



Delta 算子框架下大系统的协同控制研究

摘要

本文研究了 Delta 算子描述的一类线性大系统的协同状态反馈控制问题. 首先根据 Delta 算子描述的独立子系统, 通过协同状态反馈控制器给出了互联的闭环控制系统. 然后基于线性矩阵不等式技术, 给出了系统协同状态反馈稳定控制器及协同状态反馈保性能控制器设计的充分条件, 并利用李雅普诺夫稳定性理论证明所提方法的有效性. 最后, 仿真实例验证了本文算法的有效性和优越性.

关键词

Delta 算子; 大系统; 协同控制

中图分类号 TP13; O232

文献标志码 A

0 引言

随着计算机、通信等技术的飞速发展, 复杂大系统 (Large Scale System) 已广泛应用在工程技术^[1-4]、社会经济^[5]、生态环境^[6-8]等各个领域. 大系统的特点是模型维数较高、结构复杂、对系统鲁棒性要求较强等. 大系统稳定性研究常用局部反馈方法, 通过减少子系统间的互联增加大系统稳定性^[9]. 但文献[10-11]的研究表明互联和协同在大系统稳定性中也有重要作用. 文献[10]在自反馈和互联反馈情况下, 给出两个系统协同稳定的充要条件, 提出两系统谐波控制的概念; 文献[11]针对含有不稳定子系统的大系统, 设计一种特殊的分散控制器, 使其通过有效的协同成为稳定的互联系统; 文献[12]针对多无人机系统, 在分析最优布站方式基础上, 提出一种闭环最优控制方法, 有效提升了多机协同跟踪时差无源定位的精度; 文献[13]则针对航空火力系统, 研究了分布式协同架构下的控制问题.

离散时间系统可由连续时间系统采样得到, 适用于计算机实现, 但当采样快时在有限字长的计算机中并不稳定. 离散时间模型常用移位算子的形式表示, 但在短采样周期间隔下存在截断和舍入误差困难的问题. 在采样周期趋近于 0 时, 离散 Delta 算子模型趋近于原连续模型, 能有效克服移位算子方法高速采样时的缺点, 有效避免传统 Z 变换引起的数值不稳定问题, 使得连续域的各类设计方法可直接应用于离散域. 因此 Delta 算子已成为连续时间模型和离散时间模型的统一描述方法, 在计算机高速信号处理、宽带通信与数字采样控制领域具有广阔的应用前景^[14]. 目前关于 Delta 算子的研究多集中在数据丢包、时变时延、 H_∞ 滤波等方面^[15-19]. 文献[15]针对二维 Delta 算子系统在饱和状态下的稳定性问题, 给出了系统极限轨迹的一般性质和全局渐近稳定的充分必要条件; 文献[16]针对 Delta 算子系统设计一个多频率区间降价 H_∞ 滤波器, 降低了现有方法的计算复杂度并提高了 H_∞ 性能; 文献[17]针对具有双通道丢包、时变时延且范数有界的不确定 Delta 算子网络控制系统, 提出一种基于交换系统的故障检测方法, 并给出了期望滤波器参数的显式表达式; 文献[18]将交换拓扑网络中具有协作竞争交互和通信时延的多智能体系统的群一致性问题, 转化为具有通信时延系统的全局渐近稳定问题; 文献[19]针对具有内部参数摄动和外部干扰的高速信号采样系统, 提出一种基于 Sigmoid 函数的 Delta 算子饱和变速趋近律, 实现了不确定 Delta 算子系

收稿日期 2021-09-16

资助项目 国家自然科学基金 (61973169); 江苏省自然科学基金 (BK20201392)

作者简介

薛艳梅, 女, 博士, 副教授, 研究方向为动态系统稳定性分析与控制、信息物理系统的安全控制. ymxue1@163.com

¹ 南京信息工程大学 数学与统计学院, 南京, 210044

统的软滑模控制器设计.

值得注意的是,关于 Delta 算子的大系统协同控制方面的研究较少.文献[9]将一些连续系统或离散系统的结果整合到 Delta 算子框架下,通过李雅普诺夫稳定性理论以线性矩阵不等式形式给出了大系统协同稳定的充分条件.

受上述研究启发,本文将 Delta 算子描述的大系统看作相互独立的子系统,研究 Delta 算子框架下线性大系统的协同状态反馈控制问题.以线性矩阵不等式形式给出了互联系统协同状态反馈渐近稳定的充分条件,并给出了优化性能指标.本文方法放宽了文献[9]中协同状态反馈控制器设计中对正定矩阵的约束条件,使结果更具一般性.最后仿真实例进一步验证了本文算法的有效性及其优越性.

1 预备知识及问题描述

1.1 预备知识

文中 $\mathbf{R}^{p \times q}$ 表示 p 行 q 列的实矩阵, \mathbf{A}^T 表示矩阵 \mathbf{A} 的转置, \mathbf{M}^{-1} 表示矩阵 \mathbf{M} 的逆, $\mathbf{A} > 0$ 表示 \mathbf{A} 为对称正定矩阵, $\mathbf{A} \geq 0$ 表示 \mathbf{A} 为对称半正定矩阵.

定义 1^[14] Delta 算子定义如下:

$$\delta(\mathbf{x}(t_k)) = \begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}, & T = 0, \\ \frac{\mathbf{x}(t_k + T) - \mathbf{x}(t_k)}{T}, & T \neq 0, \end{cases}$$

其中, T 表示一个采样周期.

注 1 当采样周期 $T \rightarrow 0$ 时,可知 Delta 算子 $\delta\mathbf{x}(t_k) \rightarrow \dot{\mathbf{x}}(t_k)$; 当 $T = 0$ 时, $\delta\mathbf{x}(t_k) = \dot{\mathbf{x}}(t_k)$; 当 $T = 1$ 时, $\delta\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k)$, 与传统移位算子等价. 与传统离散移位算子不同,离散 Delta 算子近似于欧拉导数,在离散时间的控制系统中采样周期越短系统性能越好.因此在有限字长计算机中,Delta 算子模型在高速采样下具有更好数值性质^[14].

引理 1^[14] (Delta 算子的性质) 对任意关于时间 t 的函数 $x(t)$ 和 $y(t)$, 有

$$\delta(x(t)y(t)) = \delta(x(t))y(t) + x(t)\delta(y(t)) + T\delta(x(t))\delta(y(t)).$$

引理 2^[20] (Schur 补引理) 对给定的对称矩阵

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix}, \text{ 其中 } \mathbf{S}_{11} \text{ 是 } r \times r \text{ 维矩阵, } \mathbf{S}_{12} \text{ 是 } r \times n$$

维矩阵, \mathbf{S}_{21} 是 $n \times r$ 维矩阵, \mathbf{S}_{22} 是 $n \times n$ 维矩阵, 以下三个条件是等价的:

$$1) \mathbf{S} < 0;$$

$$2) \mathbf{S}_{11} < 0, \mathbf{S}_{22} - \mathbf{S}_{12}^T \mathbf{S}_{11}^{-1} \mathbf{S}_{12} < 0;$$

$$3) \mathbf{S}_{22} < 0, \mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{12} \mathbf{S}_{22}^{-1} \mathbf{S}_{12}^T < 0.$$

1.2 问题描述

本研究考虑 Delta 域下独立子系统通过协同控制成为一个互联闭环系统的状态反馈控制问题.

Delta 算子描述的两个独立子系统如式(1)、(2)所示:

$$\delta(\mathbf{x}_1(t_k)) = \mathbf{A}_{\delta 1} \mathbf{x}_1(t_k) + \mathbf{B}_{\delta 12} \mathbf{u}_{12}(t_k), \quad (1)$$

$$\delta(\mathbf{x}_2(t_k)) = \mathbf{A}_{\delta 2} \mathbf{x}_2(t_k) + \mathbf{B}_{\delta 21} \mathbf{u}_{21}(t_k), \quad (2)$$

其中, $\mathbf{x}_1(t_k) \in \mathbf{R}^{n_1}$ 和 $\mathbf{x}_2(t_k) \in \mathbf{R}^{n_2}$ 分别表示子系统 1 与子系统 2 的状态, $\mathbf{u}_{12}(t_k) \in \mathbf{R}^{m_1}$ 和 $\mathbf{u}_{21}(t_k) \in \mathbf{R}^{m_2}$ 分别表示子系统 1 和子系统 2 的控制输入, 子系统 1 和子系统 2 的系统矩阵分别为 $\mathbf{A}_{\delta 1} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_1}$ 和 $\mathbf{A}_{\delta 2} \in \mathbf{R}^{n_2 \times n_2}$, 控制输入矩阵分别为 $\mathbf{B}_{\delta 12} \in \mathbf{R}^{n_1 \times m_1}$ 和 $\mathbf{B}_{\delta 21} \in \mathbf{R}^{n_2 \times m_2}$ 均为已知常值矩阵.

为使大系统协同稳定, 首先根据子系统(1)、(2)构造状态反馈协同控制器^[9,11]:

$$\mathbf{u}_{12}(t_k) = \mathbf{K}_{\delta 12} \mathbf{x}_2(t_k), \quad (3)$$

$$\mathbf{u}_{21}(t_k) = \mathbf{K}_{\delta 21} \mathbf{x}_1(t_k), \quad (4)$$

其中 $\mathbf{K}_{\delta 12} \in \mathbf{R}^{m_1 \times n_2}$, $\mathbf{K}_{\delta 21} \in \mathbf{R}^{m_2 \times n_1}$ 是将要设计的状态反馈增益矩阵.

联立(1)–(4), 可以得到闭环系统:

$$\delta\mathbf{x}(t_k) = \begin{bmatrix} \delta(\mathbf{x}_1(t_k)) \\ \delta(\mathbf{x}_2(t_k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\delta 1} & \mathbf{B}_{\delta 12} \mathbf{K}_{\delta 12} \\ \mathbf{B}_{\delta 21} \mathbf{K}_{\delta 21} & \mathbf{A}_{\delta 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t_k) \\ \mathbf{x}_2(t_k) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\delta} \mathbf{x}(t_k). \quad (5)$$

定义 2^[11] 如果存在协同状态反馈控制器(3)–(4), 使得闭环系统(5)渐近稳定, 那么系统(1)–(2)就是协同状态反馈稳定的.

本文进一步考虑如下协同控制器性能指标^[9]:

$$J = T \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(t_k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t_k) + \mathbf{u}_{12}^T(t_k) \mathbf{C}_{12} \mathbf{u}_{12}(t_k) + \mathbf{u}_{21}^T(t_k) \mathbf{C}_{21} \mathbf{u}_{21}(t_k)] = T \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}^T(t_k) (\mathbf{Q} + \mathbf{K}_d^T \mathbf{C}_d \mathbf{K}_d) \mathbf{x}(t_k), \quad (6)$$

其中 $\mathbf{C}_{12} \in \mathbf{R}^{m_1 \times m_1}$, $\mathbf{C}_{21} \in \mathbf{R}^{m_2 \times m_2}$ 是正定矩阵, $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$, $\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\delta 21} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{\delta 12} \end{bmatrix}$, $\mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{21} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{12} \end{bmatrix}$.

定义 3 如果存在协同状态反馈控制器(3)–(4), 使得闭环系统(5)渐近稳定, 并满足性能指标(6), 那么子系统(1)–(2)就是协同状态反馈稳定, 并具有性能 J .

针对系统(1)–(2),求取 $\mathbf{K}_{\delta 12}, \mathbf{K}_{\delta 21}$,使得协同控制器(3)–(4)作用下的闭环系统(5)渐近稳定的控制问题是协同状态反馈控制器设计的可行性问题.设计方法如文中定理1所示.

针对系统(1)–(2),求取 $\mathbf{K}_{\delta 12}, \mathbf{K}_{\delta 21}$,使得协同控制器(3)–(4)作用下的闭环系统(5)渐近稳定,并满足性能指标 J 的控制问题是协同状态反馈控制器设计的优化问题.设计方法如文中定理2所示.

2 主要结论

2.1 协同控制器设计的可行性问题

定理1 如果存在正定矩阵 $\mathbf{X}_{11} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_1}, \mathbf{X}_{22} \in \mathbf{R}^{n_2 \times n_2}, \mathbf{W}_{11} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_1}, \mathbf{W}_{22} \in \mathbf{R}^{n_2 \times n_2}$ 和矩阵 $\mathbf{X}_{12} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}, \mathbf{W}_{12} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}, \mathbf{Y}_{11} \in \mathbf{R}^{m_2 \times n_1}, \mathbf{Y}_{12} \in \mathbf{R}^{m_2 \times n_2}, \mathbf{Y}_{21} \in \mathbf{R}^{m_1 \times n_1}, \mathbf{Y}_{22} \in \mathbf{R}^{m_1 \times n_2}$,使得:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ * & \mathbf{X}_{22} \end{bmatrix} > 0, \\ \mathbf{W} &= \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ * & \mathbf{W}_{22} \end{bmatrix} > 0, \\ \boldsymbol{\Sigma} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} & \boldsymbol{\Sigma}_{13} \\ * & \boldsymbol{\Sigma}_{22} & 0 \\ * & * & \boldsymbol{\Sigma}_{33} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (7)$$

成立,其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{11} &= \begin{bmatrix} -2\mathbf{W}_{11} & -2\mathbf{W}_{12} \\ * & -2\mathbf{W}_{22} \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{12} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\delta 1}\mathbf{X}_{11} + \mathbf{B}_{\delta 12}\mathbf{Y}_{21} & \mathbf{A}_{\delta 1}\mathbf{X}_{12} + \mathbf{B}_{\delta 12}\mathbf{Y}_{22} \\ \mathbf{B}_{\delta 21}\mathbf{Y}_{11} + \mathbf{A}_{\delta 2}\mathbf{X}_{12}^T & \mathbf{B}_{\delta 21}\mathbf{Y}_{12} + \mathbf{A}_{\delta 2}\mathbf{X}_{22} \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{13} &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}\mathbf{W}_{11} & \mathbf{T}\mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{T}\mathbf{W}_{12}^T & \mathbf{T}\mathbf{W}_{22} \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{22} &= \boldsymbol{\Sigma}_{12} + \boldsymbol{\Sigma}_{12}^T, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{33} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{T}\mathbf{X}_{11} & -\mathbf{T}\mathbf{X}_{12} \\ * & -\mathbf{T}\mathbf{X}_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

则由 Delta 算子描述的系统(1)–(2)是协同状态反馈稳定的.此时,协同状态反馈控制器增益为 $\mathbf{K}_{\delta 21} = \mathbf{Y}_{11}\mathbf{X}_{11}^{-1}, \mathbf{K}_{\delta 12} = \mathbf{Y}_{22}\mathbf{X}_{22}^{-1}$.

证明 建立 δ 域的李雅普诺夫函数:

$$V(\mathbf{x}(t_k)) = \mathbf{x}^T(t_k)\mathbf{P}\mathbf{x}(t_k). \quad (8)$$

结合引理1、李雅普诺夫函数(8)及表达式(5),可以得到:

$$\begin{aligned} \delta V(\mathbf{x}(t_k)) &= \delta^T(\mathbf{x}(t_k))\mathbf{P}\mathbf{x}(t_k) + \\ &\mathbf{x}^T(t_k)\mathbf{P}\delta(\mathbf{x}(t_k)) + \mathbf{T}\delta^T(\mathbf{x}(t_k))\mathbf{P}\delta(\mathbf{x}(t_k)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^T(t_k)\mathbf{A}_{\delta}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t_k) + \mathbf{x}^T(t_k)\mathbf{P}\mathbf{A}_{\delta}\mathbf{x}(t_k) + \\ &\mathbf{T}\delta^T(\mathbf{x}(t_k))\mathbf{P}\delta(\mathbf{x}(t_k)). \end{aligned} \quad (9)$$

注意到,对于正定实矩阵 $\hat{\mathbf{W}}$ 有:

$$0 = \delta^T(\mathbf{x}(t_k))\hat{\mathbf{W}}(\mathbf{A}_{\delta}(\mathbf{x}(t_k)) - \delta(\mathbf{x}(t_k))). \quad (10)$$

将式(10)代入式(9)中可以得到:

$$\begin{aligned} \delta V(\mathbf{x}(t_k)) &= \mathbf{x}^T(t_k)\mathbf{A}_{\delta}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t_k) + \mathbf{x}^T(t_k)\mathbf{P}\mathbf{A}_{\delta}\mathbf{x}(t_k) + \\ &\mathbf{T}\delta^T(\mathbf{x}(t_k))\mathbf{P}\delta(\mathbf{x}(t_k)) + \delta^T(\mathbf{x}(t_k))\hat{\mathbf{W}}\mathbf{A}_{\delta}\mathbf{x}(t_k) + \\ &\mathbf{x}^T(t_k)\mathbf{A}_{\delta}^T\hat{\mathbf{W}}\delta(\mathbf{x}(t_k)) - 2\delta^T(\mathbf{x}(t_k))\hat{\mathbf{W}}\delta(\mathbf{x}(t_k)) = \\ &\mathbf{x}^T(t_k)(\mathbf{A}_{\delta}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_{\delta})\mathbf{x}(t_k) + \delta^T(\mathbf{x}(t_k))(\mathbf{T}\mathbf{P} - \\ &2\hat{\mathbf{W}})\delta(\mathbf{x}(t_k)) + \delta^T(\mathbf{x}(t_k))\hat{\mathbf{W}}\mathbf{A}_{\delta}\mathbf{x}(t_k) + \\ &\mathbf{x}^T(t_k)\mathbf{A}_{\delta}^T\hat{\mathbf{W}}\delta(\mathbf{x}(t_k)) = \boldsymbol{\xi}^T(t_k)\boldsymbol{\Sigma}_1\boldsymbol{\xi}(t_k), \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $\boldsymbol{\xi}(t_k) = [\delta^T(\mathbf{x}(t_k)) \quad \mathbf{x}^T(t_k)]^T$.

由式(11)可知, $\delta V(\mathbf{x}(t_k)) < 0$ 成立的充分必要条件是

$$\boldsymbol{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{T}\mathbf{P} - 2\hat{\mathbf{W}} & \hat{\mathbf{W}}\mathbf{A}_{\delta} \\ * & \mathbf{A}_{\delta}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_{\delta} \end{bmatrix} < 0. \quad (12)$$

对不等式(12)左右两边同乘以正定矩阵

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix}, \text{可得}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{P}\hat{\mathbf{W}}^{-1} - 2\hat{\mathbf{W}}^{-1} & \mathbf{A}_{\delta}\mathbf{P}^{-1} \\ * & \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_{\delta}^T + \mathbf{A}_{\delta}\mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (13)$$

根据引理2,上述矩阵不等式(13)成立等价于

$$\begin{bmatrix} -2\hat{\mathbf{W}}^{-1} & \mathbf{A}_{\delta}\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{T}\hat{\mathbf{W}}^{-1} \\ * & \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_{\delta}^T + \mathbf{A}_{\delta}\mathbf{P}^{-1} & 0 \\ * & * & -\mathbf{T}\mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

此时再令 $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{X}, \mathbf{W}^{-1} = \hat{\mathbf{W}}$,可以得到:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} -2\mathbf{W} & \mathbf{A}_{\delta}\mathbf{X} & \mathbf{T}\mathbf{W} \\ * & \text{He}(\mathbf{A}_{\delta}\mathbf{X}) & 0 \\ * & * & -\mathbf{T}\mathbf{X} \end{bmatrix} < 0. \quad (14)$$

将式(5)中的矩阵 \mathbf{A}_{δ} 代入式(14),并令 $\mathbf{K}_{\delta 21}\mathbf{X}_{11} = \mathbf{Y}_{11}, \mathbf{K}_{\delta 12}\mathbf{X}_{22} = \mathbf{Y}_{22}$ 得到

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} & \boldsymbol{\Sigma}_{13} \\ * & \boldsymbol{\Sigma}_{22} & 0 \\ * & * & \boldsymbol{\Sigma}_{33} \end{bmatrix} < 0.$$

进一步可知,当上述线性矩阵不等式 $\boldsymbol{\Sigma} < 0$ 时,式(12)也成立.进而

$$\delta V(\mathbf{x}(t_k)) = \frac{V(\mathbf{x}(t_k + T)) - V(\mathbf{x}(t_k))}{T} = \frac{1}{T} [\mathbf{x}^T(t_k + T) \mathbf{P} \mathbf{x}(t_k + T) - \mathbf{x}^T(t_k) \mathbf{P} \mathbf{x}(t_k)] < 0.$$

可知在 $\mathbf{x}(t_k) \neq 0$ 时,下述不等式成立:

$$\mathbf{x}^T(t_k + T) \mathbf{P} \mathbf{x}(t_k + T) - \mathbf{x}^T(t_k) \mathbf{P} \mathbf{x}(t_k) < 0. \quad (15)$$

这就是说李雅普诺夫函数 $\mathbf{x}^T(t_k) \mathbf{P} \mathbf{x}(t_k)$ 在 δ 域中是严格减函数.因此可以得到

$$\mathbf{x}^T(t_k) \mathbf{P} \mathbf{x}(t_k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

又因为矩阵 $\mathbf{P} > 0$ 是一个常数矩阵,有

$$\mathbf{x}(t_k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

由此可知,在线性矩阵不等式 $\Sigma < 0$ 成立的情况下,系统(1)–(2)是协同状态反馈稳定的.定理1得证.

2.2 协同控制器设计的性能优化问题

定理2 如果存在正定矩阵 $\mathbf{X}_{11} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_1}$, $\mathbf{X}_{22} \in \mathbf{R}^{n_2 \times n_2}$, $\mathbf{W}_{11} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_1}$, $\mathbf{W}_{22} \in \mathbf{R}^{n_2 \times n_2}$, $\mathbf{Z}_{11} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_1}$, $\mathbf{Z}_{22} \in \mathbf{R}^{n_2 \times n_2}$ 和矩阵 $\mathbf{X}_{12} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$, $\mathbf{W}_{12} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$, $\mathbf{Z}_{12} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$, $\mathbf{Y}_{11} \in \mathbf{R}^{m_2 \times n_1}$, $\mathbf{Y}_{12} \in \mathbf{R}^{m_2 \times n_2}$, $\mathbf{Y}_{21} \in \mathbf{R}^{m_1 \times n_1}$, $\mathbf{Y}_{22} \in \mathbf{R}^{m_1 \times n_2}$, 使得线性矩阵不等式:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ * & \mathbf{X}_{22} \end{bmatrix} > 0, \\ \mathbf{W} &= \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ * & \mathbf{W}_{22} \end{bmatrix} > 0, \\ \mathbf{Z} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} \\ * & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} > 0, \\ \mathbf{\Pi} &= \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_{11} & \mathbf{\Pi}_{12} & \mathbf{\Pi}_{13} & 0 & 0 \\ * & \mathbf{\Pi}_{22} & 0 & \mathbf{\Pi}_{24} & \mathbf{\Pi}_{25} \\ * & * & \mathbf{\Pi}_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & \mathbf{\Pi}_{44} & 0 \\ * & * & * & * & \mathbf{\Pi}_{55} \end{bmatrix} < 0 \quad (16) \end{aligned}$$

成立,其中

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{11} &= \begin{bmatrix} -2\mathbf{W}_{11} & -2\mathbf{W}_{12} \\ * & -2\mathbf{W}_{22} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{\Pi}_{12} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\delta 1} \mathbf{X}_{11} + \mathbf{B}_{\delta 12} \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{A}_{\delta 1} \mathbf{X}_{12} + \mathbf{B}_{\delta 12} \mathbf{Y}_{22} \\ \mathbf{B}_{\delta 21} \mathbf{Y}_{11} + \mathbf{A}_{\delta 2} \mathbf{X}_{12}^T & \mathbf{B}_{\delta 21} \mathbf{Y}_{12} + \mathbf{A}_{\delta 2} \mathbf{X}_{22} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{\Pi}_{13} &= \begin{bmatrix} \mathbf{T} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{T} \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{T} \mathbf{W}_{12}^T & \mathbf{T} \mathbf{W}_{22} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{\Pi}_{22} &= \mathbf{\Pi}_{12} + \mathbf{\Pi}_{12}^T, \end{aligned}$$

$$\mathbf{\Pi}_{24} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11}^T & \mathbf{X}_{12}^T \\ \mathbf{X}_{12} & \mathbf{X}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Pi}_{25} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11}^T & \mathbf{Y}_{21}^T \\ \mathbf{Y}_{12}^T & \mathbf{Y}_{22}^T \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Pi}_{33} = \begin{bmatrix} -\mathbf{T} \mathbf{X}_{11} & -\mathbf{T} \mathbf{X}_{12} \\ * & -\mathbf{T} \mathbf{X}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Pi}_{44} = \begin{bmatrix} -\mathbf{Z}_{11} & -\mathbf{Z}_{12} \\ * & -\mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Pi}_{55} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_{21}^{-1} & 0 \\ * & -\mathbf{C}_{12}^{-1} \end{bmatrix},$$

则状态反馈控制器 $\mathbf{u}_{12} = \mathbf{K}_{\delta 12} \mathbf{x}_2 = \mathbf{Y}_{22} \mathbf{X}_{22}^{-1} \mathbf{x}_2$ 和 $\mathbf{u}_{21} = \mathbf{K}_{\delta 21} \mathbf{x}_1 = \mathbf{Y}_{11} \mathbf{X}_{11}^{-1} \mathbf{x}_1$ 可以使得系统(1)–(2)协同稳定,且性能指标(6)的上界满足不等式

$$J \leq \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P} \mathbf{x}(t_0). \quad (17)$$

证明 如定理1所示,取 δ 域上的李雅普诺夫函数为

$$V(\mathbf{x}(t_k)) = \mathbf{x}^T(t_k) \mathbf{P} \mathbf{x}(t_k).$$

结合式(9)与式(10),令

$$\delta V(\mathbf{x}(t_k)) < -\mathbf{x}^T(t_k) (\mathbf{Q} + \mathbf{K}_d^T \mathbf{C}_d \mathbf{K}_d) \mathbf{x}(t_k) < 0, \quad (18)$$

即

$$\delta V(\mathbf{x}(t_k)) + \mathbf{x}^T(t_k) (\mathbf{Q} + \mathbf{K}_d^T \mathbf{C}_d \mathbf{K}_d) \mathbf{x}(t_k) = \xi^T(t_k) \mathbf{\Pi}_1 \xi(t_k) < 0, \quad (19)$$

其中, $\xi(t_k) = [\delta^T(\mathbf{x}(t_k)) \quad \mathbf{x}^T(t_k)]^T$, 则(19)成立的充分必要条件是

$$\mathbf{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{T} \mathbf{P} - 2\hat{\mathbf{W}} & \hat{\mathbf{W}} \mathbf{A}_\delta \\ * & \mathbf{A}_\delta^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_\delta + \mathbf{Q} + \mathbf{K}_d^T \mathbf{C}_d \mathbf{K}_d \end{bmatrix} < 0. \quad (20)$$

$$\text{对式(20)两边同乘正定矩阵} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix},$$

可得

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{P} \hat{\mathbf{W}}^{-1} - 2\hat{\mathbf{W}}^{-1} & \mathbf{A}_\delta \mathbf{P}^{-1} \\ * & \mathbf{\Omega} \end{bmatrix} < 0, \quad (21)$$

其中 $\mathbf{\Omega} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_\delta^T + \mathbf{A}_\delta \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{K}_d^T \mathbf{C}_d \mathbf{K}_d \mathbf{P}^{-1}$.

根据引理2,上述矩阵不等式(21)等价于

$$\begin{bmatrix} -2\hat{\mathbf{W}}^{-1} & \mathbf{A}_\delta \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{T} \hat{\mathbf{W}}^{-1} \\ * & \mathbf{\Omega} & 0 \\ * & * & -\mathbf{T} \mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (22)$$

令 $\hat{\mathbf{W}}^{-1} = \mathbf{W}$, $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{X}$, $\mathbf{K}_{\delta 21} \mathbf{X}_{11} = \mathbf{Y}_{11}$, $\mathbf{K}_{\delta 12} \mathbf{X}_{22} = \mathbf{Y}_{22}$, 并再次使用引理2,可以得到

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -2\mathbf{W} & \mathbf{A}_\delta \mathbf{X} & \mathbf{T}\mathbf{W} & 0 & 0 \\ * & \text{He}(\mathbf{A}_\delta \mathbf{X}) & 0 & \mathbf{X}^\text{T} & \mathbf{Y}^\text{T} \\ * & * & -\mathbf{T}\mathbf{X} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & -\mathbf{C}_d^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (23)$$

将矩阵 $\mathbf{A}_\delta = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\delta 1} & \mathbf{B}_{\delta 12} \mathbf{K}_{\delta 12} \\ \mathbf{B}_{\delta 21} \mathbf{K}_{\delta 21} & \mathbf{A}_{\delta 2} \end{bmatrix}$ 代入不等式

(23) 中,得到

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} & 0 & 0 \\ * & \mathbf{H}_{22} & 0 & \mathbf{H}_{24} & \mathbf{H}_{25} \\ * & * & \mathbf{H}_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & \mathbf{H}_{44} & 0 \\ * & * & * & * & \mathbf{H}_{55} \end{bmatrix} < 0.$$

由此可知, $\mathbf{H} < 0$ 当且仅当 $\mathbf{H}_1 < 0$.

进一步,对于任意整数 $k > 0$,对式(18) 两边同时乘采样时间 T ,并从 0 到 kT 进行求和,可以得到

$$T \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}^\text{T}(t_k) (\mathbf{Q} + \mathbf{K}_d^\text{T} \mathbf{C}_d \mathbf{K}_d) \mathbf{x}(t_k) \leq V(\mathbf{x}(t_0)),$$

即

$$J \leq \mathbf{x}^\text{T}(t_0) \mathbf{P} \mathbf{x}(t_0),$$

此时定理 2 得证.

综上所述,定理 1 和定理 2 以线性矩阵不等式形式,分别给出了状态反馈协同控制器的可行性设计方法和状态反馈协同控制器的优化设计方法.

注 2 相比于文献[9] 的方法,本文放宽了等式(10) 中正定矩阵必须与线性矩阵不等式中正定矩阵相同的要求,即,原文中引入

$$0 = \delta^\text{T}(\mathbf{x}(t_k)) \mathbf{P} (\mathbf{A}_\delta(\mathbf{x}(t_k)) - \delta(\mathbf{x}(t_k)))$$

而不是

$$0 = \delta^\text{T}(\mathbf{x}(t_k)) \hat{\mathbf{W}} (\mathbf{A}_\delta(\mathbf{x}(t_k)) - \delta(\mathbf{x}(t_k))).$$

本文中,通过引入辅助变量 $\hat{\mathbf{W}}$,降低了原方法的保守性,得到适用于更一般情况的结果.本文第 3 部分的例子进一步验证了本文方法的有效性与优越性.

进一步,下述定理 3 给出了最优性能 J 的控制设计方法.

定理 3 对于给定的系统(1)—(2) 和性能指标(6),如果以下的优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ \text{s.t.} \quad & (\text{i}) \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ * & \mathbf{X}_{22} \end{bmatrix} > 0, \end{aligned}$$

$$(\text{ii}) \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ * & \mathbf{W}_{22} \end{bmatrix} > 0,$$

$$(\text{iii}) \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} \\ * & \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} > 0,$$

$$(\text{iv}) \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} & 0 & 0 \\ * & \mathbf{H}_{22} & 0 & \mathbf{H}_{24} & \mathbf{H}_{25} \\ * & * & \mathbf{H}_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & \mathbf{H}_{44} & 0 \\ * & * & * & * & \mathbf{H}_{55} \end{bmatrix} < 0,$$

$$(\text{v}) \begin{bmatrix} -\gamma & \mathbf{x}_1^\text{T}(0) & \mathbf{x}_2^\text{T}(0) \\ * & -\mathbf{X}_{11} & -\mathbf{X}_{12} \\ * & * & -\mathbf{X}_{22} \end{bmatrix} < 0$$

有解,则 $\mathbf{u}_{12} = \mathbf{K}_{\delta 12} \mathbf{x}_2 = \mathbf{Y}_{22} \mathbf{X}_{22}^{-1} \mathbf{x}_2$ 与 $\mathbf{u}_{21} = \mathbf{K}_{\delta 21} \mathbf{x}_1 = \mathbf{Y}_{11} \mathbf{X}_{11}^{-1} \mathbf{x}_1$ 是系统(1)—(2) 的协同状态反馈保性能控制器,且性能 $J \leq \mathbf{x}^\text{T}(t_0) \mathbf{P} \mathbf{x}(t_0) < \gamma$.

证明 与定理 2 相比,条件(i)—(iv) 是相同的.由定理 2,令 $J \leq \mathbf{x}^\text{T}(t_0) \mathbf{P} \mathbf{x}(t_0) < \gamma$,应用引理 2,并注意 $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{X}$,易得条件(v). 定理 3 得证.

3 数值仿真

本节将通过 Matlab 软件平台的 Simulink 进行仿真,验证所提定理的有效性.

考虑 Delta 算子描述的独立子系统参数取值如下:

$$\mathbf{A}_{\delta 1} = \begin{bmatrix} -0.005 & 0.0005 \\ 0.0025 & -0.005 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{\delta 2} = \begin{bmatrix} -0.05 & 0 \\ -0.05 & -0.05 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{\delta 12} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.05 \\ 0.01 & 0.07 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{\delta 21} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.05 \\ 0.03 & 0.01 \end{bmatrix}.$$

Delta 算子采样周期 $T = 0.05$,两个子系统的初始状态值取为 $\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_2(0) = [0.5 \quad -0.5]^\text{T}$. 总结本文可行解及优化解两种方法与文献[9] 的可行解及优化解两种方法,如表 1 所示.

通过表 1 比较可以看出,本文的设计方法比文献[9] 中的方法在求解方法上保守性更低.

根据本文定理 1 可得到可行解 $\mathbf{K}_{\delta 12}, \mathbf{K}_{\delta 21}$ 分别为

$$\mathbf{K}_{\delta 12} = \begin{bmatrix} 20.4749 & -3.8668 \\ -4.9382 & 2.1327 \end{bmatrix},$$

表 1 四种控制方法比较

Table 1 Comparison of four control methods

控制方法	有(无)解情况
本文可行解方法	有解
本文优化方法	有解
文献[9]可行解方法	无解
文献[9]优化方法	无解

$$K_{\delta 21} = \begin{bmatrix} 2.2832 & -2.5582 \\ 1.6034 & 4.9814 \end{bmatrix}.$$

根据本文定理 3 可求得优化的性能指标 $J = 5.0007$. 此时可以得到最优解 $K_{\delta 12}, K_{\delta 21}$ 为

$$K_{\delta 12} = \begin{bmatrix} 0.4804 & -0.9694 \\ 1.0131 & 0.5633 \end{bmatrix},$$

$$K_{\delta 21} = \begin{bmatrix} 0.5000 & -0.7475 \\ 0.7475 & 0.5000 \end{bmatrix}.$$

经 Matlab-Simulink 仿真, 两个子系统协同控制下的状态仿真结果分别如图 1 与图 2 所示. 由仿真结果可以看出本文提出的可行性方法以及优化方法均能使得系统状态在很短时间内收敛到 0, 有效实现协同稳定的控制效果.

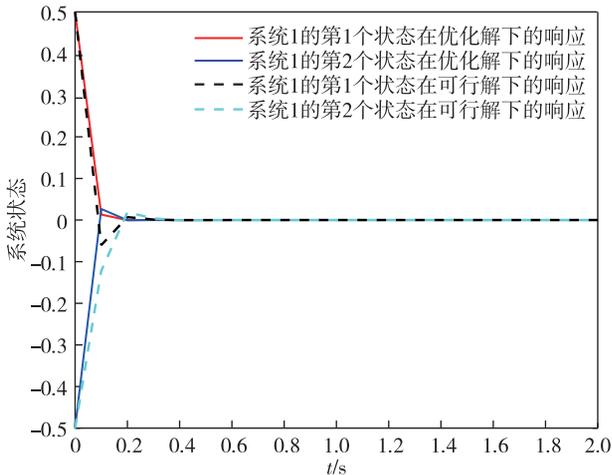


图 1 子系统 1 在协同控制下的状态仿真结果

Fig. 1 State simulation results for the first subsystem under cooperative control

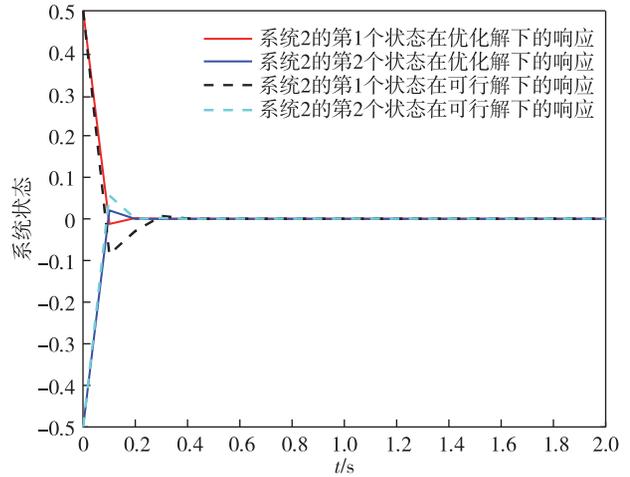


图 2 子系统 2 在协同控制下的状态仿真结果

Fig. 2 States simulation results for the second subsystem under cooperative control

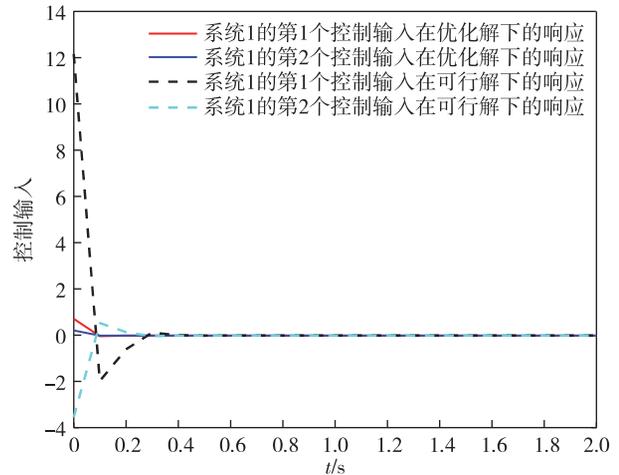


图 3 子系统 1 在协同控制下的控制输入仿真结果

Fig. 3 Control input simulation results for the first subsystem under cooperative control

进一步, 比较两个子系统的状态响应结果图 1—2 与控制输入响应结果图 3—4, 可以看出, 优化算法下的状态会收敛更快且需要耗费的控制输入成本更少.

4 结束语

本文提出的基于 Delta 算子框架的线性大系统协

同稳定的充分条件, 使得含有不稳定子系统的大系统协同稳定的同时放宽了已有研究控制器设计中对正定矩阵的约束条件. 根据李雅普诺夫稳定性理论证明了所提方法的有效性及其优越性. 仿真结果表明, 本文所设计的协同控制器可以确保系统稳定运行.

参考文献

References

[1] 魏晓东. 城市轨道交通两化融合的大系统: 浅论城市轨道交通自动化、信息化技术发展[J]. 自动化博览, 2017, 34(增刊1): 24-27, 32
WEI Xiaodong. Large scale system of urban rail transit integration: development of automation and information technology of urban rail transit [J]. Automation

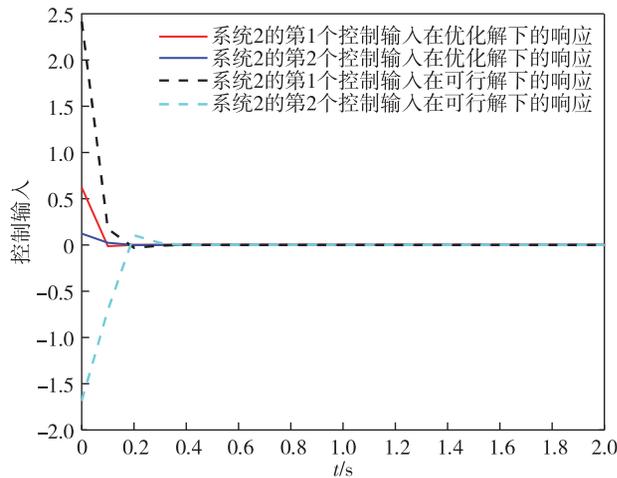


图4 子系统2在协同控制下的控制输入仿真结果

Fig. 4 Control input simulation results for the second subsystem under cooperative control

- Panorama,2017,34(sup1):24-27,32
- [2] 张前进,周林,解宝.针对电网阻抗的大型光伏并网系统稳定性分析与提高策略[J].电力系统自动化,2017,41(21):127-132
ZHANG Qianjin,ZHOU Lin,XIE Bao. Analysis and improvement strategy for stability of large-scale grid-connected photovoltaic system considering grid impedance [J]. Automation of Electric Power Systems, 2017, 41(21):127-132
- [3] 王修岩,张革文,周琛,等.基于大系统理论飞机地面专用空调优化控制[J].系统仿真学报,2019,31(6):1239-1248
WANG Xiuyan,ZHANG Gewen,ZHOU Chen, et al. Airplane pre-conditioning optimizing control based on large-scale system theory [J]. Journal of System Simulation, 2019, 31(6):1239-1248
- [4] Zheng B C, Yang G H. Decentralized sliding mode quantized feedback control for a class of uncertain large-scale systems with dead-zone input [J]. Nonlinear Dynamics, 2013, 71(3):417-427
- [5] 鲍宇.一类经济大系统模型的建立及其 Hopf 分支[J].运筹与模糊学,2019,9(1):28-35
BAO Yu. Modeling a large-scale economic system and Hopf bifurcation [J]. Operations Research and Fuzziology, 2019, 9(1):28-35
- [6] 翁史烈,黄震,于立军,等.长三角现代化能源大系统建设战略研究[J].中国工程学报,2021,23(1):42-51
WENG Shilie,HUANG Zhen,YU Lijun, et al. Building a modern energy system in the Yangtze River Delta [J]. Strategic Study of CAE, 2021, 23(1):42-51
- [7] 秦伟,Contreras S,崔宝同.含未知参数的一维人群动态系统的自适应边界控制[J].控制理论与应用,2020,37(3):603-609
QIN Wei, Contreras S, CUI Baotong. Adaptive boundary control for one-dimensional crowd dynamic systems with unknown parameters [J]. Control Theory and Applications, 2020, 37(3):603-609
- [8] 郭艳艳,熊国江.大规模电力系统经济调度的改进竞争群优化算法[J].电力系统保护与控制,2017,45(15):97-103
GUO Yanyan,XIONG Guojiang. Large scale power system economic dispatch based on an improved competitive swarm optimizer [J]. Power System Protection and Control, 2017, 45(15):97-103
- [9] You X, Li H B, Yang H J, et al. Cooperative control for a class of large-scale linear system via delta operator approach [C] // Hangzhou: International Conference on Control and Automation, 2013. DOI: 10.1109/ICCA.2013.6564955
- [10] 段志生,黄琳,王金枝,等.两个系统间的协调控制问题[J].自动化学报,2003,29(1):14-22
DUAN Zhisheng,HUANG Lin,WANG Jinzhi, et al. Harmonic control between two systems [J]. Acta Automatica Sinica, 2003, 29(1):14-22
- [11] Duan Z S, Wang J Z, Huang L. Special decentralized control problems in discrete-time interconnected systems composed of two subsystems [J]. Systems & Control Letters, 2007, 56(3):206-214
- [12] 孙顺,熊伟,刘瑜,等.基于 TDOA 的多机协同闭环最优控制方法[J].电光与控制,2019,26(3):1-7
SUN Shun,XIONG Wei,LIU Yu, et al. A TDOA based closed-loop optimal control method for multiple UAVs [J]. Electronics Optics & Control, 2019, 26(3):1-7
- [13] 邹杰,董海霞,李超.分布式协同架构下的航空火力控制系统研究[J].电光与控制,2018,25(4):61-64,91
ZOU Jie,DONG Haixia,LI Chao. On airborne fire control system with distributed cooperative architecture [J]. Electronics Optics & Control, 2018, 25(4):61-64,91
- [14] Yang H J, Xia Y Q, Shi P, et al. Analysis and synthesis of delta operator systems [M]. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012
- [15] Geng Q, Yang H J, Xia Y Q, et al. A complete stability analysis for planar delta operator systems subject to state saturation [J]. Asian Journal of Control, 2020, 22(4):1537-1546
- [16] Yang H J, Li P, Xia Y Q, et al. Reduced-order H-infinity filter design for delta operator systems over multiple frequency intervals [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(12):5376-5383
- [17] Zhang D J, Zhang Y S. Fault detection for uncertain delta operator systems with two-channel packet dropouts via a switched systems approach [J]. Journal of Systems Science & Complexity, 2020, 33(5):1446-1468
- [18] Pu X C, Ren L, Liu Y, et al. Group consensus of multi-agent systems with cooperative-competitive interaction and communication delay in switching topologies networks based on the delta operator method [J]. Neurocomputing, 2020, 390(21):57-68
- [19] Liu Y L, Kao Y G, Wang W C, et al. Soft sliding mode controller design for uncertain delta operator system [J]. Neural Computing and Applications, 2016, 27(24):2475-2482
- [20] 俞立.鲁棒控制:线性矩阵不等式处理方法[M].北京:清华大学出版社,2002

Cooperative control for large scale systems based on delta operator framework

XUE Yanmei¹ HAN Jinke¹

¹ School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044

Abstract In this paper, the problem of cooperative state feedback control for a class of large-scale linear systems described by delta operator is studied. First, according to the independent subsystem described by delta operator, an interconnected closed-loop control system is given through cooperative state feedback controller. Then, based on linear matrix inequality, the sufficient conditions for the design of coordinated state feedback stabilizing controller and cooperative state feedback guaranteed cost controller are given, and the validity of the proposed method is proved by Lyapunov stability theory. Finally, simulation examples show the effectiveness and superiority of the proposed algorithm.

Key words delta operator; large-scale system; cooperative control