



有向网络拓扑下非线性多智能体系统的 固定时间包含控制

摘要

针对具有本质非线性动态的多智能体系统,研究固定时间的包含控制问题.假设只有部分跟随智能体能够直接获取领导智能体的状态信息,而且跟随智能体的通信拓扑是有向的,设计分布式的控制协议来解决固定时间的包含控制问题.利用代数图论、矩阵理论和固定时间稳定性理论,得到了系统解决包含控制问题的拓扑条件.最后仿真实例验证了理论的正确性.

关键词

非线性;多智能体系统;固定时间;包含控制;有向拓扑

中图分类号 TP273

文献标志码 A

收稿日期 2021-03-03

资助项目 重庆市基础与前沿研究计划项目
(cstc2020jcyj-msxmX0232)

作者简介

唐朝君,男,博士,副教授,主要从事矩阵理论与多智能体系统协调控制方面的研究.
zhaojuntang@163.com

0 引言

近年来,多智能体系统一致性问题的研究吸引了来自计算机应用、自动控制、数学等领域研究学者的关注^[1-4].其中系统中含有多个领导智能体的跟踪问题也被称为包含控制问题,包含控制在军事和民用领域都有着广泛的应用.在研究多智能体系统的有限时间一致性问题中,文献[5]构建了一个有效的分布式协议框架,在此协议下解决了有限时间的一致性问题,文献[6]通过二重积分器设计了用于实现在干扰下有限时间一致性的分布协议,文献[7]研究了在外部干扰下的非线性多智能体系统,通过利用滑模控制技术解决有限时间一致性的跟踪控制问题.然而上述文献的收敛时间是与初始状态息息相关的,因此,初始状态无法影响收敛时间的研究成为一个重要课题.文献[8]通过研究固定时间稳定性,从而提出了固定时间一致性问题,并且保证了收敛时间是与初始状态没有关系的.对于带有外部干扰的多智能体系统,文献[9]通过设计非线性协议解决了固定时间一致性问题.对于非线性的多智能体系统,并且该通信拓扑是有向的,其固定时间一致性问题在文献[10]中被解决.在多智能体系统包含控制问题中,文献[11]提出了固定无向网络拓扑下的包含控制问题,文献[12]研究了多智能体系统分别在静态和动态领导下的包含控制问题,文献[13]通过齐次控制技术设计了用于实现有限时间包含控制问题的控制协议,文献[14]针对有向切换网络拓扑研究其包含控制问题.但是在已有文献中,对固定时间包含控制的研究结果还比较少.特别是对于有向网络拓扑下固定时间包含控制的研究,相关的研究结果更少.

基于上述原因,本文在文献[10]的基础上,通过设计更加一般的非线性系统和控制协议,研究多个领导的包含控制问题.本文与文献[10]的不同主要体现在两个方面:第一,文献[10]研究的是具有单个领导智能体的领导-跟随一致性问题,本文研究的是具有多个领导智能体的包含控制问题,文献[10]是本文的一个特例;第二,本文将文献[10]中的控制协议进行了推广,更具一般性.本文利用代数图论、矩阵理论和固定时间稳定性理论给出系统解决固定时间包含控制最弱的拓扑条件.

1 重庆理工大学 理学院,重庆,400054

注 1 定义集合 X 的凸包为 $\text{co}(X) = \left\{ \sum_{j=1}^{n-m} t_j x_j \mid x_j \in X, \sum_{j=1}^{n-m} t_j = 1, t_j \in [0, 1] \right\}$. 设 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\|\mathbf{x}\|$ 表示 \mathbf{x} 的 Euclidean 范数. $\lambda_{\min}(\mathbf{A})$ 表示矩阵 \mathbf{A} 的最小特征值. 定义 $x^{[\alpha]} = \text{sign}(x) |x|^\alpha$, 其中 $\alpha > 0$, $x \in \mathbf{R}$, $\text{sign}(\cdot)$ 是符号函数. 如果 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbf{R}^n$, 则 $\mathbf{x}^{[k]} = [x_1^{[k]}, x_2^{[k]}, \dots, x_n^{[k]}]^T, k > 0$. 对于矩阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, 若 $a_{ij} \geq 0$, 则称矩阵 \mathbf{A} 为非负矩阵. 对于非负的方阵 \mathbf{A} , 若每行元素的和均为 1, 则称矩阵 \mathbf{A} 为随机矩阵. 若矩阵 \mathbf{A} 所有特征值具有负的实部, 则称矩阵 \mathbf{A} 稳定.

1 预备知识

1.1 图论

有向图 $G = (V, E)$ 由顶点集 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 和边集 $E \subseteq V \times V$ 组成, 智能体 i 能获取智能体 j 的信息可以用 $(j, i) \in E$ 来表示. 用 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 表示由 n 个顶点构成的有向图的加权邻接矩阵. 如果 $(j, i) \in E, a_{ij} > 0$, 如果 $(j, i) \notin E, a_{ij} = 0$, 其中 a_{ij} 表示权重. 用 $\mathbf{L} = [l_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 表示加权图的 Laplacian 矩阵, 其中 $l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i \neq j, \\ \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}, & i = j. \end{cases}$ 更多图论相关知识可以参考文献[15].

1.2 相关引理

引理 1^[16] 令 $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0, 0 < p < 1 < q$, 则

$$\sum_{k=1}^n x_k^p \geq \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^p, \sum_{k=1}^n x_k^q \geq n^{1-q} \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^q. \quad (1)$$

引理 2^[8] 考虑如下系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (2)$$

其中: $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 表示信息状态; $f: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是连续非线性函数. 假设原点是平衡点, 如果存在一个连续的径向无界函数 $V: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 和一些常数 $a, b > 0, 0 < \mu < 1 < \nu$ 使得:

$$\dot{V}(t) \leq -aV^\mu - bV^\nu, \quad (3)$$

则原点是全局固定时间稳定, 且满足:

$$T(x_0) \leq T_{\max} := \frac{1}{a(1-\mu)} + \frac{1}{b(\nu-1)}. \quad (4)$$

2 模型描述与结果

设所研究的多智能体系统包含 m 个跟随智能体和 $n - m$ 个领导智能体, 分别用 $F = \{1, 2, \dots, m\}$ 和

$S = \{m + 1, m + 2, \dots, n\}$ 表示跟随智能体和领导智能体的集合. 该系统的动力学模型为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= u_i(t) + f(x_i(t), t), i \in F, \\ \dot{x}_i(t) &= f(x_i(t), t), i \in S, \end{aligned} \quad (5)$$

其中: $x_i(t)$ 表示第 i 个智能体在时刻 t 的信息状态; $u_i(t) \in \mathbf{R}$ 是第 i 个跟随智能体的控制输入; $f(x_i(t), t): \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是第 i 个智能体的非线性动态.

定义 1 如果存在控制协议 $u_i, i = 1, \dots, m$, 且对于一个不依赖于初始值的正实数 T 和有界正常数 T_{\max} , 满足 $T < T_{\max}$, 使得:

$$\lim_{t \rightarrow T} \|x_i(t) - \text{co}(X)\| = 0, \forall i \in F, \quad (6)$$

则称该协议解决固定时间包含控制问题.

假设 1 对于每个跟随智能体, 都存在来源于领导智能体的有向路径.

为研究方便, 将 Laplacian 矩阵 \mathbf{L} 写成如下分块矩阵的形式:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

其中 $\mathbf{L}_1 \in \mathbf{R}^{m \times m}, \mathbf{L}_2 \in \mathbf{R}^{m \times (n-m)}$.

引理 3^[17] 在满足假设 1 条件下的矩阵 $-\mathbf{L}_1$ 是稳定且可逆的, 并且矩阵 $-\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2$ 是随机矩阵.

定义 2^[18] 若对于一个非奇异的实方阵 \mathbf{A} , 其非对角线元素是非正的, 并且每个特征值具有正实部, 则称矩阵 \mathbf{A} 是 \mathbf{M} -矩阵.

引理 4^[18] 若 \mathbf{L}_1 是 \mathbf{M} -矩阵, 则存在对角阵 $\mathbf{W} = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_m) > 0$, 使得 $\mathbf{W}\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_1^T\mathbf{W}$ 是正定矩阵.

假设 2 已知 l 为正常数, 对于常数 k_1, k_2, \dots, k_{n-m} , 满足 $\sum_{i=1}^{n-m} k_i = 1$, 且 $k_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n - m$. 非线性函数满足如下条件:

$$\begin{aligned} \left| f(x_i(t), t) - \sum_{i=1}^{n-m} k_i f(y_i(t), t) \right| &\leq \\ l \left| x_i(t) - \sum_{i=1}^{n-m} k_i y_i(t) \right|. \end{aligned} \quad (8)$$

由假设 2 明显看出当 $m = n - 1$ 时, 即系统只有一个领导智能体时, 该条件为 Lipschitz 条件.

考虑如下控制协议:

$$\begin{aligned} u_i(t) &= -\alpha \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)) \right]^{[\mu]} - \\ &\quad \beta \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)) \right]^{[\nu]}, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\beta \geq \alpha > 0, \mu > 1 > \nu > 0$.

令

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_F(t) &= (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))^T, \\ \mathbf{x}_S(t) &= (x_{m+1}(t), x_{m+2}(t), \dots, x_n(t))^T, \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}_F(t)) &= (f(x_1(t), t), \dots, f(x_m(t), t))^T, \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}_S(t)) &= (f(x_{m+1}(t), t), \dots, f(x_n(t), t))^T, \end{aligned}$$

则有:

$$\dot{\mathbf{x}}_F(t) = -\alpha(\mathbf{L}_1\mathbf{x}_F(t) + \mathbf{L}_2\mathbf{x}_S(t))^{[\mu]} - \beta(\mathbf{L}_1\mathbf{x}_F(t) + \mathbf{L}_2\mathbf{x}_S(t))^{[\nu]} + \mathbf{F}(\mathbf{x}_F(t)). \quad (10)$$

令加权跟踪误差 $\boldsymbol{\delta}(t) = \mathbf{L}_1\mathbf{x}_F(t) + \mathbf{L}_2\mathbf{x}_S(t)$, 可以得到:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\delta}}(t) &= \mathbf{L}_1\dot{\mathbf{x}}_F(t) + \mathbf{L}_2\dot{\mathbf{x}}_S(t) = \\ &= \mathbf{L}_1(-\alpha\boldsymbol{\delta}(t)^{[\mu]} - \beta\boldsymbol{\delta}(t)^{[\nu]}) + \\ &+ \mathbf{L}_1\mathbf{F}(\mathbf{x}_F(t)) + \mathbf{L}_2\mathbf{F}(\mathbf{x}_S(t)). \end{aligned} \quad (11)$$

在下文中, 为了表示方便, 在不引起混淆的情况下, 我们有时去掉时间变量 t . 下面给出本文的主要结论.

定理 1 在假设 1 和假设 2 的条件下, 如果控制增益参数 α, β 满足以下条件:

$$\alpha^2\lambda_{\min}(\mathbf{W}\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_1^T\mathbf{W}) > \beta\|\mathbf{L}_1^T\mathbf{W}\|^2 + \beta l^2\|\mathbf{L}_1^{-1}\|^2, \quad (12)$$

则协议(9)解决固定时间包含控制问题.

证明 首先构造如下李雅普诺夫函数:

$$V(t) = \frac{\alpha}{\mu+1} \sum_{i=1}^m w_i |\delta_i|^{2\mu+1} + \frac{\beta}{\nu+1} \sum_{i=1}^m w_i |\delta_i|^{2\nu+1}, \quad (13)$$

其中 $\mathbf{W} = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_m)$ 是引理 4 中定义的对角阵.

对其求导得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \alpha \sum_{i=1}^m w_i \delta_i^{2\mu} \dot{\delta}_i + \beta \sum_{i=1}^m w_i \delta_i^{2\nu} \dot{\delta}_i = \\ &= (\alpha\boldsymbol{\delta}^{[\mu]})^T \mathbf{W}\dot{\boldsymbol{\delta}} + (\beta\boldsymbol{\delta}^{[\nu]})^T \mathbf{W}\dot{\boldsymbol{\delta}} = (\alpha\boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \beta\boldsymbol{\delta}^{[\nu]})^T \mathbf{W}\dot{\boldsymbol{\delta}} = \\ &= -(\alpha\boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \beta\boldsymbol{\delta}^{[\nu]})^T \mathbf{W}\mathbf{L}_1(\alpha\boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \beta\boldsymbol{\delta}^{[\nu]}) + \\ &+ (\alpha\boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \beta\boldsymbol{\delta}^{[\nu]})^T \mathbf{W}\mathbf{L}_1[\mathbf{F}(\mathbf{x}_F) + \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2\mathbf{F}(\mathbf{x}_S)] = \\ &= -\frac{1}{2}(\alpha\boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \beta\boldsymbol{\delta}^{[\nu]})^T (\mathbf{W}\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_1^T\mathbf{W})(\alpha\boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \beta\boldsymbol{\delta}^{[\nu]}) + \\ &+ (\alpha\boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \beta\boldsymbol{\delta}^{[\nu]})^T \mathbf{W}\mathbf{L}_1[\mathbf{F}(\mathbf{x}_F) + \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2\mathbf{F}(\mathbf{x}_S)] \leq \\ &= -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(\mathbf{W}\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_1^T\mathbf{W})\alpha^2\|\boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \frac{\beta}{\alpha}\boldsymbol{\delta}^{[\nu]}\|^2 + \\ &+ \beta\left(\frac{\alpha}{\beta}\boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \boldsymbol{\delta}^{[\nu]}\right)^T \mathbf{W}\mathbf{L}_1[\mathbf{F}(\mathbf{x}_F) + \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2\mathbf{F}(\mathbf{x}_S)]. \end{aligned} \quad (14)$$

又由于 $\beta \geq \alpha > 0$, 所以

$$\begin{aligned} \left\| \boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \frac{\beta}{\alpha}\boldsymbol{\delta}^{[\nu]} \right\|^2 &= \\ \sum_{i=1}^m \left[|\delta_i|^{2\mu} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} |\delta_i|^{2\nu} + \frac{2\beta}{\alpha} |\delta_i|^{\mu+\nu} \right] &\geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m [|\delta_i|^{2\mu} + |\delta_i|^{2\nu} + 2|\delta_i|^{\mu+\nu}] &= \\ \|\boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \boldsymbol{\delta}^{[\nu]}\|^2. \end{aligned} \quad (15)$$

由引理 3 可知 $-\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2$ 是随机矩阵. 所以令

$$\mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2 = -(k_{ij})_{m \times (n-m)}, \text{ 其中 } k_{ij} \geq 0, \text{ 且 } \sum_{j=1}^{n-m} k_{ij} = 1, \text{ 则有}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}_F) + \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2\mathbf{F}(\mathbf{x}_S) &= \\ \begin{pmatrix} f(x_1, t) - \sum_{j=1}^{n-m} k_{1j}f(x_{m+j}) \\ \vdots \\ f(x_m, t) - \sum_{j=1}^{n-m} k_{mj}f(x_{m+j}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

再由假设 2 可以得到:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(\mathbf{x}_F) + \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2\mathbf{F}(\mathbf{x}_S)\|^2 &\leq \\ l^2\|\mathbf{x}_F + \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2\mathbf{x}_S\|^2 &= \\ l^2\|\mathbf{L}_1^{-1}\boldsymbol{\delta}\|^2 &\leq l^2\|\mathbf{L}_1^{-1}\|^2\|\boldsymbol{\delta}\|^2. \end{aligned} \quad (17)$$

又由于 $\|\boldsymbol{\delta}\|^2 \leq \|\boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \boldsymbol{\delta}^{[\nu]}\|^2$, 所以再由不等式

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} \leq \frac{1}{2}[\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2] \text{ 可以得到:}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(\mathbf{W}\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_1^T\mathbf{W})\alpha^2\|\boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \boldsymbol{\delta}^{[\nu]}\|^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\beta\left\| \mathbf{L}_1^T\mathbf{W}\left(\frac{\alpha}{\beta}\boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \boldsymbol{\delta}^{[\nu]}\right) \right\|^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\beta l^2\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_F) + \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2\mathbf{F}(\mathbf{x}_S)\|^2 \leq \\ &= -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(\mathbf{W}\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_1^T\mathbf{W})\alpha^2\|\boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \boldsymbol{\delta}^{[\nu]}\|^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\beta\|\mathbf{L}_1^T\mathbf{W}\|^2\left\| \frac{\alpha}{\beta}\boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \boldsymbol{\delta}^{[\nu]} \right\|^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\beta l^2\|\mathbf{L}_1^{-1}\|^2\|\boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \boldsymbol{\delta}^{[\nu]}\|^2. \end{aligned} \quad (18)$$

又根据 $\beta \geq \alpha > 0$, 所以

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\alpha}{\beta}\boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \boldsymbol{\delta}^{[\nu]} \right\|^2 &= \\ \sum_{i=1}^m \left[|\delta_i|^{2\nu} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} |\delta_i|^{2\mu} + \frac{2\alpha}{\beta} |\delta_i|^{\mu+\nu} \right] &\leq \\ \sum_{i=1}^m [|\delta_i|^{2\mu} + |\delta_i|^{2\nu} + 2|\delta_i|^{\mu+\nu}] &= \\ \|\boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \boldsymbol{\delta}^{[\nu]}\|^2. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{令 } \gamma = \frac{1}{2}\alpha^2\lambda_{\min}(\mathbf{W}\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_1^T\mathbf{W}) - \frac{1}{2}\beta\|\mathbf{L}_1^T\mathbf{W}\|^2 -$$

$\frac{1}{2}\beta l^2\|\mathbf{L}_1^{-1}\|^2$, 由(12)可知 $\gamma > 0$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\frac{1}{2}(\alpha^2 \lambda_{\min}(\mathbf{W}\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_1^T \mathbf{W})) \|\boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \boldsymbol{\delta}^{[\nu]}\|^2 - \\ & (\beta \|\mathbf{L}_1^T \mathbf{W}\|^2 + \beta l^2 \|\mathbf{L}_1^{-1}\|^2) \|\boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \boldsymbol{\delta}^{[\nu]}\|^2 = \\ & -\gamma \|\boldsymbol{\delta}^{[\mu]} + \boldsymbol{\delta}^{[\nu]}\|^2. \end{aligned} \quad (20)$$

又由于

$$\begin{aligned} V = & \frac{\alpha}{\mu+1} \sum_{i=1}^m w_i |\delta_i|^{\mu+1} + \frac{\beta}{\nu+1} \sum_{i=1}^m w_i |\delta_i|^{\nu+1} \leq \\ & \frac{\beta w_{\max}}{\nu+1} \left(\sum_{i=1}^m |\delta_i|^{\mu+1} + \sum_{i=1}^m |\delta_i|^{\nu+1} \right), \end{aligned} \quad (21)$$

其中 $w_{\max} = \max\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, 由于 $0 < \frac{\mu+\nu}{\mu+1} < 1$, 所以由引理 1 可知:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^m |\delta_i|^{\mu+1} + \sum_{i=1}^m |\delta_i|^{\nu+1} \right)^{\frac{\mu+\nu}{\mu+1}} \leq \\ \sum_{i=1}^m (|\delta_i|^{\mu+\nu} + |\delta_i|^{\frac{\nu+1}{\mu+1}(\mu+\nu)}). \end{aligned} \quad (22)$$

又由于 $|\delta_i|^{\frac{\nu+1}{\mu+1}(\mu+\nu)} \leq |\delta_i|^{2\mu} + |\delta_i|^{2\nu}$, 则有

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^m |\delta_i|^{\mu+1} + \sum_{i=1}^m |\delta_i|^{\nu+1} \right)^{\frac{\mu+\nu}{\mu+1}} \leq \\ \sum_{i=1}^m (2|\delta_i|^{\mu+\nu} + |\delta_i|^{2\mu} + |\delta_i|^{2\nu}). \end{aligned} \quad (23)$$

即

$$\begin{aligned} \left[\frac{\nu+1}{\beta w_{\max}} V \right]^{\frac{\mu+\nu}{\mu+1}} \leq \left(\sum_{i=1}^m |\delta_i|^{\mu+1} + \sum_{i=1}^m |\delta_i|^{\nu+1} \right)^{\frac{\mu+\nu}{\mu+1}} \leq \\ \sum_{i=1}^m (2|\delta_i|^{\mu+\nu} + |\delta_i|^{2\mu} + |\delta_i|^{2\nu}). \end{aligned} \quad (24)$$

又由 $\frac{2\mu}{\mu+1} > 1$ 可知:

$$\begin{aligned} (2m)^{1-\frac{2\mu}{\mu+1}} \left(\sum_{i=1}^m |\delta_i|^{\mu+1} + \sum_{i=1}^m |\delta_i|^{\nu+1} \right)^{\frac{2\mu}{\mu+1}} \leq \\ \sum_{i=1}^m (2|\delta_i|^{2\mu} + |\delta_i|^{\frac{\nu+1}{\mu+1}2\mu}). \end{aligned} \quad (25)$$

又由于 $2\nu < \frac{\nu+1}{\mu+1}2\mu < \mu+\nu$, 则 $|\delta_i|^{\frac{\nu+1}{\mu+1}2\mu} \leq$

$\sum_{i=1}^m (|\delta_i|^{\mu+\nu} + |\delta_i|^{2\nu})$, 则有

$$\begin{aligned} (2m)^{1-\frac{2\mu}{\mu+1}} \left(\sum_{i=1}^m |\delta_i|^{\mu+1} + \sum_{i=1}^m |\delta_i|^{\nu+1} \right)^{\frac{2\mu}{\mu+1}} \leq \\ \sum_{i=1}^m (2|\delta_i|^{\mu+\nu} + |\delta_i|^{2\mu} + |\delta_i|^{2\nu}). \end{aligned} \quad (26)$$

即

$$\begin{aligned} (2m)^{\frac{1-\mu}{\mu+1}} \left[\frac{\nu+1}{\beta w_{\max}} V \right]^{\frac{2\mu}{\mu+1}} \leq \\ (2m)^{\frac{1-\mu}{\mu+1}} \left(\sum_{i=1}^m |\delta_i|^{\mu+1} + \sum_{i=1}^m |\delta_i|^{\nu+1} \right)^{\frac{2\mu}{\mu+1}} \leq \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^m (2|\delta_i|^{\mu+\nu} + |\delta_i|^{2\mu} + |\delta_i|^{2\nu}). \quad (27)$$

最后结合不等式(20)、(24)和(27),可以得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\gamma \sum_{i=1}^m [|\delta_i|^{2\mu} + |\delta_i|^{2\nu} + 2|\delta_i|^{\mu+\nu}] \leq \\ & -\frac{\gamma}{2} \left[\frac{\nu+1}{\beta w_{\max}} V \right]^{\frac{\mu+\nu}{\mu+1}} - \frac{\gamma}{2} (2m)^{\frac{1-\mu}{\mu+1}} \left[\frac{\nu+1}{\beta w_{\max}} V \right]^{\frac{2\mu}{\mu+1}} = \\ & -\frac{\gamma}{2} \left(\frac{\nu+1}{\beta w_{\max}} \right)^{\frac{\mu+\nu}{\mu+1}} (V)^{\frac{\mu+\nu}{\mu+1}} - \\ & \frac{\gamma}{2} (2m)^{\frac{1-\mu}{\mu+1}} \left(\frac{\nu+1}{\beta w_{\max}} \right)^{\frac{2\mu}{\mu+1}} (V)^{\frac{2\mu}{\mu+1}}. \end{aligned} \quad (28)$$

根据引理 2 得到: $V(t) = 0$, 即可推出 $\boldsymbol{\delta}$ 在固定时间 T_0 达到 0, 也就是说 $\mathbf{x}_F(t) = -\mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2 \mathbf{x}_S(t)$, $\forall t \geq T_0$, 其中

$$\begin{aligned} T_0 \leq & 2 \frac{(\mu+1)(\beta w_{\max})^{\frac{\mu+\nu}{\mu+1}}}{\gamma(\nu+1)^{\frac{\mu+\nu}{\mu+1}}(1-\nu)} + \\ & 2 \frac{(\mu+1)(\beta w_{\max})^{\frac{\mu+\nu}{\mu+1}}}{\gamma(2m)^{\frac{1-\mu}{\mu+1}}(\nu+1)^{\frac{2\mu}{\mu+1}}(\mu-1)}. \end{aligned} \quad (29)$$

注意到 $-\mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2$ 是随机矩阵, 即 $-\mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2 \mathbf{x}_S(t) \in \text{co}(\mathbf{x}_S)$, 因此协议(9) 解决固定时间包含控制问题.

3 数值仿真

多智能体系统的通信拓扑如图 1 所示, 分别由 2 个领导智能体(用顶点 5、6 表示)和 4 个跟随智能体(用顶点 1、2、3、4 表示)组成. 设智能体的非线性动态为 $f(x_i, t) = x_i \sin t$. 当 $l = 1$ 时, 满足条件假设 2. 经过计算, 取对角矩阵 $\mathbf{W} = \text{diag}(2, 0.8, 1, 0.5)$, 选择参数 $\mu = 1.5, \nu = 0.5, \alpha = 30, \beta = 35$, 取跟随智能体的初始状态 $\mathbf{x}_F(0) = (5, -2, 3, -7)^T$, 领导智能体的初始状态 $\mathbf{x}_S(0) = (4, -9)^T$, 可以得到初始加权跟踪误差的状态 $\boldsymbol{\delta}(0) = (1, -12, 12, 2)^T$, 加权跟踪误差的状态随时间的变化曲线如图 2 所示. 从图 2 可以看出, 加权跟踪误差大约在 0.01 s 内收敛到 0, 比 $T_{\max} = 0.89$ s 要小得多, 这意味着系统能在固定时间内解

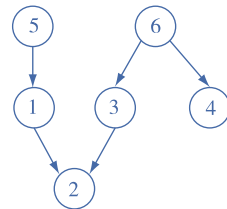


图 1 系统的通信拓扑

Fig. 1 System communication topology

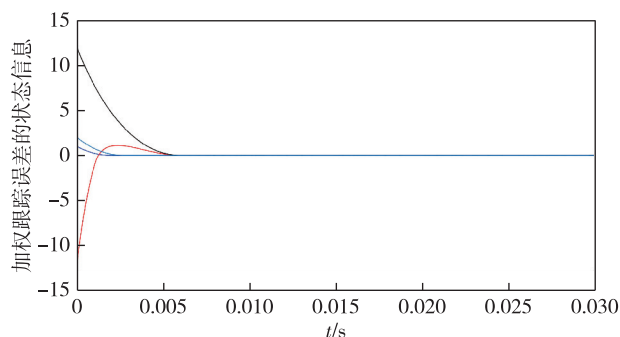


图2 加权跟踪误差的状态随时间的变化曲线

Fig.2 State curve of the weighted tracking error over time

决包含控制问题,验证了理论结果的正确性.

4 结论

本文研究了非线性多智能体系统在有向网络拓扑下的固定时间包含控制问题.假设所有智能体之间的通信拓扑是有向的,而且每个跟随智能体都至少有一个领导智能体能够直接或间接地与其通信,在这最弱拓扑条件下,所给出的控制协议能够解决固定时间的包含控制问题.仿真实例验证了所提理论结果的正确性.

参考文献

References

- [1] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9):1520-1533
- [2] 唐朝君. 基于自适应控制的非线性多智能体系统一致性[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2019, 33(11):137-142
TANG Zhaojun. Adaptive consensus for nonlinear multi-agent systems [J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science), 2019, 33(11):137-142
- [3] 陈军统, 徐振华, 项秉铜, 等. 具有控制器增益随机不确定性的多智能体一致性控制[J]. 南京信息工程大学学报(自然科学版), 2018, 10(2):173-177
CHEN Juntong, XU Zhenhua, XIANG Bingtong, et al. Leader-follower consensus of multi-agent systems with stochastic uncertainty of controller gain [J]. Journal of Nanjing University of Information Science & Technology (Natural Science Edition), 2018, 10(2):173-177
- [4] 邵劭, 胡元发, 刘小洋, 等. 多智能体系统的有限时间与固定时间一致性[J]. 南京信息工程大学学报(自然科学版), 2019, 11(4):409-413
SHAO Shao, HU Yuanfa, LIU Xiaoyang, et al. Finite-time/fixed-time consensus of multi-agent systems [J]. Journal of Nanjing University of Information Science & Technology (Natural Science Edition), 2019, 11(4):409-413
- [5] Wang L, Xiao F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(4):950-955
- [6] Li S H, Du H B, Lin X Z. Finite-time consensus algorithm for multi-agent systems with double-integrator dynamics [J]. Automatica, 2011, 47(8):1706-1712
- [7] Zhang Y J, Yang Y, Zhao Y, et al. Distributed finite-time tracking control for nonlinear multi-agent systems subject to external disturbances [J]. International Journal of Control, 2013, 86(1):29-40
- [8] Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(8):2106-2110
- [9] Hong H F, Yu W W, Wen G H, et al. Distributed robust fixed-time consensus for nonlinear and disturbed multiagent systems [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2017, 47(7):1464-1473
- [10] Wang H, Yu W W, Wen G H, et al. Fixed-time consensus of nonlinear multi-agent systems with general directed topologies [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2019, 66(9):1587-1591
- [11] Ji M, Ferrari-Trecate G, Egerstedt M, et al. Containment control in mobile networks [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(8):1972-1975
- [12] Cao Y C, Stuart D, Ren W, et al. Distributed containment control for multiple autonomous vehicles with double-integrator dynamics: algorithms and experiments [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2011, 19(4):929-938
- [13] Wang X Y, Li S H, Shi P. Distributed finite-time containment control for double-integrator multiagent systems [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2014, 44(9):1518-1528
- [14] 贺清碧, 唐朝君, 黄大荣, 等. 有向切换网络拓扑下非线性多智能体系统的包含控制 [J]. 科学技术与工程, 2017, 17(16):254-258
HE Qingbi, TANG Zhaojun, HUANG Darong, et al. Containment control of nonlinear multi-agent systems with directed switching topologies [J]. Science Technology and Engineering, 2017, 17(16):254-258
- [15] Godsil C, Royle G. Algebraic graph theory [M]. New York, NY: Springer New York, 2001
- [16] Goldberg M. Equivalence constants for l_p norms of matrices [J]. Linear and Multilinear Algebra, 1987, 21(2):173-179
- [17] Meng Z Y, Ren W, You Z. Distributed finite-time attitude containment control for multiple rigid bodies [J]. Automatica, 2010, 46(12):2092-2099
- [18] Wen G H, Hu G Q, Yu W W, et al. Consensus tracking for higher-order multi-agent systems with switching directed topologies and occasionally missing control inputs [J]. Systems & Control Letters, 2013, 62(12):1151-1158

Fixed-time containment control for nonlinear multi-agent systems under directed network topology

TANG Zhaojun¹ YU Zhan¹ WEI Zhengyuan¹

¹ College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054

Abstract The fixed-time containment control is investigated for multi-agent systems with inherent nonlinear dynamics. Assuming that not all followers can directly receive information from the leaders and the communication topology between the followers is directed, a distributed control law is designed to solve the fixed-time containment control problem. By using algebraic graph theory, matrix theory and fixed-time stability theory, the conditions on the communication topology are derived for realization of fixed-time containment control. Finally, a simulation example is given to verify the correctness of the theory.

Key words nonlinear; multi-agent system; fixed-time; containment control; directed topology