



随机分布参数切换系统的输入输出有限时间稳定与镇定

摘要

本文研究了一类随机分布参数切换系统的输入输出有限时间稳定问题.首先,给出了系统在均方意义下输入输出有限时间稳定的概念.其次,通过利用分片 Lyapunov-Krasovskii 函数、平均驻留时间及线性矩阵不等式等工具,建立了随机分布参数切换系统输入输出有限时间稳定的充分条件;设计一个状态反馈控制器确保相应的闭环系统输入输出有限时间稳定,并以严格的数学推导加以证明.最后,通过两个仿真例子验证了所得结果的有效性.

关键词

切换系统;随机分布参数系统;输入输出有限时间稳定;线性矩阵不等式

中图分类号 TP273

文献标志码 A

收稿日期 2021-09-13

资助项目 国家自然科学基金(61863004,62073144)

作者简介

左凤,男,硕士生,研究方向为随机分布参数系统.pengqcw32309@163.com

邓飞其(通信作者),男,博士,教授,主要从事复杂系统研究.aufqdeng@scut.edu.cn

1 广西科技大学 电气与信息工程学院,柳州,545616

2 华南理工大学 自动化科学与工程学院,广州,510641

0 引言

系统的稳定性是控制科学中的一个非常重要的研究课题.通常人们关注系统在无穷时间区间上的行为,如渐近稳定^[1]、指数稳定^[2]等,系统状态在运行足够长的时间后会恢复到平衡态.但对于实际应用而言,具有 Lyapunov 稳定的系统在有限的时间区间内很可能存在不良的瞬态性能,因此有限时间稳定性分析对系统在给定时间区间内的暂态性能的表现有重要意义.Dorato^[3]于1961年首次提出了短时间稳定的概念,这是有限时间稳定概念的雏形.随后吸引了大量学者对系统的有限时间稳定性进行研究^[4-6].2010年,Amato等^[7]延续了传统的有限时间稳定概念,针对线性时变系统提出了新的概念即输入输出有限时间稳定,指的是满足零初值条件的系统运行在给定时间区间上,给定一类有界的输入信号,系统的输出在该时间区间内始终不会超出给定的界.由于输入输出有限时间稳定的系统具有良好的抗干扰性^[8]和鲁棒性^[9],因此在提出后受到了极大的关注.输入输出有限时间稳定也因此推广到更广泛的系统中,如分数阶系统^[10]、切换系统^[11]、脉冲系统^[12]等.

随机分布参数系统是一类由随机偏微分方程描述的无穷维随机系统,如大气海洋动力学模型^[13]、生物种群模型^[14]、神经动力学模型^[15]等.文献[16]利用 Lyapunov-Krasovskii 函数方法对具有时变时滞的随机反应扩散 Cohen-Grossberg 神经网络的有限时间稳定问题进行了研究;文献[17]对随机反应扩散系统的有限时间稳定问题做了研究,包括分别设计分布式控制器和边界控制器对控制系统进行有限时间镇定、 H_∞ 和鲁棒有限时间控制.

受到环境等因素的影响,单一模型并不能很好地刻画真实运行的系统,目前考虑的办法就是建立由有限数量的子系统和相应的切换规则构成的切换系统,如网络控制系统^[18]、DC/DC 逆变器^[19]、飞行控制系统^[20]等.对于切换分布参数系统,文献[21]将有限时间有界和有限时间控制问题扩展到切换分布参数系统中,并设计基于事件触发序列的输出反馈控制器使得闭环系统有限时间有界;文献[22]对一类不确定的随机分布参数切换系统的稳定性进行了研究,利用 Lyapunov 函数方法、随机分析理论中的无穷维伊藤公式、指数鞅不等式

等工具,分别得到了系统均方稳定、均方指数稳定以及几乎必然指数稳定的充分条件;文献[23]研究了带马尔可夫跳变的随机反应扩散系统的有限时间稳定问题,并以线性矩阵不等式形式给出了边界控制器存在的充分条件.然而,关于随机分布参数切换系统输入输出有限时间稳定的问题还少有研究,综合以上分析,激发本文对此进行研究.

在本文中, \mathbf{R}^n 表示 n 维实向量构成的集合, $\mathbf{R}^{n \times m}$ 表示全体 $n \times m$ 维实矩阵构成的集合. \mathbf{I}_q 表示 q 维单位矩阵. $C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+; \mathbf{R}^+)$ 表示实值函数 $f(z, t): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ 构成的函数空间,且 f 关于 z 二阶连续可微,关于 t 一阶连续可微. $W^{1,2}([a, b], \mathbf{R}^n)$ 表示绝对连续的 n 维实值向量函数 $\varphi(\cdot, \eta): [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ 构成的函数空间,且 φ 关于 η 一阶可微,满足 $\partial \varphi(\cdot, \eta) / \partial \eta$ 平方可积.对实矩阵或实向量 $\mathbf{II}, \mathbf{II}^T$ 表示其转置, $\text{trace}(\mathbf{II})$ 表示矩阵 \mathbf{II} 的迹, $\mathbf{II} > 0$ ($\mathbf{II} < 0$) 意味着该矩阵正定(负定),记号“*”表示矩阵的对称元素.对随机变量 ζ ,其数学期望表示为 $E\zeta$.

1 问题表述

考虑如下随机分布参数切换系统:

$$\begin{cases} \mathbf{dx}(t, \eta) = (\mathbf{D}_{\sigma(t)} \frac{\partial^2 \mathbf{x}(t, \eta)}{\partial \eta^2} + \mathbf{A}_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t, \eta) + \\ \mathbf{F}_{\sigma(t)} \mathbf{v}(t, \eta)) dt + \mathbf{G}_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t, \eta) dw(t), \\ \mathbf{y}(t, \eta) = \mathbf{C}_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t, \eta), \end{cases} \quad (1)$$

满足的初边值条件如下:

$$\mathbf{x}(0, \eta) = 0, \quad \forall \eta \in (0, l), \quad (2)$$

$$\mathbf{x}(t, 0) = \mathbf{x}(t, l) = 0, \quad (3)$$

其中, $t \in \mathbf{R}^+$ 是时间变量, $\eta \in (0, l)$ 是空间变量, l 是一正常数. $\sigma: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathcal{H} = \{1, 2, \dots, N\}$ 表示切换函数,有限正整数 N 表示子系统的个数,且假定 $\sigma(t)$ 是分片右连续的, t_k ($k \in \mathbf{R}$) 表示切换时刻, $\{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots\}$ 为切换时间序列. $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时,若 $\sigma(t) = i, i \in \mathcal{H}$, 表示系统在 t_k 时刻切换到第 i 个子系统运行. $\mathbf{D}_{\sigma(t)} > 0$ 是 n 维正定矩阵, $\mathbf{A}_{\sigma(t)}, \mathbf{F}_{\sigma(t)}, \mathbf{G}_{\sigma(t)}, \mathbf{C}_{\sigma(t)}$ 分别是具有合适维数的系数矩阵. $\mathbf{x}(t, \eta) \in \mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{y}(t, \eta) \in \mathbf{R}^m$ 分别是系统的状态向量和输出向量, $\mathbf{v}(t, \eta) \in \mathbf{R}^q$ 是扰动输入. $w(t)$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ 上具有自然流 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 的一维标准布朗运动,对给定的时间 $T > 0$, 扰动 $\mathbf{v}(t, \eta)$ 满足如下约束条件:

$$E \int_0^T \int_0^l \mathbf{v}^T(t, \eta) \mathbf{v}(t, \eta) d\eta < \delta, \quad \delta > 0. \quad (4)$$

根据文献[24]可知系统(1)运行在 $t \in$

$[0, t_1)$ 上时,即如下方程

$$\begin{cases} \mathbf{dx}(t, \eta) = (\mathbf{D}_{\sigma(t)} \frac{\partial^2 \mathbf{x}(t, \eta)}{\partial \eta^2} + \mathbf{A}_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t, \eta) + \\ \mathbf{F}_{\sigma(t)} \mathbf{v}(t, \eta)) dt + \mathbf{G}_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t, \eta) dw(t), \\ \mathbf{y}(t, \eta) = \mathbf{C}_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t, \eta) \end{cases}$$

在 $(t, \eta) \in [0, t_1) \times (0, l)$ 上有几乎必然连续的唯一解 $\mathbf{x}(t, \eta)$. 又由切换函数 $\sigma(t)$ 分片右连续知 $\mathbf{x}(t_1^-, \eta) = \mathbf{x}(t_1, \eta)$, 即系统(1)运行在时间区间 $[t_1, t_2)$ 上的初值已知,那么系统(1)在 $(t, \eta) \in [t_1, t_2) \times (0, l)$ 上有唯一解.由此归纳可以看出,对给定的时间 $T > 0$, 系统(1)在 $(t, \eta) \in [0, T) \times (0, l)$ 上的解存在且唯一,状态轨迹 $\mathbf{x}(t, \eta)$ 在时间区间 $[0, T)$ 上几乎必然连续.

假设 1 对给定的时间 $T > 0$, 切换函数 $\sigma(t)$ 在有限时间区间 $[0, T)$ 上的切换次数仅为有限次.

定义 1^[25] 对切换函数 $\sigma(t)$ 和时刻 t, s 满足 $0 \leq t \leq s$, 令 $N_{\sigma(t)}(t, s)$ 表示 $\sigma(t)$ 在时间区间 $[t, s)$ 上的切换次数,若存在非负常数 N_0 和正常数 τ_a 满足如下关系:

$$N_{\sigma(t)}(t, s) \leq N_0 + \frac{s-t}{\tau_a},$$

则称 N_0 为抖振界, τ_a 为平均驻留时间(ADT).为简单起见,取 $N_0 = 0$.

考虑如下随机系统:

$$dz(t) = \mathbf{f}(\cdot, t) dt + \mathbf{g}(\cdot, t) dw(t), \quad t \in \mathbf{R}^+.$$

定义 2^[26] 设 $V(z, t) \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+; \mathbf{R}^+)$, 定义从 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+$ 到 \mathbf{R} 的算子 $\mathcal{L}V$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(z, t) = & V_t(z, t) + V_z(z, t) \mathbf{f}(\cdot, t) + \\ & \frac{1}{2} \text{trace}[\mathbf{g}^T(\cdot, t) V_{zz}(z, t) \mathbf{g}(\cdot, t)], \end{aligned}$$

这里

$$V_t(z, t) = \frac{\partial V(z, t)}{\partial t},$$

$$V_z(z, t) = \left(\frac{\partial V(z, t)}{\partial z_1}, \frac{\partial V(z, t)}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial V(z, t)}{\partial z_n} \right),$$

$$V_{zz}(z, t) = \left(\frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial z_i \partial z_j} \right)_{n \times n}.$$

定义 3^[27] 在零初值条件下,给定 m 维正定矩阵 \mathbf{R} 和正标量 c, T, δ , 若对任意满足条件(4)的扰动输入 $\mathbf{v}(t, \eta)$, 都有

$$E \int_0^t \mathbf{y}^T(t, \eta) \mathbf{R} \mathbf{y}(t, \eta) d\eta < c$$

对 $\forall t \in [0, T)$ 成立,则称系统(1)在均方意义下关于 $(c, T, \mathbf{R}, \sigma(t))$ 输入输出有限时间稳定.

对如下切换随机分布参数控制系统:

$$\begin{cases} dx(t, \eta) = (D_{\sigma(t)} \frac{\partial^2 x(t, \eta)}{\partial \eta^2} + A_{\sigma(t)} x(t, \eta) + \\ B_{\sigma(t)} u(t, \eta) + F_{\sigma(t)} v(t, \eta)) dt + \\ G_{\sigma(t)} x(t, \eta) dw(t), \\ y(t, \eta) = C_{\sigma(t)} x(t, \eta), \end{cases} \quad (5)$$

这里 $(t, \eta) \in \mathbf{R}^+ \times (0, 1)$, $u(t, \eta) \in \mathbf{R}^r$ 是控制输入. 系统(5)同样满足初值条件(2)和边值条件(3).

选取状态反馈控制器为

$$u(t, \eta) = K_{\sigma(t)} x(t, \eta), \quad (6)$$

这里 $K_{\sigma(t)} \in \mathbf{R}^{r \times n}$ 是状态反馈增益矩阵.

把控制器的表达式(6)代入系统(5)可得闭环系统

$$\begin{cases} dx(t, \eta) = (D_{\sigma(t)} \frac{\partial^2 x(t, \eta)}{\partial \eta^2} + A_{\sigma(t)} x(t, \eta) + \\ F_{\sigma(t)} v(t, \eta)) dt + G_{\sigma(t)} x(t, \eta) dw(t), \\ y(t, \eta) = C_{\sigma(t)} x(t, \eta), \end{cases} \quad (7)$$

式中 $A_{\sigma(t)} = A_{\sigma(t)} + B_{\sigma(t)} K_{\sigma(t)}$.

引理 1^[28] 设 $\beta(\eta) \in W^{1,2}([a, b], \mathbf{R}^n)$, 满足 $\beta(a)$ 或 $\beta(b) = 0$, $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 且 $Q > 0$, 则以下不等式成立:

$$\int_a^b \beta^T(s) Q \beta(s) ds \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b \beta_s^T(s) Q \beta_s(s) ds,$$

$$\text{这里 } \beta_s(s) = \left(\frac{\partial \beta_1(s)}{\partial s}, \frac{\partial \beta_2(s)}{\partial s}, \dots, \frac{\partial \beta_n(s)}{\partial s} \right)^T.$$

引理 2^[29] 对常数 $M \geq 0, p$ 和 q , 若定义在 $[0, T)$ 上的实值连续函数 $g(t)$ 和 $h(t)$ 满足

$$g(t) \leq M + \int_0^t [pg(s) + qh(s)] ds, \quad \forall t \in [0, T),$$

则有

$$g(t) \leq Me^{pt} + \int_0^t e^{p(t-s)} qh(s) ds, \quad \forall t \in [0, T).$$

引理 3 (Schur's 补引理) 对矩阵 T, S 和 N , 若 $T = T^T, S > 0$, 则不等式 $T + NS^{-1}N^T < 0$ 成立当且仅当

$$\begin{pmatrix} T & N \\ N^T & -S \end{pmatrix} < 0 \text{ 成立.}$$

2 主要结论

首先给出系统(1)输入输出有限时间稳定的充分条件, 然后针对控制系统(5)设计一个状态反馈控制器(6), 使得闭环系统(7)输入输出有限时间稳定.

定理 1 给定正标量 c, T, δ , 标量 $\lambda > 1$ 和 n 维矩阵 $R > 0$, 若存在正定对称矩阵 $P_i \in \mathbf{R}^{n \times n}, Q_i \in$

$\mathbf{R}^{q \times q}, \forall i, j \in \mathcal{H}$, 以及正标量 α, ρ_1, ρ_2 , 满足:

$$\begin{pmatrix} \Sigma_i & P_i F_i & G_i^T P_i \\ * & -Q_i & 0 \\ * & * & -P_i \end{pmatrix} < 0, \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} -P_i & \sqrt{\rho_1} C^T \\ * & -R^{-1} \end{pmatrix} < 0, \quad (9)$$

$$0 < Q_i < \rho_2 I_q, \quad (10)$$

$$\alpha < \frac{1}{T} \ln \frac{c}{\rho_1^{-1} \rho_2 \delta}, \quad (11)$$

$$P_i < \lambda P_j, \quad (12)$$

对任意切换函数 $\sigma(t)$, 其平均驻留时间若满足如下不等式:

$$\tau_a \geq \tau_a^* = \frac{T \ln \lambda}{\ln c - \ln \rho_1^{-1} \rho_2 \delta e^{\alpha T}}, \quad (13)$$

则系统(1)在均方意义下关于 $(c, T, R, \sigma(t))$ 输入输出有限时间稳定.

其中, $\Sigma_i = A_i^T P_i + P_i A_i - \alpha P_i - \pi^2 l^{-2} (P_i D_i + D_i^T P_i)$, τ_a^* 为切换信号的最短平均驻留时间.

证明 构造 Lyapunov-Krasovskii 函数:

$$V_{\sigma(t)}(x(t, \eta), t) = \int_0^l x^T(t, \eta) P_{\sigma(t)} x(t, \eta) d\eta,$$

设此时 $t \in [t_k, t_{k+1})$, 若 $\sigma(t_k) = i$, 即系统(1)在时间区间 $[t_k, t_{k+1})$ 上切换到第 i 个子系统. 为方便起见, 令 $V_i(t) := V_i(x(t, \eta), t)$, $x := x(t, \eta)$, $x_\eta := x_\eta(t, \eta) = \frac{\partial x(t, \eta)}{\partial \eta}$, $v := v(t, \eta)$.

沿着系统(1)在 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时间区间上计算 $\mathcal{L}V_i(t)$ 可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_i(t) = & \int_0^l 2x^T P_i \left(D_i \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + A_i x + F_i v \right) d\eta + \\ & \frac{1}{2} \int_0^l \text{trace} [(G_i x)^T V_{ixx} G_i x] d\eta = \\ & 2 \int_0^l x^T P_i D_i \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} d\eta + \int_0^l x^T (A_i^T P_i + P_i A_i) x d\eta + \\ & 2 \int_0^l x^T P_i F_i v d\eta + \int_0^l x^T G_i^T P_i G_i x d\eta, \end{aligned} \quad (14)$$

由分部积分公式和边界条件(3)可得

$$\begin{aligned} 2 \int_0^l x^T P_i D_i \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} d\eta = & 2x^T P_i D_i x_\eta \Big|_0^l - 2 \int_0^l x_\eta^T P_i D_i x_\eta d\eta = \\ & - \int_0^l x_\eta^T (P_i D_i + D_i^T P_i) x_\eta d\eta, \end{aligned} \quad (15)$$

注意到 $x(t, l) = 0$, 那么对式(15)应用引理 1, 有

$$2 \int_0^l \mathbf{x}^T \mathbf{P}_i \mathbf{D}_i \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \eta^2} d\eta = - \int_0^l \mathbf{x}^T (\mathbf{P}_i \mathbf{D}_i + \mathbf{D}_i^T \mathbf{P}_i) \mathbf{x} d\eta \leq - \pi^2 l^{-2} \int_0^l \mathbf{x}^T (\mathbf{P}_i \mathbf{D}_i + \mathbf{D}_i^T \mathbf{P}_i) \mathbf{x} d\eta. \quad (16)$$

将不等式(16)代入到式(14)可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_i(t) \leq & - \pi^2 l^{-2} \int_0^l \mathbf{x}^T (\mathbf{P}_i \mathbf{D}_i + \mathbf{D}_i^T \mathbf{P}_i) \mathbf{x} d\eta + \\ & \int_0^l \mathbf{x}^T (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i) \mathbf{x} d\eta + 2 \int_0^l \mathbf{x}^T \mathbf{P}_i \mathbf{F}_i \mathbf{v} d\eta + \\ & \int_0^l \mathbf{x}^T \mathbf{G}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{G}_i \mathbf{x} d\eta, \end{aligned} \quad (17)$$

于是有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_i(t) - \alpha V_i(t) - \int_0^l \mathbf{v}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{v} d\eta \leq & \int_0^l \mathbf{x}^T (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i + \mathbf{G}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{G}_i - \alpha \mathbf{P}_i) \mathbf{x} d\eta - \\ & \pi^2 l^{-2} \int_0^l \mathbf{x}^T (\mathbf{P}_i \mathbf{D}_i + \mathbf{D}_i^T \mathbf{P}_i) \mathbf{x} d\eta + 2 \int_0^l \mathbf{x}^T \mathbf{P}_i \mathbf{F}_i \mathbf{v} d\eta - \\ & \int_0^l \mathbf{v}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{v} d\eta = \int_0^l \boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\Theta}_i \boldsymbol{\gamma} d\eta, \end{aligned} \quad (18)$$

这里 $\boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{x} \quad \mathbf{v})^T$, $\boldsymbol{\Theta}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Pi}_i & \mathbf{P}_i \mathbf{F}_i \\ * & -\mathbf{Q}_i \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Pi}_i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i + \mathbf{G}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{G}_i - \alpha \mathbf{P}_i - \pi^2 l^{-2} (\mathbf{P}_i \mathbf{D}_i + \mathbf{D}_i^T \mathbf{P}_i)$.

对式(8)应用 Schur's 补引理可得 $\boldsymbol{\Theta}_i < 0$. 将 $\boldsymbol{\Theta}_i < 0$ 代入式(18)并两边取期望有

$$\begin{aligned} E\mathcal{L}V_i(t) < \alpha EV_i(t) + E \int_0^l \mathbf{v}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{v} d\eta < \\ & \alpha EV_i(t) + \rho_2 E \int_0^l \mathbf{v}^T \mathbf{v} d\eta. \end{aligned} \quad (19)$$

由无穷维伊藤公式知

$$V_i(t) = V_i(t_k) + \int_{t_k}^t \mathcal{L}V(s) ds + \int_{t_k}^t \int_0^l 2\mathbf{x}^T \mathbf{P}_i \mathbf{G}_i \mathbf{x} d\eta dw(s), \quad (20)$$

对式(20)两边取期望后,把式(10)和式(19)代入有

$$\begin{aligned} EV_i(t) = EV_i(t_k) + \int_{t_k}^t E\mathcal{L}V_i(s) ds < \\ EV_i(t_k) + \int_{t_k}^t \left(\alpha EV_i(s) + \rho_2 E \int_0^l \mathbf{v}^T \mathbf{v} d\eta \right) ds, \end{aligned} \quad (21)$$

对式(21)应用引理2可得

$$\begin{aligned} EV_i(t) < e^{\alpha(t-t_k)} EV_i(t_k) + \rho_2 \int_{t_k}^t e^{\alpha(t-s)} E \int_0^l \mathbf{v}^T \mathbf{v} d\eta ds < \\ e^{\alpha(t-t_k)} \left(EV_i(t_k) + \rho_2 E \int_{t_k}^t \int_0^l \mathbf{v}^T \mathbf{v} d\eta ds \right) \end{aligned} \quad (22)$$

对 $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$ 成立.

为方便书写,对 $\forall t_e \in \{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots\}$, 定义 $\bar{e} = \sigma(t_e) \in \mathcal{H}$. 由式(12)可知 $V_{\bar{e}}(t_e) \leq \lambda V_{\bar{e}}(t_e^-)$, 于是对式(22)有

$$\begin{aligned} EV_i(t) < e^{\alpha(t-t_k)} \left(EV_i(t_k) + \rho_2 E \int_{t_k}^t \int_0^l \mathbf{v}^T \mathbf{v} d\eta ds \right) \leq \\ \lambda e^{\alpha(t-t_k)} EV_i(t_k^-) + \rho_2 e^{\alpha(t-t_k)} E \int_{t_k}^t \int_0^l \mathbf{v}^T \mathbf{v} d\eta ds < \\ \lambda e^{\alpha(t-t_k)} \cdot e^{\alpha(t_k-t_{k-1})} \left(EV_{k-1}(t_{k-1}) + \rho_2 E \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_0^l \mathbf{v}^T \mathbf{v} d\eta ds \right) + \\ \rho_2 e^{\alpha(t-t_k)} E \int_{t_k}^t \int_0^l \mathbf{v}^T \mathbf{v} d\eta ds = \lambda e^{\alpha(t-t_{k-1})} EV_{k-1}(t_{k-1}) + \\ \lambda \rho_2 e^{\alpha(t-t_{k-1})} E \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_0^l \mathbf{v}^T \mathbf{v} d\eta ds + \rho_2 e^{\alpha(t-t_k)} E \int_{t_k}^t \int_0^l \mathbf{v}^T \mathbf{v} d\eta ds < \\ \lambda e^{\alpha(t-t_{k-1})} \left(EV_{k-1}(t_{k-1}) + \rho_2 E \int_{t_{k-1}}^t \int_0^l \mathbf{v}^T \mathbf{v} d\eta ds \right) < \dots < \\ \lambda^k e^{\alpha t} \left(EV_0(0) + \rho_2 E \int_0^t \int_0^l \mathbf{v}^T \mathbf{v} d\eta ds \right), \end{aligned} \quad (23)$$

那么,结合定义1并把初值条件(2)代入到式(23)可得

$$EV_i(t) < \rho_2 \lambda^{T/\tau_a} e^{\alpha T} \left(E \int_0^T \int_0^l \mathbf{v}^T \mathbf{v} d\eta ds \right) < \rho_2 \delta \lambda^{T/\tau_a} e^{\alpha T}. \quad (24)$$

根据系统(1)的输出方程有

$$E \int_0^l \mathbf{y}^T \mathbf{R} \mathbf{y} d\eta = E \int_0^l (\mathbf{C}_i \mathbf{x})^T \mathbf{R} \mathbf{C}_i \mathbf{x} d\eta = E \int_0^l \mathbf{x}^T \mathbf{C}_i^T \mathbf{R} \mathbf{C}_i \mathbf{x} d\eta,$$

对式(9)应用引理3并结合式(24)可得

$$\begin{aligned} E \int_0^l \mathbf{y}^T \mathbf{R} \mathbf{y} d\eta = E \int_0^l \mathbf{x}^T \mathbf{C}_i^T \mathbf{R} \mathbf{C}_i \mathbf{x} d\eta < \\ \rho_1^{-1} E \int_0^l \mathbf{x}^T \mathbf{P}_i \mathbf{x} d\eta = \rho_1^{-1} EV_i(t) < \rho_1^{-1} \rho_2 \delta \lambda^{T/\tau_a} e^{\alpha T}. \end{aligned} \quad (25)$$

最后,把式(13)代入到式(25)可推得

$$E \int_0^l \mathbf{y}^T \mathbf{R} \mathbf{y} d\eta < c. \quad (26)$$

证明完毕.

定理2 给定正标量 c, T, δ , 标量 $\lambda > 1$ 和 n 维矩阵 $\mathbf{R} > 0$, 若存在正定对称矩阵 $\mathbf{S}_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Q}_i \in \mathbf{R}^{q \times q}$ 和常矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}_i \in \mathbf{R}^{r \times n}$, $\forall i, j \in \mathcal{H}$, 以及正标量 α , ρ_1, ρ_2 , 满足

$$\begin{pmatrix} \Xi_i & \mathbf{F}_i & \mathbf{S}_i \mathbf{G}_i \\ * & -\mathbf{Q}_i & 0 \\ * & * & -\mathbf{S}_i \end{pmatrix} < 0, \quad (27)$$

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{S}_i & \sqrt{\rho_1} \mathbf{S}_i \mathbf{C}_i^T \\ * & -\mathbf{R}^{-1} \end{pmatrix} < 0, \quad (28)$$

$$0 < \mathbf{Q}_i < \rho_2 \mathbf{I}_q, \quad (29)$$

$$\alpha < \frac{1}{T} \ln \frac{c}{\rho_1^{-1} \rho_2 \delta}, \quad (30)$$

$$\mathbf{S}_i < \lambda \mathbf{S}_j. \quad (31)$$

对任意切换函数 $\sigma(t)$, 其平均驻留时间若满足

如下不等式

$$\tau_a \geq \tau_a^* = \frac{T \ln \lambda}{\ln c - \ln \rho_1^{-1} \rho_2 \delta e^{\alpha T}}, \quad (32)$$

则在状态反馈控制律(6)下,系统(5)在均方意义下关于 $(c, T, R, \sigma(t))$ 输入输出有限时间稳定.

其中, $\Xi_i = A_i S_i + S_i A_i^T + B_i F_i + F_i^T B_i^T - \alpha S_i - \pi^2 l^{-2} (D_i S_i + S_i D_i^T)$, τ_a^* 为切换信号的最短平均驻留时间.此时,相应的状态反馈增益矩阵为 $K_i = F_i S_i^{-1}$.

证明 由定理1可知,系统(5)在状态反馈控制律(6)下关于 $(c, T, R, \sigma(t))$ 输入输出有限时间稳定的充分条件为:对闭环系统(7)存在正定对称矩阵 $P_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbf{R}^{q \times q}$, $\forall i, j \in \mathcal{H}$, 以及正标量 α, ρ_1, ρ_2 满足:

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{ci} & P_i F_i & G_i^T P_i \\ * & -Q_i & 0 \\ * & * & -P_i \end{pmatrix} < 0, \quad (33)$$

以及条件(9)–(13).其中 $\Sigma_{ci} = A_i^T P_i + P_i A_i + K_i^T B_i^T P_i + P_i B_i K_i - \alpha P_i - \pi^2 l^{-2} (P_i D_i + D_i^T P_i)$.

在式(33)两边同时左乘右乘 $\text{diag}\{P_i^{-1}, I_n, P_i^{-1}\}$, 并令 $S_i = P_i^{-1}$, $F_i = K_i S_i$, 可得式(28)成立;在式(9)两边同时左乘右乘 $\text{diag}\{P_i^{-1}, I_n\}$ 有式(27)成立;在式(12)两边同时左乘 P_i^{-1} 右乘 P_j^{-1} , 并注意到 i 和 j 的任意性可得式(31)成立;由式(11)和(13)分别可得式(30)和(32)成立.故在状态反馈控制律(6)下,式(27)–(32)可保证系统(5)在均方意义下关于 $(c, T, R, \sigma(t))$ 输入输出有限时间稳定,且相应的状态反馈增益矩阵为 $K_i = F_i S_i^{-1}$.

证明完毕.

3 仿真算例

本节通过两个数值仿真例子来分别验证定理1和定理2结论的有效性.

3.1 输入输出有限时间稳定

考虑具有两个模态的系统(1),其相应的系数矩阵和扰动输入为

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & D_2 &= \begin{pmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{pmatrix}, \\ A_1 &= \begin{pmatrix} -4 & 0.1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, & A_2 &= \begin{pmatrix} -3.5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \\ F_1 &= \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}, & F_2 &= \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_1 &= \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}, & G_2 &= \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}, \\ C_1 &= C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

输入扰动 $v(t, \eta) = (2e^{-0.4t} \quad 2e^{-0.4t})^T$, 其中 $(t, \eta) \in [0, 2) \times [0, \pi]$. 初边值条件满足式(2)和(3).

给定参数 $c = 2.6, T = 2, \delta = 25.2, \lambda = 1.001, R = I$, 同时取 $\rho_1 = 8.8, \rho_2 = 0.89, \alpha = 0.0071$. 通过解定理1中的线性矩阵不等式可得可行解如下:

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{pmatrix} 10.4047 & -0.6614 \\ -0.6614 & 9.1366 \end{pmatrix}, \\ P_2 &= \begin{pmatrix} 10.4077 & -0.6617 \\ -0.6617 & 9.1391 \end{pmatrix}, \\ Q_1 &= \begin{pmatrix} 0.8144 & 0.0208 \\ 0.0208 & 0.8564 \end{pmatrix}, & Q_2 &= \begin{pmatrix} 0.8435 & 0.0277 \\ 0.0277 & 0.8706 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

再由式(13)可解得

$$\tau_a^* = \frac{T \ln \lambda}{\ln c - \ln \rho_1^{-1} \rho_2 \delta e^{\alpha T}} = 0.3506,$$

于是可选取如图1所示的切换函数 $\sigma_1(t)$, 其 ADT 满足 $\tau_a \geq 0.3506$, 由定理1可得系统(1)在均方意义下关于 $(c = 2.6, T = 2, R = I, \sigma_1(t))$ 输入输出有限时间稳定. 通过仿真,可以得到图2、3所示的系统输出轨迹和图4所示的系统输入输出有限时间稳定. 由图4可以看出,红色实线 $E \int_0^{\pi} y^T R y d\eta$ 的轨迹始终在蓝色点划线 $c = 2.6$ 的下方,即系统(1)在均方意义下关于 $(c = 2.6, T = 2, R = I, \sigma_1(t))$ 输入输出有限时间稳定.

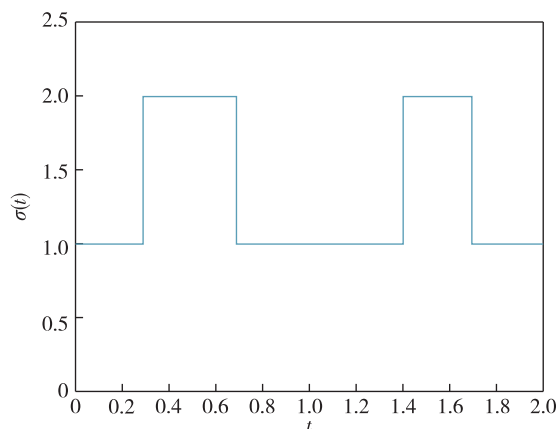


图1 系统的切换函数 $\sigma_1(t)$

Fig. 1 Switching function $\sigma_1(t)$ of system

3.2 输入输出有限时间镇定

考虑算例1中开环系统(1)所对应的控制系统

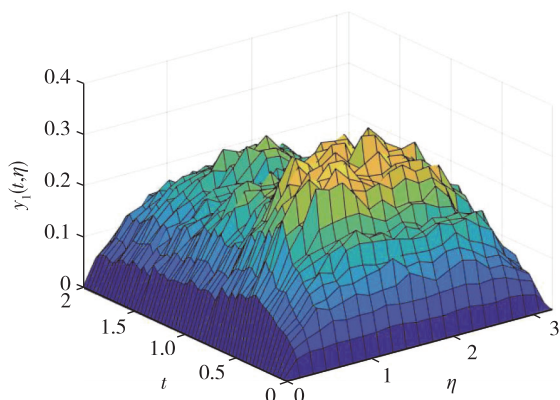


图2 输出轨迹 $y_1(t, \eta)$

Fig.2 Output trajectory $y_1(t, \eta)$

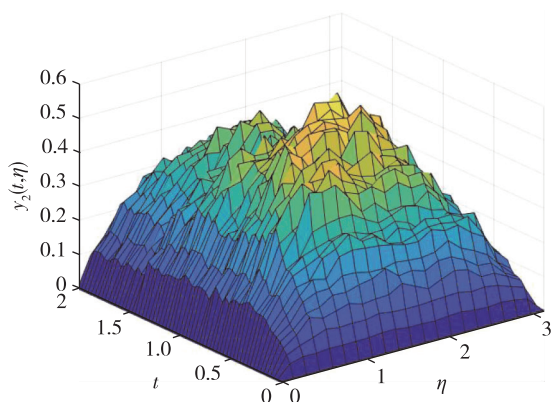


图3 输出轨迹 $y_2(t, \eta)$

Fig.3 Output trajectory $y_2(t, \eta)$

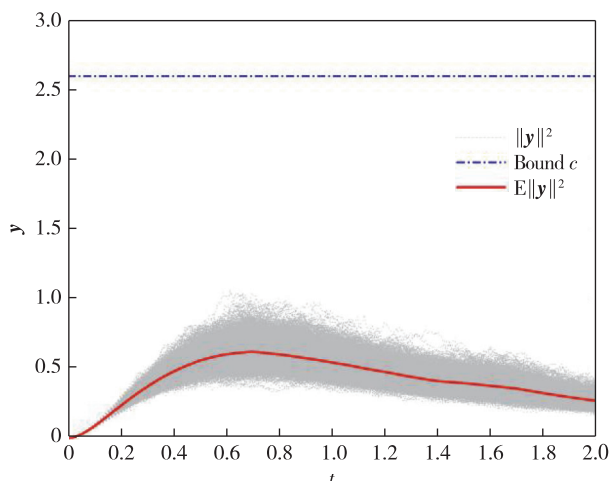


图4 系统输入输出有限时间稳定

Fig.4 Input-output finite-time stability of system

(5),其相应的输入矩阵为

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.4 \\ 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.7 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix},$$

控制输入为 $\mathbf{u}(t, \eta) = (u_1(t, \eta) \quad u_2(t, \eta))^T$.

给定参数 $c = 0.4, T = 2, \delta = 25.2, \lambda = 1.05, \mathbf{R} = \mathbf{I}$, 同时取 $\rho_1 = 10.1, \rho_2 = 0.09, \alpha = 0.0581$. 通过解定理 2 中的线性矩阵不等式得可行解如下:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0.0718 & 5.2886 \times 10^{-9} \\ 5.2886 \times 10^{-9} & 0.0719 \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0.0727 & 1.299 \times 10^{-8} \\ 1.299 \times 10^{-8} & 0.0727 \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0.0602 & 1.7117 \times 10^{-4} \\ 1.7117 \times 10^{-4} & 0.0602 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0.0599 & -4.545 \times 10^{-11} \\ -4.545 \times 10^{-11} & 0.0599 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} -85.2186 & -54.4239 \\ 6.2987 & -56.7074 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} -6.0505 & -99.5938 \\ 32.5491 & -53.8857 \end{pmatrix}.$$

于是可选取状态反馈增益矩阵

$$K_1 = \Gamma_1 S_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1186.1 & -757.4429 \\ 87.6703 & -789.2235 \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \Gamma_2 S_2^{-1} = \begin{pmatrix} -82.2075 & -1369.3 \\ 447.624 & -740.8712 \end{pmatrix}$$

以及 ADT 满足 $\tau_a \geq \tau_a^* = 0.21$ 的切换函数 $\sigma_2(t)$, 如图 5 所示. 通过仿真可得引入状态反馈控制律(6)后的闭环系统(5)的输入输出有限时间稳定, 如图 6 所示. 可以看出红色实线 $E \int_0^T \mathbf{y}^T \mathbf{R} \mathbf{y} d\eta$ 的轨迹始终在界 $c = 0.4$ 的下方, 即闭环系统(5)在均方意义下关于 $(c = 0.4, T = 2, \mathbf{R} = \mathbf{I}, \sigma_2(t))$ 输入输出有限时间稳定. 为了验证所设计控制器的有效性, 令 $\mathbf{u}(t, \eta) = 0$ 即不加控制器的开环情形作为比较, 通过仿真可得开环系统的输入输出有限时间稳定, 如图 7 所示. 可以观察到, 不加控制器的开环系统(5)并不能在有限时间区间 $[0, 2)$ 上达到均方稳定, 这也就验证了本文所设计控制器是有效的.

4 结束语

本文将输入输出有限时间稳定概念引入到了随机分布参数切换系统中, 并对随机分布参数切换系统的输入输出稳定性进行了分析. 考虑到该系统沿着时间不断切换, 通过选择 Lyapunov-Krasovskii 函数并利用平均驻留时间方法得到了系统输入输出有限时间稳定的充分条件, 并设计了一个状态反馈控制器来保证闭环系统输入输出有限时间稳定. 此外, 解

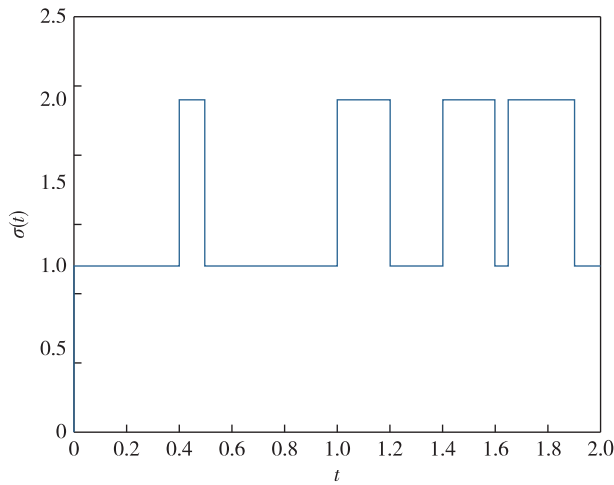
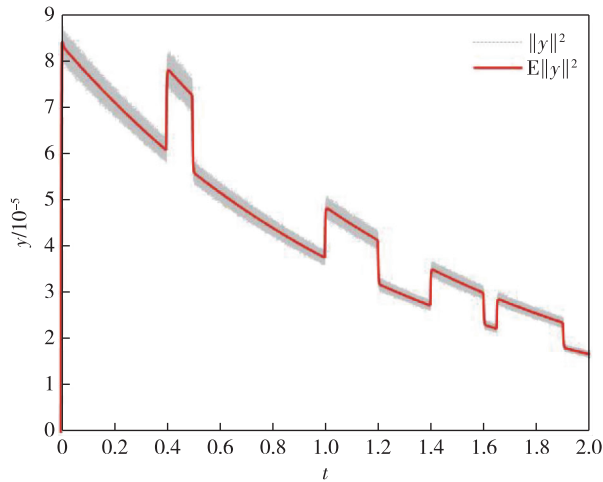
图5 系统的切换函数 $\sigma_2(t)$ Fig. 5 Switching function $\sigma_2(t)$ of system

图6 闭环系统输入输出有限时间稳定

Fig. 6 Input-output finite-time stability of closed-loop system

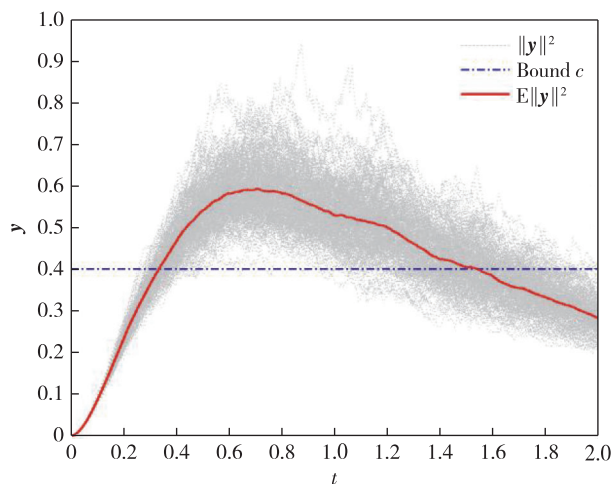


图7 开环系统输入输出有限时间稳定

Fig. 7 Input-output finite-time stability of open-loop system

得了控制器的增益 $K_{\sigma(t)}$. 仿真结果表明了该结果的有效性. 本文系统的有限时间输入输出镇定问题是基于控制器切换与子系统切换同步的情形即同步切换, 此后可以延伸到实际问题中常出现的控制器切换存在滞后的异步切换, 这对系统输入输出有限时间的镇定问题提出了挑战, 需要进一步讨论异步控制器的设计问题.

参考文献

References

- [1] Li Z, Li S Y. Mean square stability of impulsive stochastic delayed reaction-diffusion equations via comparison principle with razumikhin method[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2020, 33(4): 1012-1022
- [2] Yao Q, Lin P, Wang L S, et al. Practical exponential stability of impulsive stochastic reaction-diffusion systems with delays[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020. DOI: 10.1109/TCYB.2020.3022024
- [3] Dorato P. Short-time stability in linear time-varying systems [D]. New York: Polytechnic Institute of Brooklyn, 1961
- [4] Li J, Mu X W, Li K. Event-triggered finite-time bounded and finite-time stability for networked control systems under DoS attacks[J]. International Journal of Systems Science, 2020, 51(15): 2820-2836
- [5] Gao X B, Ren H R, Deng F Q, et al. Observer-based finite-time H_∞ control for uncertain discrete-time nonhomogeneous Markov jump systems [J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(4): 1730-1749
- [6] Zhang T L, Deng F Q, Zhang W H. Finite-time stability and stabilization of linear discrete time-varying stochastic systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(3): 1247-1267
- [7] Amato F, Ambrosino R, Cosentino C, et al. Input-output finite time stabilization of linear systems[J]. Automatica, 2010, 46(9): 1558-1562
- [8] Guo Y, Yao Y, Wang S C, et al. Input-output finite-time stabilization of linear systems with finite-time boundedness [J]. ISA Transactions, 2014, 53(4): 977-982
- [9] 韩晓霞, 吴保卫, 刘丽丽, 等. 不确定时变奇异系统的鲁棒输入输出有限时间稳定[J]. 纺织高校基础科学学报, 2015, 28(1): 72-78
HAN Xiaoxia, WU Baowei, LIU Lili, et al. Robust input-output finite-time stability of time-varying singular systems with uncertainties[J]. Basic Sciences Journal of Textile Universities, 2015, 28(1): 72-78
- [10] Liang J X, Wu B W, Wang Y E, et al. Input-output finite-time stability of fractional-order positive switched systems [J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2019, 38(4): 1619-1638
- [11] 杨洋, 吴保卫, 王月娥. 基于事件触发异步切换系统的输入输出有限时间稳定[J]. 山东大学学报(理学版), 2020, 55(2): 118-126

- YANG Yang, WU Baowei, WANG Yue'e. Input-output finite time stability of asynchronous switched systems with event-triggered [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2020, 55(2):118-126
- [12] Amato F, De Tommasi G, Pironti A. Input-output finite-time stabilization of impulsive linear systems; necessary and sufficient conditions [J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2016, 19:93-106
- [13] 郭柏灵, 蒲学科. 随机无穷维动力系统[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2009
- [14] Krylov N V, Rozovskii B L. Stochastic evolution equations [J]. Journal of Soviet Mathematics, 1981, 16(4):1233-1277
- [15] Kang H W, Zheng L K, Othmer H G. A new method for choosing the computational cell in stochastic reaction-diffusion systems [J]. Journal of Mathematical Biology, 2012, 65(6/7):1017-1099
- [16] Ali M S, Saravanan S, Palanisamy L. Stochastic finite-time stability of reaction-diffusion Cohen-Grossberg neural networks with time-varying delays [J]. Chinese Journal of Physics, 2019, 57:314-328
- [17] Liu X Z, Wu K N, Zhang W H. Mean square finite-time boundary stabilisation and H_∞ boundary control for stochastic reaction-diffusion systems [J]. International Journal of Systems Science, 2019, 50(7):1388-1398
- [18] Sun Z D. Switched linear systems: control and design [M]. London: Springer Verlag, 2005
- [19] Guérin F, Lefebvre D, Mboup A B, et al. Hybrid modeling for performance evaluation of multisource renewable energy systems [J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2011, 8(3):570-580
- [20] Pellanda P C, Apkarian P, Tuan H D. Missile autopilot design via a multi-channel LFT/LPV control method [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2002, 12(1):1-20
- [21] Li X, Zhou M, Fang X. Finite-time H_∞ control of distributed parameter switched systems with event-triggered scheme [J]. Asian Journal of Control, 2020, 2:1-11
- [22] Dai X S, Deng F Q, Luo W G. Stability of stochastic distributed parameter switched systems [C] // Proceedings of the 31st Chinese Control Conference. July 25-27, 2012, Hefei, China. IEEE, 2012:1585-1589
- [23] Han X X, Wu K N, Ding X H. Finite-time stabilization for stochastic reaction-diffusion systems with Markovian switching via boundary control [J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 385:125422
- [24] Liu K. Stability of infinite dimensional stochastic differential equations with applications [M]. New York: Chapman and Hall/CRC, 2005
- [25] Zhao P, Feng W, Kang Y. Stochastic input-to-state stability of switched stochastic nonlinear systems [J]. Automatica, 2012, 48(10):2569-2576
- [26] Zhang C L, Deng F Q, Dai X S, et al. Synchronization of reaction-diffusion stochastic complex networks [J]. International Journal of Applied and Computational Mathematics, 2019, 5(1):1-15
- [27] Amato F, Carannante G, De Tommasi G, et al. Input-output finite-time stability of linear systems: necessary and sufficient conditions [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(12):3051-3063
- [28] Blasio G, Kunisch K, Sinestrari E. Stability for abstract linear functional differential equations [J]. Israel Journal of Mathematics, 1985, 50(3):231-263
- [29] Dragomir S S. Some Gronwall type inequalities and applications [M]. New York: Nova Science, 2003

Input-output finite-time stability and stabilization of stochastic distributed parameter switched systems

ZUO Huang¹ DAI Xisheng¹ DENG Feiqi²

¹ School of Electrical and Information Engineering, Guangxi University of Science and Technology, Liuzhou 545616

² School of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641

Abstract Here the input-output finite-time stability for a class of stochastic distributed parameter switched systems is studied. First, the concept of the input-output finite-time stability of system in mean square sense is given. Second, by using the piecewise Lyapunov-Krasovskii function, average dwell time, linear matrix inequality and other tools, the sufficient conditions of input-output finite-time stability are constructed. In addition, a state feedback controller is designed to ensure the input-output finite-time stability of corresponding closed-loop system, which is proved by strict mathematical derivation. Finally, two simulation examples are given to verify the effectiveness of the results obtained.

Key words switched system; stochastic distributed parameter system; input-output finite-time stability; linear matrix inequality