DOI:10.13878/j.cnki.jnuist.2021.05.007

杨子晗[1]　邢双云[1]　曹康敏[1]

时变时滞随机广义 Markov 跳变系统的事件触发控制

摘要

本文研究了在静态事件触发条件下的时变时滞随机广义 Markov 跳变系统的镇定性问题.通过构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函,利用 Jensen 不等式以及自由权矩阵技术,提出了系统在静态事件触发条件下的随机容许性条件;在此基础上,设计状态反馈控制器使得相应的闭环系统满足正则、无脉冲且均方意义下随机容许.最后,通过数值算例验证了本文所提方法的正确性和有效性.

关键词

Markov 跳变系统;随机广义系统;事件触发机制;Lyapunov-Krasovskii 泛函;自由权矩阵

中图分类号 O231.3;TP13

文献标志码 A

收稿日期 2021-09-08

资助项目 国家自然科学基金(61803275);辽宁省“兴辽英才计划”项目(XLYC1907044);辽宁省自然科学基金(2020-MS-218)

作者简介

杨子晗,女,硕士生,研究方向为事件触发、Markov 跳变系统等.y15041402152@163.com

邢双云(通信作者),女,博士,教授,研究方向为随机控制、采样控制、智能优化控制、随机奇异系统理论等.xsy_angel25@163.com

1 沈阳建筑大学 理学院,沈阳,110168

0　引言

广义系统,又称为奇异系统、隐式系统等,能够客观地表示系统的诸多性能,如今已经广泛应用在物理和工程系统之中,例如:化工控制系统、神经网络系统等[1-4].众所周知,时滞现象的发生往往会造成系统的不稳定或振荡,进而增加系统稳定性分析的难度,因此,越来越多的学者致力于研究时滞广义系统的稳定性与相关控制问题.文献[5]研究了状态时滞不确定的连续广义系统的鲁棒稳定与镇定问题;文献[6]研究了带有时变时滞广义系统的随机容许性问题;文献[7]研究了具有时变时滞的随机广义系统的 H_∞ 控制问题.除此之外,实际系统还可能遭受内部结构的突变或者外界环境的变化[8].因而,关于具有 Markov 跳变参数的广义系统的研究逐渐引起了众多学者的关注,并取得了许多丰富的研究成果.文献[9]针对广义 Markov 跳变系统的随机镇定问题,提出了一种新的控制器保证系统的镇定性;文献[10]研究了广义 Markov 跳变时滞系统的稳定性分析与镇定问题,运用 LMI 技术给出状态反馈控制器存在的充分条件,保证控制器的正则性、无脉冲性和随机稳定性;文献[11]采用记忆状态反馈控制器处理了具有时滞和输入饱和的广义 Markov 跳变系统的时滞相关 H_∞ 鲁棒指数稳定性和记忆状态反馈镇定问题;文献[12]在已知或部分已知转移概率的情况下讨论了时变时滞离散广义 Markov 跳变系统的随机稳定和镇定问题.通常,在实际系统中,转移概率一般不可能以已知的情况出现.因此,文献[13]采用时滞划分技术,对具有时变时滞和时变转移概率的离散广义 Markov 跳变系统进行随机稳定性分析;文献[14]研究了一类具有时变时滞的离散广义 Markov 跳变系统的滤波器问题,并给出期望滤波器的显式表达式;文献[15]针对时变时滞多面体不确定离散广义 Markov 跳变系统,利用 Lyapunov 泛函理论和凸多面体技术,给出了广义模型误差增广系统随机可容许的条件.

为了更加有效地节省计算和通信资源,对于系统的事件触发控制研究也愈来愈多.在含有事件触发机制的系统中,控制任务不是周期性地执行,而是在满足某些触发条件时才能执行[16].另一方面,带有事件触发机制的系统能够更好地避免在有限时间内满足无限次的触发条件致使无限次执行,即 Zeno 现象.文献[17]针对具有随机扰动和状态时滞的随机广义系统的事件触发控制问题,得到了均方意义下随机可容许的充分条件;文献[18]针对具有冗余信道的广义 Markov

跳变系统的异步 H_∞ 滤波问题,采用事件触发机制和冗余信道方法,提出了相应滤波误差系统满足正则、无脉冲、随机稳定并且具有一定 H_∞ 性能的判定定理,有效地节省了带宽有限的网络资源.

本文主要研究时变时滞随机广义 Markov 跳变系统在静态事件触发机制下的状态反馈控制器设计问题,通过构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函,利用 Jensen 不等式以及自由权矩阵技术,设计状态反馈控制器并对本文所研究的系统进行了镇定性分析,最后给出一个数值仿真算例验证了本文所提方法的有效性.

1 预备知识和问题描述

给定概率空间 $(\Omega,\boldsymbol{F},\boldsymbol{P})$ 上的时变时滞随机广义 Markov 跳变系统:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)&=[\boldsymbol{A}(r_t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_d(r_t)\boldsymbol{x}(t-\tau(t))+\\&\quad\boldsymbol{B}(r_t)\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t+\boldsymbol{J}(r_t)\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(t),\\\boldsymbol{y}(t)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t),t\in[-\tau,0],\end{aligned}\tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 为状态向量,$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^m$ 为控制输入,$\boldsymbol{y}(t)\in\mathbf{R}^p$ 为系统输出.$\boldsymbol{\omega}(t)$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\boldsymbol{F},\{\boldsymbol{F}_t\}_{t\geqslant0},\boldsymbol{P})$ 上的满足 $\varepsilon\{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(t)\}=0$, $\varepsilon\{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(t)^2\}=\mathrm{d}t$ 条件的标准一维布朗运动,且 Ω 为样本空间,$\boldsymbol{F}_t$ 是随机变量 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 在时间 t 之前产生的 σ- 事件域,$\boldsymbol{P}$ 是定义在事件域 $\boldsymbol{F}$ 上的概率测度.$\tau(t)$ 是满足条件 $0\leqslant\tau(t)\leqslant\tau,\dot{\tau}(t)\leqslant\tau_0<1,t\geqslant0$ 的时变时滞.矩阵 $\boldsymbol{E}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是一个奇异矩阵,且满足 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{E})=r\leqslant n,\boldsymbol{A}(r_t),\boldsymbol{A}_d(r_t),\boldsymbol{B}(r_t),\boldsymbol{J}(r_t)$ 是已知的具有适当维数的常数实矩阵.$\{r_t\}$ 是取值于有限集合 $S=\{1,2,\cdots,N\}$ 上右连续的 Markov 过程,其状态转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}\{r_{t+\Delta}=j\mid r_t=i\}=\begin{cases}\boldsymbol{\pi}_{ij}\Delta+o(\Delta), & i\neq j,\\1+\boldsymbol{\pi}_{ii}\Delta+o(\Delta), & i=j,\end{cases}$$

其中,$\Delta>0,\lim\limits_{\Delta\to0}\dfrac{o(\Delta)}{\Delta}=0,\boldsymbol{\pi}_{ij}\geqslant0$,当 $j\neq i$ 时,从 t 时刻的模态 i 到 $t+\Delta$ 时刻的模态 j 的状态转移概率矩阵为 $\boldsymbol{\pi}_{ii}=-\sum\limits_{j=1,i\neq j}^{N}\boldsymbol{\pi}_{ij}$.为便于书写,令 $r_t=i\in\mathbf{N}$,则矩阵 $\boldsymbol{A}(r_t)$ 表示成 $\boldsymbol{A}_i$,矩阵 $\boldsymbol{A}_d(r_t)$ 表示成 $\boldsymbol{A}_{di}$,依此类推.则系统(1) 可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)&=[\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_{di}\boldsymbol{x}(t-\tau(t))+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t+\\&\quad\boldsymbol{J}_i x(t)\mathrm{d}\omega(t),\\\boldsymbol{y}(t)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t),\quad t\in[-\tau,0].\end{aligned}\tag{2}$$

取采样误差:

$$\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{x}(t_k)-\boldsymbol{x}(t),\quad t\in[t_k,t_{k+1}),\tag{3}$$

静态事件触发机制定义为

$$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{e}(t)<\sigma^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}_2\boldsymbol{x}(t),$$

其中,σ 为正常数,$\boldsymbol{\Phi}_1$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_2$ 分别为不同的自由权矩阵.设计如下状态反馈控制器:

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t_k),\quad t_k\leqslant t<t_{k+1},\tag{4}$$

其中,$\boldsymbol{K}$ 为状态反馈增益矩阵.将式(3)、(4) 代入式(2),可推出如下闭环系统:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)&=[(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_{ki})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_{di}\boldsymbol{x}(t-\tau(t))+\\&\quad\boldsymbol{A}_{ki}\boldsymbol{e}(t)]\mathrm{d}t+\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(t),\\\boldsymbol{y}(t)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t),\quad t\in[-\tau,0],\end{aligned}\tag{5}$$

其中,$\boldsymbol{A}_{ki}=\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}$.

为证明系统(5)在均方意义下随机容许性,给出相关定义、假设和引理.

定义 1[4]

(a) 如果 $\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 不为零,则系统(5) 是正则的,其中,$s\in\mathbf{C}$;

(b) 如果 $\deg(\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}))=\mathrm{rank}(\boldsymbol{E})$,则系统(5) 是无脉冲的;

(c) 对于任意 $\epsilon>0$,当 $\sup\limits_{-\bar{d}\leqslant\bar{s}\leqslant0}\varepsilon\|\boldsymbol{x}(\bar{s})\|^2<\delta(\epsilon)$ 时,存在一个 $\delta(\epsilon)>0,t>0$,使 $\varepsilon\|\boldsymbol{x}(t)\|^2<\epsilon$,则系统(5) 在均方意义下是随机稳定的.

定义 2[4] 如果系统(5) 是正则、无脉冲且均方意义下随机稳定的,则称系统(5) 在均方意义下随机容许.

假设 1 假设矩阵对 $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$ 正则且 $\mathrm{rank}([\boldsymbol{E}\quad\boldsymbol{J}])=\mathrm{rank}(\boldsymbol{E})$.

注 1 在上述假设下,扩散项不影响系统结构.需要注意的是,如果矩阵对$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$ 满足正则、无脉冲的性质,它就可以保证系统(5) 无脉冲解的存在唯一性.

假设 2 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}_i$ 和 $\boldsymbol{V}$ 满足下式:

$$\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{A}_{di}\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{A}}_{i1} & \widehat{\boldsymbol{A}}_{i2}\\\widehat{\boldsymbol{A}}_{i3} & \widehat{\boldsymbol{A}}_{i4}\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{A}_{ki}\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{A}}_{i1} & \hat{\boldsymbol{A}}_{i2}\\\hat{\boldsymbol{A}}_{i3} & \hat{\boldsymbol{A}}_{i4}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{U}_i^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_{i1} & \boldsymbol{P}_{i2}\\\boldsymbol{P}_{i3} & \boldsymbol{P}_{i4}\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{S}_{11}\\\boldsymbol{S}_{21}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{U}_i^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0\\\boldsymbol{k}\end{pmatrix},$$

其中,$\boldsymbol{k}\in\mathbf{R}^{(n-r)\times(n-r)}$.

引理 1(Jensen 不等式)[7]　对于一个给定的正定对称矩阵 $\boldsymbol{Z} \in \mathbf{R}^{n\times n}$,标量 $0 < a < b$,向量函数 $\boldsymbol{x}(t)$ 满足如下关系:

$$\int_a^b \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t\boldsymbol{Z}\int_a^b \boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t.$$

引理 2[16]　对于线性随机广义系统:

$$\boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{J}\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(t),$$

令 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t)$ 时,其中 $\boldsymbol{X}$ 是可逆矩阵,对 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t))$ 求随机导数:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t)) = \mathcal{L}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t))\mathrm{d}t + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(t),$$

其中,

$$\mathcal{L}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}^{+})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{+}\boldsymbol{J})\boldsymbol{x}(t). \tag{6}$$

作如下辅助向量函数 $\boldsymbol{\eta}(t)$:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = (\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{A}_{ki})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}_{di}\boldsymbol{x}(t-\tau(t)) + \boldsymbol{A}_{ki}\boldsymbol{e}(t). \tag{7}$$

将式(7)代入式(5)可得:

$$\boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\eta}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{J}\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(t). \tag{8}$$

对式(8)的左右两端在 $[t-\tau(t),t]$ 内进行积分,可得:

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t-\tau(t)) = \int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{\eta}(s)\mathrm{d}s + \int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(s). \tag{9}$$

2　主要内容

本节通过构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函,利用 Jensen 不等式以及自由权矩阵技术,给出系统(5)在均方意义下的随机容许条件,进而,设计出相应的状态反馈控制器.

定理 1　给定参数 τ,$0 \leqslant \sigma < 1$,若存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}_i$,对称正定矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{\Phi}_2$ 和对称矩阵 $\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2,\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2,\boldsymbol{S}_3,\boldsymbol{S}_4,\boldsymbol{R}$ 使得线性矩阵不等式(10)成立,并且满足 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}=0$,则系统(5)在均方意义下随机容许:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_1 & \boldsymbol{\Lambda}_2 & 0 & (\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_{di})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}_3^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & 0 & \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}}) & \boldsymbol{\Lambda}_3 \\ * & \boldsymbol{\Lambda}_4 & 0 & \boldsymbol{A}_{di}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}_3^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & 0 & \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_1-\boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}}) & \boldsymbol{A}_{di}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}_4^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{ki} \\ * & * & -\boldsymbol{Q}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \tau\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}_3^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{S}_3\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}) & 0 & 0 & \boldsymbol{A}_{ki}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}_3^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{S}_4\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & * & -\frac{1}{\tau}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -(\boldsymbol{M}_2+\boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}}) & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{A}_{ki}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{S}_4^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\Phi}_1 \end{pmatrix} < 0, \tag{10}$$

其中:

$$\boldsymbol{\Lambda}_1 = (\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_{ki})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_{ki}) + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{s}\boldsymbol{\pi}_{ij}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}^{+})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{+}\boldsymbol{J}_i + (\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2) + 2(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_{ki})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{E} + \sigma^2\boldsymbol{\Phi}_2,$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_2 = (\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_{ki})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{di} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_{di},$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_3 = \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_{ki} - (\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_{ki})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}_4^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{ki},$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_4 = -\boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}})\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}_{di}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}.$$

证明　首先,证明系统(5)在 $\boldsymbol{u}(t)=0$ 的情况下无脉冲.由假设(1)可知,矩阵对 $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$ 是正则的.根据条件(10),可推出 $\boldsymbol{\Lambda}_1 < 0$,进而

$$\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i - \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i < 0. \tag{11}$$

对式(11)两边左乘 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$,右乘 $\boldsymbol{V}$,应用假设 2,可得:

$$\bar{\boldsymbol{\Theta}} = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{E}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{V} < 0 = \begin{pmatrix} \otimes & \overline{\otimes} \\ * & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}\boldsymbol{S}_{21}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{S}_{21}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} < 0. \tag{12}$$

由于 $\otimes$ 和 $\overline{\otimes}$ 与后续讨论无关,从而省略了这两部分的具体表达式.

由式(12)可得,$\boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}\boldsymbol{S}_{21}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{S}_{21}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{22} < 0$,进而,$\boldsymbol{A}_{22}$ 是非奇异的,因此,在 $\boldsymbol{u}(t)=0$ 时,系统(5)是无脉冲的.

接下来,证明系统(5)在均方意义下是随机稳定的.

构造如下 Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{V}_1(x(t)) + \boldsymbol{V}_2(x(t)) + \boldsymbol{V}_3(x(t)),$$

$$\boldsymbol{V}_1(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t),$$
$$\boldsymbol{V}_2(\boldsymbol{x}(t)) = \int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\alpha)\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}(\alpha)\mathrm{d}\alpha + \int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\alpha)\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}(\alpha)\mathrm{d}\alpha,$$
$$\boldsymbol{V}_3(\boldsymbol{x}(t)) = \int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\eta}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta. \tag{13}$$

对式(13),应用引理2,求 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t))$ 的随机导数,可得:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t)) = \mathcal{L}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t))\mathrm{d}t + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(t), \tag{14}$$

其中:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\boldsymbol{V}_1(\boldsymbol{x}(t)) = {} & 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t) + \\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{s}\boldsymbol{\pi}_{ij}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t) + \\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}^{+})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{+}\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{x}(t) = \\ & 2[(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{A}_{ki})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}_{di}\boldsymbol{x}(t-\tau(t)) + \\ & \boldsymbol{A}_{ki}\boldsymbol{e}(t)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_iEx(t) + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t) + \\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}^{+})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{+}\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{x}(t) = \\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\Big[(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{A}_{ki})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{A}_{ki}) + \\ & \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{s}\boldsymbol{\pi}_{ij}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}^{+})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{+}\boldsymbol{J}_i\Big]\boldsymbol{x}(t) + \\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{A}_{di}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t) + \\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_{di}\boldsymbol{x}(t-\tau(t)) + \\ & \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}_{ki}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_{ki}\boldsymbol{e}(t),\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\boldsymbol{V}_2(\boldsymbol{x}(t)) = {} & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_2)\boldsymbol{x}(t) - \\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}(t-\tau(t)) - \\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}(t-\tau),\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\boldsymbol{V}_3(\boldsymbol{x}(t)) = {} & \tau\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\eta}(t) - \\ & \int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\eta}(s)\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{17}$$

对式(17),应用引理1,可推得:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\boldsymbol{V}_3(\boldsymbol{x}(t)) \leqslant {} & \tau\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\eta}(t) - \\ & \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E}\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{\eta}(s)\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{18}$$

由式(7)和式(9),存在矩阵 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2,\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2,\boldsymbol{S}_3,\boldsymbol{S}_4$,使得如下等式成立:

$$\begin{aligned}0 = {} & 2\Big[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_1 - \\ & \boldsymbol{M}_2\int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{\eta}(s)\mathrm{d}s\Big] \times \Big[\int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{\eta}(s)\mathrm{d}s + \\ & \int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(s) - \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t-\tau(t))\Big],\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}0 = {} & 2[(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{A}_{ki})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}_{di}\boldsymbol{x}(t-\tau(t)) + \\ & \boldsymbol{A}_{ki}\boldsymbol{e}(t) - \boldsymbol{\eta}(t)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} \times [\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t) + \\ & \boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t-\tau(t)) + \boldsymbol{S}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}(t) - \boldsymbol{S}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}(t)].\end{aligned} \tag{20}$$

根据式(14)、(19)和(20),可推出:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t)) = {} & \mathcal{L}\tilde{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x}(t))\mathrm{d}t + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(t) + \\ & 2[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_1 - \\ & \boldsymbol{M}_2\int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{\eta}(s)\mathrm{d}s] \times \int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{J}_i\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(s),\end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\tilde{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x}(t)) = {} & \mathcal{L}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t)) + 2\Big[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M} + \\ & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{M}_2\int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{\eta}(s)\mathrm{d}s\Big] \times \\ & \Big[\int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{\eta}(s)\mathrm{d}s - \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t-\tau(t))\Big] + \\ & 2[(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{A}_{ki})\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}_{di}\boldsymbol{x}(t-\tau(t)) + \\ & \boldsymbol{A}_{ki}\boldsymbol{e}(t) - \boldsymbol{\eta}(t)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} \times [\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t) + \\ & \boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t-\tau(t)) + \boldsymbol{S}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}(t) - \boldsymbol{S}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}(t)] \leqslant \\ & \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\xi}(t),\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t) = {} & \Big(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t)) \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau) \\ & \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(t) \quad \int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s \quad \int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s \quad \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)\Big).\end{aligned} \tag{22}$$

根据条件(10),可以推出:

$$\begin{aligned}& \varepsilon\{\mathcal{L}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}(t))\} \leqslant \varepsilon\{\mathcal{L}\tilde{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x}(t))\} \leqslant \\ & \quad \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Gamma})\,\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2 \leqslant \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Gamma})\,\|\boldsymbol{x}(t)\|^2.\end{aligned}$$

证毕.

接下来设计具体的状态反馈控制器.

定理2 给定参数 $\tau, 0 \leqslant \sigma < 1$,若存在矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_i,\boldsymbol{Y},\boldsymbol{R}$,正定矩阵 $\overline{\boldsymbol{Q}_1},\overline{\boldsymbol{Q}_2},\overline{\boldsymbol{\Phi}_1},\overline{\boldsymbol{\Phi}_2}$,对称矩阵 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2,\boldsymbol{S}_3,\bar{\boldsymbol{Z}}$,使得式(23)成立,则系统(5)在均方意义下随机容许:

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_1 & \bar{\Lambda}_2 & 0 & A_{di}\overline{RS_3^{\mathrm{T}}} & 0 & \bar{\Lambda}_3 & B_iY & \Lambda_i^{-1}(E^{+}J_i)^{\mathrm{T}} & \bar{\Lambda}_7 \\ * & \bar{\Lambda}_4 & 0 & 0 & 0 & \bar{\Lambda}_5 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\overline{Q_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \bar{\Lambda}_6 & 0 & 0 & A_{ki}\overline{RS_3^{\mathrm{T}}} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{1}{\tau}E^{\mathrm{T}}\bar{Z}E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -2M_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\overline{\Phi_1} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\tilde{\Lambda}_i & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \bar{\Lambda}_8 \end{pmatrix} < 0, \tag{23}$$

其中：

$$\tilde{\Lambda}_1 = 2\left[\left(A_i + \frac{1}{2}\pi_{ii}E\right)\Lambda_i^{-\mathrm{T}} + B_iY\right] + \overline{Q_1} + \overline{Q_2} + \sigma^2\overline{\Phi_2} - 2\bar{M},$$

$$\bar{\Lambda}_2 = A_{di}\Lambda_i^{-\mathrm{T}} + 2\bar{M},$$

$$\bar{\Lambda}_3 = \Lambda_i^{-1}E^{\mathrm{T}}(M + M_2^{\mathrm{T}})\Lambda_i^{-\mathrm{T}},$$

$$\bar{\Lambda}_4 = -\overline{Q_1} + 2\bar{M}_1,$$

$$\bar{\Lambda}_5 = \Lambda_i^{-1}E^{\mathrm{T}}(M_1 - M_2^{\mathrm{T}})\Lambda_i^{-\mathrm{T}},$$

$$\bar{\Lambda}_6 = \tau\bar{Z} - 2\overline{RS_3^{\mathrm{T}}},$$

$$\tilde{\Lambda}_i = (\Lambda_iE)^{-1},$$

$$\breve{\Lambda}_i = (E^{-T}\Lambda_i)^{-1},$$

$$\bar{\Lambda}_7 = \left(\sqrt{\pi_{i1}}E\Lambda_i^{-\mathrm{T}} \quad \sqrt{\pi_{i2}}E\Lambda_i^{-\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \sqrt{\pi_{i(i-1)}}E\Lambda_i^{-\mathrm{T}} \quad \sqrt{\pi_{i(i+1)}}E\Lambda_i^{-\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \sqrt{\pi_{iN}}E\Lambda_i^{-\mathrm{T}}\right),$$

$$\bar{\Lambda}_8 = -\operatorname{diag}\left(\underset{\smile}{\Lambda}_1 \quad \underset{\smile}{\Lambda}_2\right),$$

$$\underset{\smile}{\Lambda}_1 = \operatorname{diag}\left(\breve{\Lambda}_1 \quad \breve{\Lambda}_2 \quad \cdots \quad \breve{\Lambda}_{n-1}\right),$$

$$\underset{\smile}{\Lambda}_2 = \operatorname{diag}\left(\breve{\Lambda}_{n+1} \quad \cdots \quad \breve{\Lambda}_N\right).$$

$\Lambda_i = E^{\mathrm{T}}P_i, E^{\mathrm{T}}R = 0$, 相应的状态反馈控制增益为$K = Y\Lambda_i^{\mathrm{T}}$.

证明 不失一般性,令矩阵$S_1 = S_2 = S_4 = 0$,作如下的合同变换：

$$\begin{aligned} &\overline{Q_1} = \Lambda_i^{-1}Q_1\Lambda_i^{-\mathrm{T}}, \quad \overline{Q_2} = \Lambda_i^{-1}Q_2\Lambda_i^{-\mathrm{T}}, \\ &\bar{Z} = \Lambda_i^{-1}E^{\mathrm{T}}ZE\Lambda_i^{-\mathrm{T}}, \quad \bar{M} = \Lambda_i^{-1}E^{\mathrm{T}}ME\Lambda_i^{-\mathrm{T}} \\ &\overline{M_1} = \Lambda_i^{-1}M_1\Lambda_i^{-\mathrm{T}}, \quad \overline{M_2} = \Lambda_i^{-1}M_2\Lambda_i^{-\mathrm{T}}, \\ &\overline{\Phi_1} = \Lambda_i^{-1}\Phi_1\Lambda_i^{-\mathrm{T}}, \quad \overline{\Phi_2} = \Lambda_i^{-1}\Phi_2\Lambda_i^{-\mathrm{T}} \\ &\overline{RS_3^{\mathrm{T}}} = \Lambda_i^{-1}RS_3^{\mathrm{T}}\Lambda_i^{-\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{24}$$

将式(24)代入式(23),可得：

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} \hat{\Lambda}_1 & \hat{\Lambda}_2 & 0 & A_{di}\Lambda_i^{-1}RS_3^{\mathrm{T}}\Lambda_i^{-\mathrm{T}} & 0 & \bar{\Lambda}_3 & B_iY & \Lambda_i^{-1}(E^{+}J_i)^{\mathrm{T}} & \bar{\Lambda}_7 \\ * & \hat{\Lambda}_4 & 0 & 0 & 0 & \bar{\Lambda}_5 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \hat{\Lambda}_6 & 0 & 0 & A_{ki}\Lambda_i^{-1}RS_3^{\mathrm{T}}\Lambda_i^{-\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{1}{\tau}E^{\mathrm{T}}ZE & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -2M_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\Lambda_i^{-1}\Phi_1\Lambda_i^{-\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\tilde{\Lambda}_i & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & \bar{\Lambda}_8 \end{pmatrix} < 0, \tag{25}$$

其中:

$$\hat{\Lambda}_1 = 2\left[\left(A_i + \frac{1}{2}\pi_{ii}E\right)\Lambda_i^{-T} + B_iY\right] + \Lambda_i^{-1}(Q_1+Q_2)\Lambda_i^{-T} + \Lambda_i^{-1}\sigma^2\Phi_2\Lambda_i^{-T} - 2\Lambda_i^{-1}E^{T}ME\Lambda_i^{-T},$$

$$\hat{\Lambda}_2 = A_{di}\Lambda_i^{-T} + 2\Lambda_i^{-1}E^{T}ME\Lambda_i^{-T},$$

$$\hat{\Lambda}_6 = \tau\Lambda_i^{-1}E^{T}ZE\Lambda_i^{-T} - 2\Lambda_i^{-1}RS_3^{T}\Lambda_i^{-T},$$

$$\hat{\Lambda}_4 = -\Lambda_i^{-1}Q_1\Lambda_i^{-T} + 2\Lambda_i^{-1}E^{T}M_1E\Lambda_i^{-T}.$$

对式(25)进行Schur补变换,即可得:

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} \hat{\Lambda}_1 & \hat{\Lambda}_2 & 0 & A_{di}\Lambda_i^{-1}RS_3^{T}\Lambda_i^{-T} & 0 & \bar{\Lambda}_3 & B_iY & (E^{+}J_i)^{T} \\ * & \hat{\Lambda}_4 & 0 & 0 & 0 & \bar{\Lambda}_5 & 0 & 0 \\ * & * & -\Lambda_i^{-1}Q_2\Lambda_i^{-T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \hat{\Lambda}_6 & 0 & 0 & A_{ki}\Lambda_i^{-1}RS_3^{T}\Lambda_i^{-T} & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{1}{\tau}\Lambda_i^{-1}E^{T}ZE\Lambda_i^{-T} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -2\Lambda_i^{-1}M_2\Lambda_i^{-T} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\Lambda_i^{-1}\Phi_1\Lambda_i^{-T} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\tilde{\Lambda}_i \end{pmatrix} < 0, \tag{26}$$

式(26)左乘 diag(Λ_i Λ_i Λ_i Λ_i I Λ_i Λ_i I),右乘 diag(Λ_i^{T} Λ_i^{T} Λ_i^{T} Λ_i^{T} I Λ_i^{T} Λ_i^{T} I),可得式(27)成立:

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} \widehat{\Lambda}_1 & \widehat{\Lambda}_2 & 0 & A_{di}RS_3^{T} & 0 & E^{T}(M+M_2^{T}) & \widehat{\Lambda}_3 & (E^{+}J_i)^{T} \\ * & \widehat{\Lambda}_4 & 0 & 0 & 0 & E^{T}(M-M_2^{T}) & 0 & 0 \\ * & * & -Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \tau E^{T}ZE-2RS_3 & 0 & 0 & A_{ki}RS_3^{T} & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{1}{\tau}E^{T}ZE & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -2M_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\Phi_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\tilde{\Lambda}_i \end{pmatrix} < 0, \tag{27}$$

其中:

$$\widehat{\Lambda}_1 = 2(\Lambda_iA_i + \Lambda_iB_iY\Lambda_i^{T}) + \sum_{j=1}^{s}E^{T}\pi_{ij}P_jE + J_i^{T}(E^{+})^{T}\Lambda_iEE^{+}J_i + (Q_1+Q_2) - 2E^{T}ME + \sigma^2\Phi_2,$$

$$\widehat{\Lambda}_2 = \Lambda_iA_{di} + 2E^{T}ME,\quad \widehat{\Lambda}_3 = \Lambda_iB_iY\Lambda_i^{T},$$

$$\widehat{\Lambda}_4 = -Q_1 + 2E^{T}M_1E.$$

对式(27)应用Schur补引理,则(27)式等价于:

$$\Gamma_5 = \begin{pmatrix} \widehat{\Lambda}_1 & \widehat{\Lambda}_2 & 0 & A_{di}RS_3^{T} & 0 & E^{T}(M+M_2^{T}) & \widehat{\Lambda}_3 \\ * & \widehat{\Lambda}_4 & 0 & 0 & 0 & E^{T}(M-M_2^{T}) & 0 \\ * & * & -Q_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \tau E^{T}ZE-2RS_3 & 0 & 0 & A_{ki}RS_3^{T} \\ * & * & * & * & -\frac{1}{\tau}E^{T}ZE & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -2M_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\Phi_1 \end{pmatrix} < 0. \tag{28}$$

令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Lambda}_i^{-\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\Lambda}_i=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i$,将 $\boldsymbol{A}_{ki}=\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}$ 代入式(28),即可推出式(10) 成立,根据定理 1.则可推出系统(5)在均方意义下是随机容许的,定理 2 证毕.

3 仿真算例

为更好地验证所提方法的有效性,本文列举一个数值例子.

考虑系统模型(1),所取参数如下:

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}-2 & 0.2\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{d1}=\begin{pmatrix}-0.7 & 0.1\\ 0.1 & -0.2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{d2}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}3\\ -50\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}3\\ 10\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{J}_1=\begin{pmatrix}0.1 & 0.2\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{J}_2=\begin{pmatrix}0.2 & 0.1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

不失一般性,Markov 跳变系统的状态转移概率给定为

$$\boldsymbol{\pi}=\begin{pmatrix}-0.2 & 0.2\\ 0.2 & 0.2\end{pmatrix}.$$

令 $\tau=0.2$,$\sigma=0.2$,根据定理2,可求得系统(5)的状态反馈增益矩阵为

$$\boldsymbol{K}_1=(-1.196\,3 \quad 4.219\,2),$$

$$\boldsymbol{K}_2=(-1.544\,4 \quad 6.911\,8).$$

仿真结果表明,在静态事件触发机制条件下,系统(1)通过设计状态反馈控制器(4)在均方意义下是随机稳定的.图 1 和图 2 分别描述了两种不同模态下的状态响应轨迹.图 3 描述了系统的事件触发间隔.

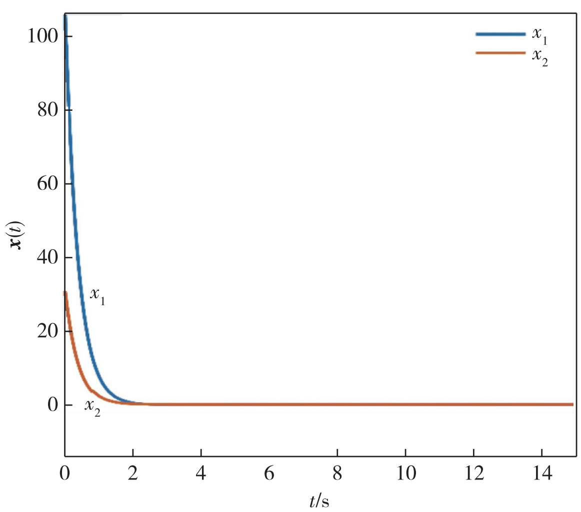

图 1 静态事件触发下的状态反馈过程(模态 1)

Fig. 1 State feedback process by static event-triggered control (Modal 1)

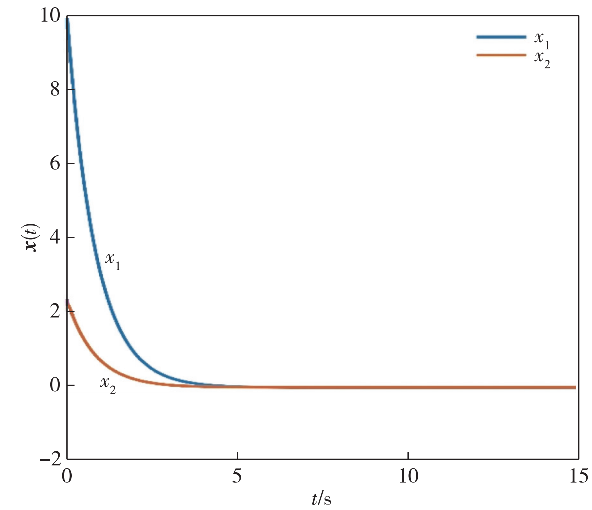

图 2 静态事件触发下的状态反馈过程(模态 2)

Fig. 2 State feedback process by static event-triggered control (Modal 2)

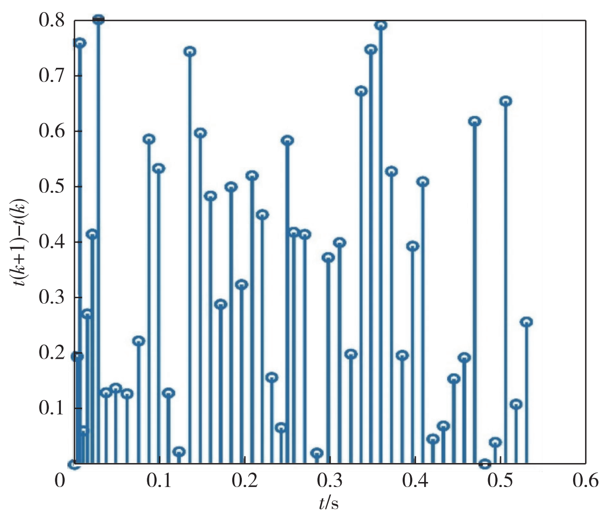

图 3 静态事件触发下的采样间隔

Fig. 3 Sampling interval under static event-triggered control

4 结束语

本文采用 Lyapunov-Krasovskii 泛函,Jensen 不等式以及自由加权矩阵技术得到了系统(5)在静态事件触发机制均方意义下随机容许的充分条件,并通过引入一种状态反馈控制器,确保闭环系统依然能够具有正则、无脉冲以及均方意义下的随机容许,最后利用一个数值仿真算例验证了本文所提出的方法具有可行性.

参考文献
References

[1] Ishihara J Y,Terra M H.On the Lyapunov theorem for singular systems[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2002,47(11):1926-1930
[2] Uezato E,Ikeda M.Strict LMI conditions for stability,robust stabilization,and H_∞ control of descriptor systems[C]//Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control.December 7-10,1999,Phoenix,AZ,USA.IEEE,1999:4092-4097
[3] Boukas E K.Stabilization of stochastic singular nonlinear hybrid systems[J].Nonlinear Analysis:Theory,Methods & Applications,2006,64(2):217-228
[4] 杨冬梅.广义系统[M].北京:科学出版社,2004
[5] Xu S Y,Van Dooren P,Stefan R,et al.Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2002,47(7):1122-1128
[6] Xu S Y,Lam J,Zou Y,et al.Robust admissibility of time-varying singular systems with commensurate time delays[J].Automatica,2009,45(11):2714-2717
[7] Xing S Y,Wang M,Yue X S.H_∞ control for stochastic singular systems with time-varying delays[J].IEEE Access,2020,8:161203-161210
[8] 李艳恺,陈谋,吴庆宪.随机马尔可夫跳变系统的弹性动态输出反馈控制[J].南京信息工程大学学报(自然科学版),2018,10(6):740-748
LI Yankai,CHEN Mou,WU Qingxian.Resilient dynamic output feedback control for stochastic Markovian jump system[J].Journal of Nanjing University of Information Science & Technology (Natural Science Edition),2018,10(6):740-748
[9] Wang G L.Stochastic stabilization of singular systems with Markovian switchings[J].Applied Mathematics and Computation,2015,250:390-401
[10] Zhuang G M,Ma Q,Zhang B Y,et al.Admissibility and stabilization of stochastic singular Markovian jump systems with time delays[J].Systems & Control Letters,2018,114:1-10
[11] Fu L,Ma Y C.H_∞ memory feedback control for uncertain singular Markov jump systems with time-varying delay and input saturation[J].Computational and Applied Mathematics,2018,37(4):4686-4709
[12] Ma S P,Boukas E K,Chinniah Y.Stability and stabilization of discrete-time singular Markov jump systems with time-varying delay[J].International Journal of Robust and Nonlinear Control,2010,20(5):531-543
[13] Wu Z G,Park J H,Su H Y,et al.Stochastic stability analysis for discrete-time singular Markov jump systems with time-varying delay and piecewise-constant transition probabilities[J].Journal of the Franklin Institute,2012,349(9):2889-2902
[14] Shen H,Su L,Park J H.Extended passive filtering for discrete-time singular Markov jump systems with time-varying delays[J].Signal Processing,2016,128:68-77
[15] Shi Y L,Peng X Y.Fault detection filters design of polytopic uncertain discrete-time singular Markovian jump systems with time-varying delays[J].Journal of the Franklin Institute,2020,357(11):7343-7367
[16] Xing S Y,Zheng W X,Wang M.Event-triggered control for stochastic singular systems with state delay[C]//2019 Chinese Control Conference (CCC).July 27-30,2019,Guangzhou,China.IEEE,2019:1393-1397
[17] Xu Y H,Wang Y Q,Zhuang G M,et al.An event-triggered asynchronous H_∞ filtering for singular Markov jump systems with redundant channels[J].Journal of the Franklin Institute,2019,356(16):10076-10101
[18] Li H C,Zhou Y,Liu J,et al.An improved event-triggered control for systems subject to asymmetric actuator saturation[J].Journal of the Franklin Institute,2020,357(18):13620-13636

Event-triggered control of stochastic singular Markov jump systems with time-varying delays

YANG Zihan[1] XING Shuangyun[1] CAO Kangmin[1]
1 School of Science,Shenyang Jianzhu University,Shenyang 110168

Abstract This paper studies the stabilization problem of stochastic singular Markov jump systems with time-varying delays by static event-triggered control.By constructing the Lyapunov-Krasovskii functional,Jensen's inequality and free weightingm atrix technology,the stochastic admissibility conditions for the systems under the condition of static event-triggered control are proposed.On this basis,the state feedback controller is designed so that the corresponding closed-loop systems satisfy regular,impulse-free and the stochastically admissible in the mean square. Finally,a numerical simulation example is provided to illustrate the correctness and effectiveness of the method proposed in this paper.

Key words Markov jump systems;stochastic singular systems;event-triggered control;Lyapunov-Krasovskii functional;free weighting matrix