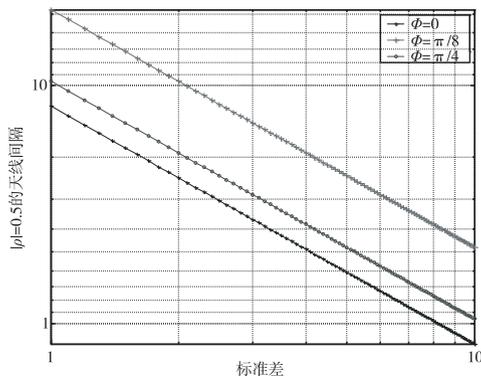


图4 确保  $|\rho| = 0.5$ ,  $\phi = 0, \pi/8, \pi/4$  时所需的天线间最小距离

Fig. 4 Minimum distance between antennas to insure  $|\rho| = 0.5$  for  $\phi = 0, \pi/8, \pi/4$

### 4 仿真结果与分析

#### Simulation result and analysis

从方程(6)至方程(9)可以看出空间相关性是一个空间天线距离为  $d$ , 入射信号的角能量分布到达角为  $\theta$  的线性几何阵列函数. 图5a绘制了当  $\phi = 60^\circ$  时,  $\sigma$  与  $d/\lambda$  为变量的均匀角能量分布的空间相关性的关系. 显然, 随着阵元间距离的增加, 空间相关性呈现下降趋势, 且随着  $\sigma$  的增大, 相关性也迅速减小. 从图5b可以看出, 当  $\phi = 45^\circ$  时, 随着  $\sigma$  的增大, 出现了更多的副瓣. 比较图5a和图5b, 在相同天线距离内,  $\sigma$  的逐渐增大使得空间相关性逐渐减小. 随着到达角  $\phi$  的减小, 天线间距离的不断增大, 空间相关性越小. 图5c和图5d分别绘制了到达角  $\phi = 60^\circ$  与  $\phi = 45^\circ$  时高斯角能量分布下的空间相关性与标准差  $\sigma$ ,  $d/\lambda$  的变化曲线. 图5c中当  $\phi = 60^\circ$  时, 随着天线距离的增大, 空间相关性逐渐下降; 且  $\sigma$  越大空间相关性就越小. 由图5d可以看出  $\phi = 45^\circ$  时, 相同天线距离或者随着距离的增大, 空间相关性相应减小; 且随着  $\sigma$  的增大, 空间相关性是减小的. 综合分析发现, 到达角  $\phi$  的减小, 空间相关性也随之减小; 而标准差  $\sigma$  的增大, 同样也会使空间相关性减小. 另外, 在  $\sigma = [15^\circ, 25^\circ]$  时, 空间相关性曲线相对比较接近. 在图6中, 取  $\sigma = 20^\circ$ ,  $\phi = 30^\circ$  时, 对高斯分布和均匀分布的空间相关性进行了比较. 显然,  $\phi = 30^\circ$  比  $\phi = 60^\circ$ ,  $\phi = 45^\circ$  具有更好的空间相关性; 其次, 发现在  $\sigma = 20^\circ$  时比  $\sigma = 15^\circ$  时的空间相

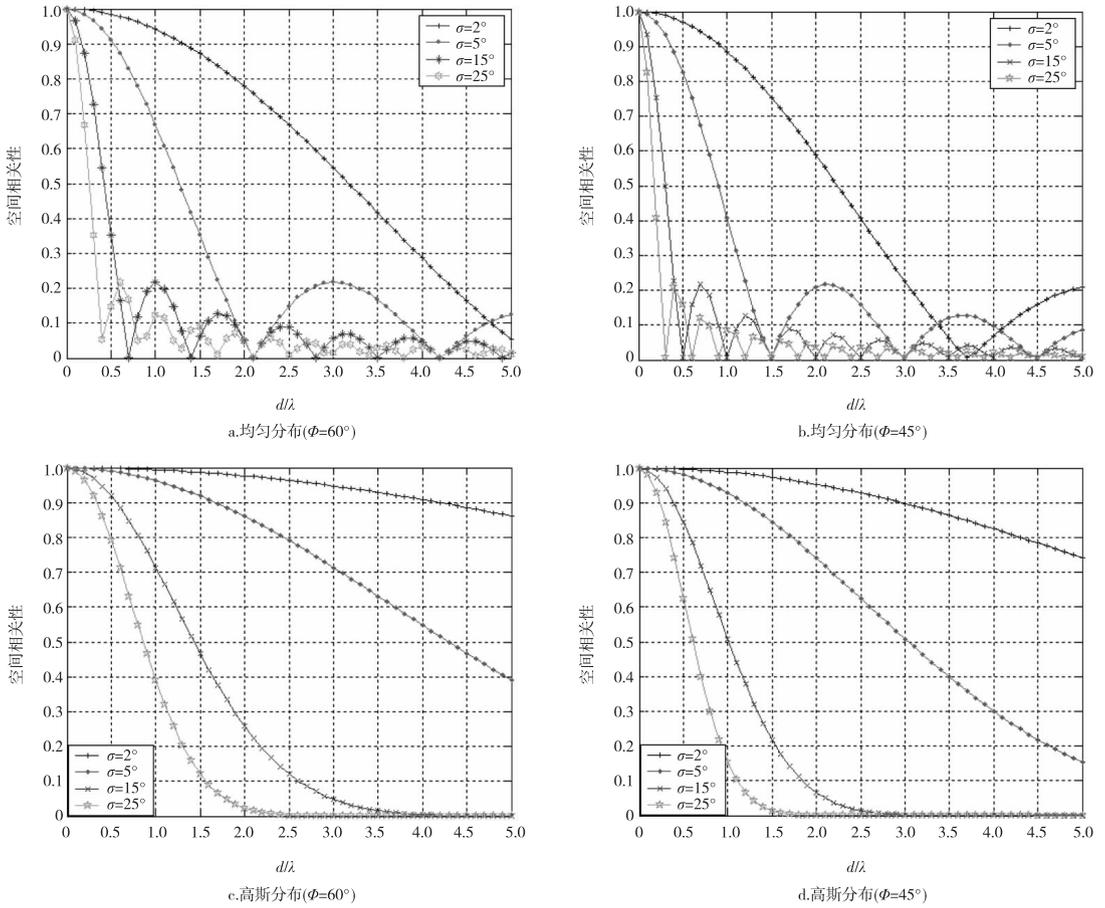


图5 各种分布下的空间相关性

Fig. 5 Spatial correlation of distribution

相关性更低,所以可以得出  $\sigma = [20^\circ, 30^\circ]$  空间相关性更小,而且在中长天线距离内,高斯角能量分布比均匀角能量分布具有更好的优越性.

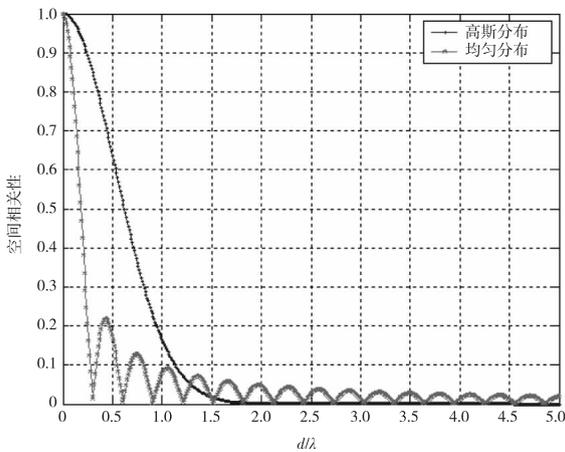


图6 均匀分布与高斯分布在  $\phi = 30^\circ, \sigma = 20^\circ$  时的空间相关性比较

Fig. 6 Comparison of spatial correlations between uniform distribution and Gaussian distribution with  $\phi = 30^\circ, \sigma = 20^\circ$

## 5 结论

### Conclusion

本文推导了典型角能量分布在线性天线阵列下的空间相关性方程,验证了在一定条件下可以用高斯分布模拟高斯空间分布,并且通过相关性函数的分析得到入射角的中心到达角较小时具有较低的空间相关性;同样,随着天线间距离的增大以及在一定范围增大标准差  $\sigma$  也可以减小空间相关性,提高系统性能.一般而言,高斯角能量分布在线性天线阵列中更具优越性.

## 参考文献

### References

- [ 1 ] Jakes W C. Microwave mobile communications [ M ]. New York: Wiley, 1974
- [ 2 ] Proakis J G. Digital communications [ M ]. New York: McGraw-Hill, 1995
- [ 3 ] Winters J H. The diversity gain of transmit diversity in wireless system with reyleigh fading [ C ] // IEEE International Conference on Communications, 1994: 1121-1125

- [ 4 ] Alamouti S M. A simple transmit diversity technique for wireless network[ D ]. Palo Alto, CA: Stanford University, 1996
- [ 5 ] Buehrer R M. The impact of angular energy distribution on spatial correlation[ C ] // Proceedings of IEEE 56th Vehicle Technology Conference, 2002; 24-28
- [ 6 ] Zhou J, Sasaki S, Muramatsu S, et al. Spatial correlation functions for a circular antenna array and their applications in wireless communication system[ J ]. IEICE Trans Fundam Comput Sci, 2003, E86-A(7):1716-1723
- [ 7 ] Tsai J A, Woerner B D. The fading correlation function of a circular antenna array in mobile radio environment[ C ] // IEEE Global Telecommunications Conference, San Antonio, Texas, USA, 2001; 3232-3236
- [ 8 ] Fuhl J, Molisch A F, Bonek E. Unified channel model for mobile radio systems with smart antennas[ J ]. IEEE Proc Radar, Sonar and Navig, 1998, 145(1):32-41
- [ 9 ] Zhou J, Dong L J, Li Y. Key technologies for hierarchical CDMA cellular wireless system[ M ]. Beijing: China Meteorological Press, 2009

## The analysis of linear antenna spatial correlation function

LÜ Bo<sup>1</sup> ZHOU Jie<sup>1</sup>

1 School of Electronic & Information Engineering, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044

**Abstract** In the wireless communication, antenna arrays have been the effective way to overcome the multi-path fading and improve frequency spectrum utilization. In this paper, we derive the spatial correlation functions of linear arrays for three types of angular energy distributions: a Gaussian angular distribution, the angular energy distribution derived from a Gaussian spatial distribution, and uniform angular distribution. The spatial correlation is a function of antenna spacing, array geometry and angular energy distribution. The spatial correlation functions in the Gaussian energy distribution and uniform angular energy distribution was analyzed and simulated in Matlab with antennas' distance and the standard deviation of angular energy distribution as parameters. The simulation results show that increase the values of the two parameters within a certain range can reduce the spatial correlation and improve the system performance. Meanwhile, the Gaussian angular energy distribution system can help to improve the system performance better than the uniform angular energy distribution in moderate and long distance.

**Key words** linear antenna arrays; spatial correlation; deviation; angle energy distribution