



基于观测器的离散马氏跳变系统的故障估计

摘要

基于观测器的离散马氏跳变系统(D-MJSs)是随机的,但系统待估计的故障是确定性信号,因此很难直接研究该系统的故障估计问题.针对该问题,本文提出一种构造辅助系统方法,通过对随机变量取期望来构造确定性的中间变量,进而建立的中间估计器可以同时估计系统状态和故障.此外,基于一种新的放缩手段,进一步考虑转移概率矩阵(TPM)不确定的情况.所有条件均以线性矩阵不等式(LMIs)给出,并保证状态误差是输入状态稳定的.数值仿真算例验证了所提方法的有效性和优越性.

关键词

故障估计; Markov 跳变系统; 观测器; 随机中间变量; 中间估计器

中图分类号 TP13; TP273

文献标志码 A

收稿日期 2021-06-23

资助项目 国家自然科学基金(62073158, 61473140); 辽宁省“兴辽人才”支持计划(XLYC1807030); 辽宁省“高校创新人才”计划(LR2017029); 辽宁省教育厅科研基金(L2016024)

作者简介

王国良,男,博士,教授,研究方向为 Markov 随机过程的建模、控制及应用. glwang@lnpu.edu.cn

0 引言

马氏跳变系统(MJS)是一类特殊的混杂系统,这类系统通常包括两种机制,分别称为时间演化机制和事件驱动机制.前者是状态向量,后者是 Markov 切换信号,决定了哪个子系统被激活.因此,马氏系统用来描述随机系统的故障估计问题是非常方便的^[1-2].当然,在其他问题上也是如此,如 H_2 和 H_∞ 控制^[3-5]、滤波及估计执行器和传感器故障^[6-7]、保成本控制^[8]等.

目前,故障估计的方法主要包括基于观测器的方法和基于信号重构的方法.其中,基于观测器的方法不仅能对系统的状态进行估计,而且也能准确地反映故障信息,它主要包含基于自适应观测器^[9]、鲁棒观测器^[10]以及分布式观测器^[11].当系统的参数存在跳变特性时,文献[12-13]考虑了随机通信延迟的马氏系统的故障估计问题,文献[14-16]考虑了执行器和传感器故障的马氏系统综合.文献[17]则考虑切换系统的故障估计问题,设计了一个鲁棒观测器来同时估计系统的状态与故障.该方法虽然很好地处理了基于观测器的切换系统的故障估计问题,但依然有问题需要进一步考虑,比如,用一个随机信号去估计确定性信号.因此,本文提出了一种方法来处理马氏系统与待估计确定性信号之间的问题.

本文采用构建辅助系统的方法研究基于观测器的 D-MJSs 故障估计问题.主要贡献如下:1)提出一种新的方法来处理故障估计问题,有效解决了随机系统与确定性故障估计之间的矛盾;2)本文方法更具一般性,且保守性更小;3)为了减小不确定 TPM 带来的影响,使用一些新的放缩手段应用于辅助系统,来处理具有不确定 TPM 的问题;4)所有条件都以 LMI 形式给出,并且可以应用于其他系统或问题.

注 1 $\mathcal{E}[\cdot]$ 表示期望; $\|\cdot\|$ 是欧氏向量范数或矩阵范数; \mathbf{N} 表示自然数的集合; 序列 $\{\cdot\}$ 的上确界范数 $\sup \|\cdot\|$ 用 $\|\cdot\|_\infty$ 表示; \otimes 表示 Kronecker 积,并且 $(\mathbf{M})^* = \mathbf{M} + \mathbf{M}^T$; 如果函数 γ 是连续的,严格递增且 $\gamma(0) = 0$,那么函数 γ 为 \mathcal{K} 类函数.如果 γ 是 \mathcal{K} 类函数,并且它满足 $s \rightarrow \infty$ 时, $\gamma(s) \rightarrow \infty$ 则称其为 \mathcal{K}_∞ 类函数.如果对于固定的 $k \in \mathbf{N}$, 函数 $\beta(\cdot, k) \in \mathcal{K}$, 对于固定的 $s \geq 0$, 函数 $\beta(s, \cdot)$ 是递减的, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\beta(s, k) \rightarrow 0$, 则称其为 \mathcal{KL} 类函数.

1 准备知识和问题表述

考虑一个在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上定义的 D-MJSs, 即:

¹ 辽宁石油化工大学 信息与控制工程学院, 抚顺, 113001

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_{r(k)}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_{r(k)}\mathbf{u}(k) + \\ \quad \mathbf{E}_{r(k)}\mathbf{f}(k) + \mathbf{D}_{r(k)}\boldsymbol{\omega}(k), \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_{r(k)}\mathbf{x}(k), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{u}(k) \in \mathbf{R}^m$ 分别是系统状态和控制输入, $\mathbf{f}(k) \in \mathbf{R}^r$ 和 $\boldsymbol{\omega}(k) \in \mathbf{R}^d$ 分别是执行器故障和干扰输入, $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{R}^p$ 是测量输出. $\mathbf{A}_{r(k)}$, $\mathbf{B}_{r(k)}$, $\mathbf{C}_{r(k)}$, $\mathbf{D}_{r(k)}$ 和 $\mathbf{E}_{r(k)}$ 是依赖于模态 $r(k)$ 的适当维数矩阵, 而 $\{r(k), k \in \mathbf{N}\}$ 是在集合 $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ 上取值的 Markov 过程, 其转移概率矩阵 $\boldsymbol{\Pi} \triangleq (\pi_{ij})$ 定义为

$$\pi_{ij} = Pr\{r(k+1) = j \mid r(k) = i\}, \quad (2)$$

其中 $0 \leq \pi_{ij} \leq 1, i, j \in \mathcal{N}$, 并且 $\sum_{j=1}^N \pi_{ij} = 1$.

类似于文献[9, 17-18], 系统(1)的估计系统描述为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}_{r(k)}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}_{r(k)}\mathbf{u}(k) + \\ \quad \mathbf{E}_{r(k)}\hat{\mathbf{f}}(k) + \mathbf{L}_{r(k)}(\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)), \\ \hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}_{r(k)}\hat{\mathbf{x}}(k), \\ \hat{\mathbf{f}}(k+1) = \hat{\mathbf{f}}(k) + \mathbf{F}_{r(k)}(\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)), \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\hat{\mathbf{x}}(k)$, $\hat{\mathbf{y}}(k)$, $\hat{\mathbf{f}}(k)$ 分别是 $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{y}(k)$, $\mathbf{f}(k)$ 的估计值, $\mathbf{L}_{r(k)}$ 和 $\mathbf{F}_{r(k)}$ 是设计的估计器增益.

注 2 尽管基于系统(1)可直接建立估计系统(3), 但同时会出现一些问题. 首先, 对于系统(3)中的 $\hat{\mathbf{f}}(k+1)$ 来说, 故障 $\mathbf{f}(k)$ 的估计 $\hat{\mathbf{f}}(k)$ 与增益 $\mathbf{F}_{r(k)}$, 信号 $\mathbf{y}(k)$ 和 $\hat{\mathbf{y}}(k)$ 之间存在矛盾, 也就是说要估计的故障 $\mathbf{f}(k)$ 是确定性的, 而上述增益和系统输出是随机的. 其次, 由于估计系统(3)中估计信号 $\hat{\mathbf{f}}(k)$ 的构成是随机的, 因此不能直接用来估计 $\mathbf{f}(k)$. 换句话说, 应该利用概率统计的方法来估计, 比如 $\mathcal{E}[\hat{\mathbf{f}}(k)]$. 但是, 相关的计算过程非常复杂且不易实现.

为了解决上述问题, 本文提出一种构建辅助系统的方法^[18], 即状态变量定义为 $\mathbf{q}_i(k) = \mathcal{E}[\mathbf{x}(k)\mathbf{1}_{|r(k)=i}]$. 其中, $\mathbf{1}_{|r(k)=i}$ 表示指示函数, 描述为: 如果 $r(k) = i$, 则 $\mathbf{1}_{|r(k)=i} = \mathbf{1}$; 否则, $\mathbf{1}_{|r(k)=i} = 0$. 因此, 故障估计 $\hat{\mathbf{f}}_s(k)$ 重新表示为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_s(k+1) &= \hat{\mathbf{f}}_s(k) + \mathcal{E}[\mathbf{F}_{r(k)}(\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k))] = \\ &= \hat{\mathbf{f}}_s(k) + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \mathbf{C}_i (\mathbf{q}_i(k) - \hat{\mathbf{q}}_i(k)), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\mathbf{q}_i(k)$ 和 $\hat{\mathbf{q}}_i(k)$ 分别是在下面给出的状态变量与其估计, $\hat{\mathbf{y}}(k)$ 是输出的估计, 也将在下面给出. 根据 $\mathbf{q}_i(k)$ 的定义, 可以得到

$$\mathcal{E}[\mathbf{x}(k)] = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}[\mathbf{x}(k)\mathbf{1}_{|r(k)=i}] = \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i(k). \quad (5)$$

通过 $\mathbf{q}_i(k)$ 的定义, 进一步得出

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\mathbf{x}(k+1)\mathbf{1}_{|r(k+1)=j}] &= \\ \mathcal{E}\left[\sum_{i=1}^N (\mathbf{A}_i\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}(k) + \mathbf{E}_i\mathbf{f}(k) + \right. \\ \left. \mathbf{D}_i\boldsymbol{\omega}(k))\mathbf{1}_{|r(k)=i}\mathbf{1}_{|r(k+1)=j}\right] &= \\ \sum_{i=1}^N \pi_{ij} \{ \mathbf{A}_i\mathcal{E}[\mathbf{x}(k)\mathbf{1}_{|r(k)=i}] + \\ \mathbf{B}_i\mathcal{E}[\mathbf{u}(k)\mathbf{1}_{|r(k)=i}] + \mathbf{E}_i\mathbf{f}(k) + \mathbf{D}_i\boldsymbol{\omega}(k) \} &= \\ \sum_{i=1}^N \pi_{ij} (\mathbf{A}_i\mathbf{q}_i(k) + \mathbf{B}_i\mathbf{u}_i(k) + \mathbf{E}_i\mathbf{f}(k) + \mathbf{D}_i\boldsymbol{\omega}(k)), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\mathbf{u}_i(k) = \mathcal{E}[\mathbf{u}(k)\mathbf{1}_{|r(k)=i}]$. 为了便于后文的描述, 现定义 $\mathbf{q}(k) = [\mathbf{q}_1^T(k) \ \dots \ \mathbf{q}_N^T(k)]^T$, 并基于式(6)得到

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(k+1) &= (\boldsymbol{\Pi}^T \otimes \mathbf{I}_n) (\mathbf{A}\mathbf{q}(k) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k) + \\ &\quad \mathbf{E}\mathbf{f}(k) + \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}(k)), \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\mathbf{A} = \text{diag}\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N\}$, $\mathbf{B} = \text{diag}\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_N\}$, $\mathbf{D} = [\mathbf{D}_1^T \ \dots \ \mathbf{D}_N^T]^T$, $\mathbf{E} = [\mathbf{E}_1^T \ \dots \ \mathbf{E}_N^T]^T$, $\bar{\mathbf{u}}(k) = [\mathbf{u}_1^T(k) \ \dots \ \mathbf{u}_N^T(k)]^T$. 因此, 辅助系统为

$$\begin{cases} \mathbf{q}(k+1) = (\boldsymbol{\Pi}^T \otimes \mathbf{I}_n) (\mathbf{A}\mathbf{q}(k) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k) + \\ \quad \mathbf{E}\mathbf{f}(k) + \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}(k)), \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{q}(k), \end{cases} \quad (8)$$

其估计系统构造为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}}(k+1) = (\boldsymbol{\Pi}^T \otimes \mathbf{I}_n) (\mathbf{A}\hat{\mathbf{q}}(k) + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}(k) + \\ \quad \mathbf{E}\hat{\mathbf{f}}_s(k) + \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{q}(k) - \hat{\mathbf{q}}(k))), \\ \hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{q}}(k), \\ \hat{\mathbf{f}}_s(k+1) = \hat{\mathbf{f}}_s(k) + \mathbf{F}\mathbf{C}(\mathbf{q}(k) - \hat{\mathbf{q}}(k)), \end{cases} \quad (9)$$

其中, $\hat{\mathbf{q}}(k)$ 为 $\mathbf{q}(k)$ 的估计, 其他矩阵的具体定义为 $\mathbf{L} = \text{diag}\{\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_N\}$, $\mathbf{C} = \text{diag}\{\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_N\}$, $\mathbf{F} = [\mathbf{F}_1 \ \dots \ \mathbf{F}_N]$. 根据 $\mathbf{e}_q(k) = \mathbf{q}(k) - \hat{\mathbf{q}}(k)$ 和 $\mathbf{e}_f(k) = \mathbf{f}(k) - \hat{\mathbf{f}}_s(k)$, 可以得到

$$\mathbf{e}_q(k+1) = (\boldsymbol{\Pi}^T \otimes \mathbf{I}_n) [(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}_q(k) + \mathbf{E}\mathbf{e}_f(k) + \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}(k)], \quad (10)$$

$$\mathbf{e}_f(k+1) = \mathbf{f}(k+1) - \hat{\mathbf{f}}_s(k) - \mathbf{F}\mathbf{C}\mathbf{e}_q(k) = \Delta\mathbf{f}(k) + \mathbf{e}_f(k) - \mathbf{F}\mathbf{C}\mathbf{e}_q(k). \quad (11)$$

将式(10), (11)合并, 得到

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_q(k+1) \\ \mathbf{e}_f(k+1) \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\Pi}^T \otimes \mathbf{I}_n)(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}) & (\boldsymbol{\Pi}^T \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{E} \\ -\mathbf{F}\mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_q(k) \\ \mathbf{e}_f(k) \end{bmatrix} &+ \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{H}^T \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{D} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}(k) \\ \Delta \mathbf{f}(k) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

将式(12)简化表示为

$$\tilde{\mathbf{e}}(k+1) = (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{C}}) \tilde{\mathbf{e}}(k) + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{v}(k), \quad (13)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{e}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_q(k) \\ \mathbf{e}_r(k) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{H}^T \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{L} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{H}^T \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{A} & (\mathbf{H}^T \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{E} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = [\mathbf{C} \quad 0], \quad \tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} (\mathbf{H}^T \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{D} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}(k) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}(k) \\ \Delta \mathbf{f}(k) \end{bmatrix}.$$

定义 1^[17] 系统(13)是输入状态稳定(ISS),如果存在 \mathcal{KL} 类函数 β 和 \mathcal{K} 类函数 γ ,对于任何初始条件 $\tilde{\mathbf{e}}(0)$ 和输入 $\{\mathbf{v}(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$,系统的所有解都满足

$$\|\tilde{\mathbf{e}}(k)\| \leq \beta(\|\tilde{\mathbf{e}}(0)\|, k) + \gamma(\|\mathbf{v}\|_\infty).$$

2 主要内容

定理 1 称具有观测器增益的系统(13)是 ISS,如果对于给定的标量 $\alpha \geq 1$,存在正定对称矩阵 $\mathbf{P}_i > 0, \mathbf{P}_{N+1} > 0$,矩阵 $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ 和 $\mathbf{Y}_j, \forall i \in \mathcal{N}, \forall j \in \mathcal{M} = \{1, \dots, 2N\}$,满足下式

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P} & 0 & (\mathbf{G}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{Y}\tilde{\mathbf{C}})^T & \mathbf{I} \\ * & -\alpha\mathbf{I} & (\mathbf{G}\tilde{\mathbf{D}})^T & 0 \\ * & * & \mathbf{P} - (\mathbf{G})^* & 0 \\ * & * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

$$\mathbf{I} \leq \mathbf{P}, \quad (15)$$

$$\mathbf{P} \leq \alpha\mathbf{I}, \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{P} = \text{diag}\{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N, \mathbf{P}_{N+1}\},$$

$$\mathbf{G} = \text{diag}\{\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2\},$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \pi_{11}\mathbf{Y}_1 & \dots & \pi_{N1}\mathbf{Y}_N \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_{1N}\mathbf{Y}_1 & \dots & \pi_{NN}\mathbf{Y}_N \\ \mathbf{Y}_{N+1} & \dots & \mathbf{Y}_{2N} \end{bmatrix}.$$

观测器增益为

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{Y}_i, \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{G}_2^{-1}\mathbf{Y}_{i+N}. \quad (17)$$

证明 对于系统(13),选取如下形式的 Lyapunov 函数

$$V(\tilde{\mathbf{e}}(k)) = \tilde{\mathbf{e}}^T(k) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{e}}(k), \quad (18)$$

其中 $\mathbf{P} > 0$.通过计算,可以得到

$$\begin{aligned} \Delta V(\tilde{\mathbf{e}}(k)) &= \\ \tilde{\mathbf{e}}^T(k+1) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{e}}(k+1) - \tilde{\mathbf{e}}^T(k) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{e}}(k) &= \\ [(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{C}}) \tilde{\mathbf{e}}(k) + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{v}(k)]^T \mathbf{P} [(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{C}}) \tilde{\mathbf{e}}(k) + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{v}(k)] - \tilde{\mathbf{e}}^T(k) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{e}}(k) &= \\ \tilde{\mathbf{e}}^T(k) (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{C}})^T \mathbf{P} (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{C}}) \tilde{\mathbf{e}}(k) - \tilde{\mathbf{e}}^T(k) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{e}}(k) + \mathbf{v}^T(k) \tilde{\mathbf{D}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{v}(k) + \tilde{\mathbf{e}}^T(k) (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{C}})^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{v}(k) + \mathbf{v}^T(k) \tilde{\mathbf{D}}^T \mathbf{P} (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{C}}) \tilde{\mathbf{e}}(k) &= \\ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}(k) \\ \mathbf{v}(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 \\ * & \Xi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}(k) \\ \mathbf{v}(k) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $\Xi_1 = (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{C}})^T \mathbf{P} (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{C}}) - \mathbf{P}, \Xi_2 = (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{C}})^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{D}}, \Xi_3 = \tilde{\mathbf{D}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{D}}$.根据 $-\mathbf{G}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}^T \leq \mathbf{P} - \mathbf{G} - \mathbf{G}^T$,如果式(14)成立,则

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P} & 0 & (\mathbf{G}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{Y}\tilde{\mathbf{C}})^T & \mathbf{I} \\ * & -\alpha\mathbf{I} & (\mathbf{G}\tilde{\mathbf{D}})^T & 0 \\ * & * & -\mathbf{G}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}^T & 0 \\ * & * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (20)$$

根据式(17),得到

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P} & 0 & (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{C}})^T & \mathbf{I} \\ * & -\alpha\mathbf{I} & \tilde{\mathbf{D}}^T & 0 \\ * & * & -\mathbf{P}^{-1} & 0 \\ * & * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (21)$$

进一步计算得到

$$\begin{aligned} - \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{C}})^T & \mathbf{I} \\ \tilde{\mathbf{D}}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{P} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{D}} \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} -\mathbf{P} & 0 \\ 0 & -\alpha\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (22)$$

将其计算化简得到

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 + \mathbf{I} & \Xi_2 \\ * & \Xi_3 - \alpha\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (23)$$

基于式(23),可以得到

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}(k) \\ \mathbf{v}(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Xi_1 + \mathbf{I} & \Xi_2 \\ * & \Xi_3 - \alpha\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}(k) \\ \mathbf{v}(k) \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}(k) \\ \mathbf{v}(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 \\ * & \Xi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}(k) \\ \mathbf{v}(k) \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}(k) \\ \mathbf{v}(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\alpha\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}(k) \\ \mathbf{v}(k) \end{bmatrix} = \\ \Delta V(\tilde{\mathbf{e}}(k)) + \tilde{\mathbf{e}}^T(k) \tilde{\mathbf{e}}(k) - \alpha \mathbf{v}^T(k) \mathbf{v}(k) < 0, \end{aligned} \quad (24)$$

它等价于

$$V(\tilde{\mathbf{e}}(k+1)) - V(\tilde{\mathbf{e}}(k)) < -\tilde{\mathbf{e}}^T(k) \tilde{\mathbf{e}}(k) +$$

$$\alpha \mathbf{v}^T(k) \mathbf{v}(k), \quad (25)$$

根据式(16),(18)和(25),得

$$V(\tilde{\mathbf{e}}(k+1)) < V(\tilde{\mathbf{e}}(k)) - \tilde{\mathbf{e}}^T(k) \tilde{\mathbf{e}}(k) + \alpha \|\mathbf{v}(k)\|^2 \leq V(\tilde{\mathbf{e}}(k)) \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \alpha \|\mathbf{v}(k)\|^2. \quad (26)$$

基于式(26),从0归纳到 k ,可以得到

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{e}}(k)) &\leq \\ V(\tilde{\mathbf{e}}(k-1)) &\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \alpha \|\mathbf{v}(k-1)\|^2 \leq \\ V(\tilde{\mathbf{e}}(k-2)) &\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \\ \alpha \|\mathbf{v}(k-1)\|^2 &+ \alpha \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \|\mathbf{v}(k-2)\|^2 \leq \\ &\vdots \\ V(\tilde{\mathbf{e}}(0)) &\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^k + \alpha \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} \|\mathbf{v}(0)\|^2 + \right. \\ &\left. \dots + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \|\mathbf{v}(k-2)\|^2 + \|\mathbf{v}(k-1)\|^2 \right] = \\ V(\tilde{\mathbf{e}}(0)) &\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^k + \alpha \sum_{\ell=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{k-\ell-1} \|\mathbf{v}(\ell)\|^2 \leq \\ &\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^k V(\tilde{\mathbf{e}}(0)) + \alpha^2 \|\mathbf{v}\|_{\infty}^2. \quad (27) \end{aligned}$$

根据式(15),(16)和(27),可以得到

$$\|\tilde{\mathbf{e}}(k)\|^2 \leq \alpha \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^k \|\tilde{\mathbf{e}}(0)\|^2 + \alpha^2 \|\mathbf{v}\|_{\infty}^2, \quad (28)$$

进一步简化式(28),有

$$\|\tilde{\mathbf{e}}(k)\| \leq \sqrt{\alpha \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^k} \|\tilde{\mathbf{e}}(0)\| + \alpha \|\mathbf{v}\|_{\infty}. \quad (29)$$

证毕.

从定理1可以看出,TPM需要准确地给出,但在一些应用中,很难准确得到.因此,当它不确定时,描述为

$$\mathbf{\Pi} = \tilde{\mathbf{\Pi}} + \Delta \tilde{\mathbf{\Pi}}, \quad (30)$$

其中 $\tilde{\mathbf{\Pi}} = (\tilde{\pi}_{ij})$, $\Delta \tilde{\mathbf{\Pi}} = (\Delta \tilde{\pi}_{ij})$ 分别满足 $\sum_{j=1}^N \tilde{\pi}_{ij} = 1$,

$\sum_{j=1}^N \Delta \tilde{\pi}_{ij} = 0$.为了实现故障估计,假设事先已知 $\Delta \tilde{\mathbf{\Pi}}$ 的范数边界,表示为

$$\|\Delta \tilde{\mathbf{\Pi}}\| \leq \delta, \quad (31)$$

其中 $\delta \geq 0$ 是预先给定的.由于 $\tilde{\mathbf{\Pi}}$ 包含在系统(30)中,且不确定,因此很难甚至不可能直接进行类似于定理1的分析和计算.为了考虑一般情况下与式

(30)类似问题,构造另一个辅助系统代替辅助系统(8),表示为

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{q}}(k+1) = (\tilde{\mathbf{\Pi}}^T \otimes \mathbf{I}_n + \delta \sqrt{\zeta} \mathbf{I}_{Nn}) (\mathbf{A} \tilde{\mathbf{q}}(k) + \\ \quad \mathbf{B} \tilde{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{E} \mathbf{f}(k) + \mathbf{D} \boldsymbol{\omega}(k)), \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \tilde{\mathbf{q}}(k), \end{cases} \quad (32)$$

其中 $\zeta > 0$ 是要设计的参数,并且 $\tilde{\mathbf{u}}(k) = \mathbf{K} \tilde{\mathbf{q}}(k)$.定义 $\tilde{\mathbf{e}}_q(k) = \mathbf{q}(k) - \tilde{\mathbf{q}}(k)$, $\tilde{\mathbf{u}}(k) = \mathbf{K} \tilde{\mathbf{q}}(k)$ 与系统(8)中定义相同,并且根据系统(8)和(32)得到

$$\tilde{\mathbf{e}}_q(k+1) = (\mathbf{\Pi}^T \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{e}}_q(k) + (\Delta \tilde{\mathbf{\Pi}}^T \otimes \mathbf{I}_n - \delta \sqrt{\zeta} \mathbf{I}_{Nn}) (\bar{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{q}}(k) + \mathbf{E} \mathbf{f}(k) + \mathbf{D} \boldsymbol{\omega}(k)), \quad (33)$$

其中 $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K}$.

命题1 称满足条件(30),(31)系统(8)是ISS,如果对于给定的 $\zeta > 0$,存在 $\tilde{\mathbf{P}} > 0$ 满足

$$\begin{aligned} 2[(\tilde{\mathbf{\Pi}}^T \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mathbf{A}}]^T \tilde{\mathbf{P}} (\tilde{\mathbf{\Pi}}^T \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mathbf{A}} + \\ 2\zeta \delta^2 \bar{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{P}} < 0, \end{aligned} \quad (34)$$

以及以下任何一种条件

$$(a) \tilde{\mathbf{P}} \geq \mathbf{I}_{Nn}, \tilde{\mathbf{P}} \leq \zeta \mathbf{I}_{Nn};$$

$$(b) \tilde{\mathbf{P}} \leq \mathbf{I}_{Nn}, \zeta \tilde{\mathbf{P}} \geq \mathbf{I}_{Nn}.$$

此外, $\tilde{\mathbf{q}}(k)$ 和误差 $\tilde{\mathbf{e}}_q(k)$ 也是ISS.

证明 为了更简单表示,系统(8)重写为

$$\mathbf{q}(k+1) = \tilde{\mathbf{A}}_c \mathbf{q}(k) + \mathbf{g}(k), \quad (35)$$

其中 $\tilde{\mathbf{A}}_c = (\mathbf{\Pi}^T \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mathbf{A}}$, $\mathbf{g}(k) \triangleq (\mathbf{\Pi}^T \otimes \mathbf{I}_n) (\mathbf{E} \mathbf{f}(k) + \mathbf{D} \boldsymbol{\omega}(k))$.基于 $\mathbf{f}(k)$ 和 $\boldsymbol{\omega}(k)$ 的性质,显然

$$\|\mathbf{g}(k)\| \leq \varepsilon \|\mathbf{v}\|_{\infty}, \quad (36)$$

其中 ε 是正标量.基于式(35),可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(k) &= \tilde{\mathbf{A}}_c \mathbf{q}(k-1) + \mathbf{g}(k-1) = \\ &\tilde{\mathbf{A}}_c (\tilde{\mathbf{A}}_c \mathbf{q}(k-2) + \mathbf{g}(k-2)) + \mathbf{g}(k-1) = \\ &\vdots \\ &\tilde{\mathbf{A}}_c^k \mathbf{q}(0) + \sum_{j=1}^k \tilde{\mathbf{A}}_c^{j-1} \mathbf{g}(k-j). \end{aligned} \quad (37)$$

如果条件

$$\rho(\tilde{\mathbf{A}}_c) < 1 \quad (38)$$

成立,其中 $\rho(\mathbf{M})$ 表示矩阵 \mathbf{M} 的谱半径,则可以得到

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}(k)\| &\leq \rho^k(\tilde{\mathbf{A}}_c) \|\mathbf{q}(0)\| + \sum_{j=1}^k \rho^{j-1}(\tilde{\mathbf{A}}_c) \varepsilon \|\mathbf{v}\|_{\infty} \leq \\ &\frac{1}{1 - \rho(\tilde{\mathbf{A}}_c)} \max\{\|\mathbf{q}(0)\|, \varepsilon \|\mathbf{v}\|_{\infty}\}. \end{aligned} \quad (39)$$

关于条件(38),它等价于以下系统的稳定性

$$\mathbf{q}(k+1) = \tilde{\mathbf{A}}_c \mathbf{q}(k), \quad (40)$$

其Lyapunov函数为

$$V(k) = \mathbf{q}^T(k) \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{q}(k). \quad (41)$$

基于文献[19]中的引理2,满足条件是(a)或(b),得到

$$\begin{aligned} \Delta V(k) = & \\ \mathbf{q}^T(k) (\tilde{\mathbf{A}}_c^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}}_c - \tilde{\mathbf{P}}) \mathbf{q}(k) = & \\ \mathbf{q}^T(k) \{ [(\tilde{\mathbf{H}}^T \otimes \mathbf{I}_n + \Delta \tilde{\mathbf{H}}^T \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mathbf{A}}]^T \tilde{\mathbf{P}} (\tilde{\mathbf{H}}^T \otimes \mathbf{I}_n + & \\ \Delta \tilde{\mathbf{H}}^T \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{P}} \} \mathbf{q}(k) \leq & \\ \mathbf{q}^T(k) \{ 2 [(\tilde{\mathbf{H}}^T \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mathbf{A}}]^T \tilde{\mathbf{P}} (\tilde{\mathbf{H}}^T \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mathbf{A}} + & \\ 2\zeta \delta^2 \bar{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{P}} \} \mathbf{q}(k) < 0, & \quad (42) \end{aligned}$$

式(34)保证其成立.另一方面,条件(34)可以得出

$$\bar{\mathbf{q}}(k+1) = (\tilde{\mathbf{H}}^T \otimes \mathbf{I}_n + \delta\sqrt{\zeta} \mathbf{I}_{N_n}) \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{q}}(k) \quad (43)$$

是渐近稳定的,在相似的 Lyapunov 函数条件下,计算得出

$$\begin{aligned} \Delta V(k) = & \\ \bar{\mathbf{q}}^T(k) \{ [(\tilde{\mathbf{H}}^T \otimes \mathbf{I}_n + & \\ \delta\sqrt{\zeta} \mathbf{I}_{N_n}) \bar{\mathbf{A}}]^T \tilde{\mathbf{P}} (\tilde{\mathbf{H}}^T \otimes \mathbf{I}_n + \delta\sqrt{\zeta} \mathbf{I}_{N_n}) \bar{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{P}} \} \bar{\mathbf{q}}(k) \leq & \\ \bar{\mathbf{q}}^T(k) \{ 2 [(\tilde{\mathbf{H}}^T \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mathbf{A}}]^T \tilde{\mathbf{P}} (\tilde{\mathbf{H}}^T \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mathbf{A}} + 2\zeta \delta^2 \bar{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{A}} & \\ - \tilde{\mathbf{P}} \} \bar{\mathbf{q}}(k) < 0. & \quad (44) \end{aligned}$$

类似系统(35)的证明,如果满足此命题中的条件,则可以知道系统(32)和(33)都是 ISS.证毕.

接下来,根据系统(32)可以构造一个估计系统

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}}(k+1) = (\tilde{\mathbf{H}}^T \otimes \mathbf{I}_n + \delta\sqrt{\zeta} \mathbf{I}_{N_n}) [\mathbf{A} \hat{\mathbf{q}}(k) + & \\ \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{E} \hat{\mathbf{f}}_s(k) + \mathbf{L} \mathbf{C} (\bar{\mathbf{q}}(k) - \hat{\mathbf{q}}(k))], & (45) \\ \hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C} \hat{\mathbf{q}}(k), & \\ \hat{\mathbf{f}}_s(k+1) = \hat{\mathbf{f}}_s(k) + \mathbf{F} \mathbf{C} (\bar{\mathbf{q}}(k) - \hat{\mathbf{q}}(k)). & \end{cases}$$

类似于式(10)和(11),可以根据系统(32)和(45)建立

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{e}}_q(k+1) = (\tilde{\mathbf{H}}^T \otimes \mathbf{I}_n + \delta\sqrt{\zeta} \mathbf{I}_{N_n}) [(\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C}) \bar{\mathbf{e}}_q(k) + & \\ \mathbf{E} \mathbf{e}_f + \mathbf{D} \boldsymbol{\omega}(k)], & (46) \\ \bar{\mathbf{e}}_f(k+1) = \Delta \mathbf{f}(k) + \mathbf{e}_f(k) + \mathbf{F} \mathbf{C} \bar{\mathbf{e}}_q(k), & \end{cases}$$

其中 $\bar{\mathbf{e}}_q(k) = \bar{\mathbf{q}}(k) - \hat{\mathbf{q}}(k)$. 然后,得到

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_q(k+1) \\ \bar{\mathbf{e}}_f(k+1) \end{bmatrix} = & \left(\begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{H}}^T \otimes \mathbf{I}_n) (\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C}) & (\tilde{\mathbf{H}}^T \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{E} \\ \mathbf{F} \mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. \delta\sqrt{\zeta} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C} & \mathbf{E} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_q(k) \\ \bar{\mathbf{e}}_f(k) \end{bmatrix} + \\ & \left(\begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{H}}^T \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{D} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \delta\sqrt{\zeta} \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}(k) \\ \Delta \mathbf{f}(k) \end{bmatrix}, & \quad (47) \end{aligned}$$

简化表示为

$$\bar{\mathbf{e}}(k+1) = [\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{C}} + \delta\sqrt{\zeta}(\check{\mathbf{A}} - \check{\mathbf{L}}\check{\mathbf{C}})]\bar{\mathbf{e}}(k) + (\hat{\mathbf{D}} + \delta\zeta\check{\mathbf{D}})\mathbf{v}(k), \quad (48)$$

其中

$$\bar{\mathbf{e}}(k) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_q(k) \\ \bar{\mathbf{e}}_f(k) \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{H}}^T \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{A} & (\tilde{\mathbf{H}}^T \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{E} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{H}}^T \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{L} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{H}}^T \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{D} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

$$\check{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{E} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \check{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \check{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

定理 2 给出满足条件(30),(31)的系统(1),存在估计系统(45),使得具有观测器增益的系统(48)是 ISS,并且辅助系统(32)是辅助系统(8)的有效估计.如果对于给定的标量 $\alpha \geq 1, \delta > 0$ 和 $\zeta > 0$,存在正定对称矩阵 $\mathbf{P}_i > 0, \mathbf{P}_{N+1} > 0, \bar{\mathbf{P}}_i > 0$, 矩阵 $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{U}_i$ 和 $\mathbf{Y}_j, \forall i \in \mathcal{N}, \forall j \in \mathcal{M} = \{1, \dots, 2N\}$, 满足条件(15),(16)和

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{P} & 0 & \boldsymbol{\Phi}_1 & \mathbf{I} \\ 0 & -\alpha \mathbf{I} & \boldsymbol{\Phi}_2 & 0 \\ * & * & \mathbf{P} - (\mathbf{G})^* & 0 \\ * & * & 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (49)$$

$$\begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{P}} & \boldsymbol{\Psi}_1 & \boldsymbol{\Psi}_2 \\ * & \bar{\mathbf{P}} - (\bar{\mathbf{G}})^* & 0 \\ * & 0 & \bar{\mathbf{P}} - (\bar{\mathbf{G}})^* \end{bmatrix} < 0, \quad (50)$$

以及条件(a)或(b),其中

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = (\mathbf{G}\hat{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{Y}}\check{\mathbf{C}})^T + \delta\sqrt{\zeta}(\mathbf{G}\check{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{Y}}\check{\mathbf{C}})^T,$$

$$\boldsymbol{\Phi}_2 = (\mathbf{G}\hat{\mathbf{D}})^T + \delta\sqrt{\zeta}(\mathbf{G}\check{\mathbf{D}})^T,$$

$$\boldsymbol{\Psi}_1 = \sqrt{2} [(\tilde{\mathbf{H}}^T \otimes \mathbf{I}_n) (\mathbf{A}\bar{\mathbf{G}} + \mathbf{B}\mathbf{U})]^T,$$

$$\boldsymbol{\Psi}_2 = \sqrt{2\zeta} \delta (\mathbf{A}\bar{\mathbf{G}} + \mathbf{B}\mathbf{U})^T,$$

以及

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \tilde{\pi}_{11} \mathbf{Y}_1 & \cdots & \tilde{\pi}_{N1} \mathbf{Y}_N \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{\pi}_{1N} \mathbf{Y}_1 & \cdots & \tilde{\pi}_{NN} \mathbf{Y}_N \\ \mathbf{Y}_{N+1} & \cdots & \mathbf{Y}_{2N} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{Y}_N \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{G}} = \text{diag} \{ \mathbf{G}_3, \dots, \mathbf{G}_3 \},$$

$$\mathbf{U} = \text{diag} \{ \mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_N \}, \quad \bar{\mathbf{P}} = \text{diag} \{ \bar{\mathbf{P}}_1, \dots, \bar{\mathbf{P}}_N \},$$

且矩阵 \mathbf{P} 和 \mathbf{G} 依旧是定理1中的形式,观测器增益仍根据式(17)计算,而控制增益为

$$\mathbf{K} \triangleq \text{diag} \{ \mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_N \} = \mathbf{U}\bar{\mathbf{G}}^{-1}. \quad (51)$$

证明 如果满足命题1中的条件,辅助系统(32)可以作为辅助系统(8)的有效估计.根据(50),得出 $\bar{\mathbf{G}}$ 是非奇异的,基于 $-\bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{P}}^{-1}\bar{\mathbf{G}}^T \leq \bar{\mathbf{P}} - (\bar{\mathbf{G}})^*$,如

果式(50)成立,则得到

$$\begin{bmatrix} -\bar{P} & \Psi_1 & \Psi_2 \\ * & -\bar{G}\bar{P}^{-1}\bar{G}^T & 0 \\ * & 0 & -\bar{G}\bar{P}^{-1}\bar{G}^T \end{bmatrix} < 0. \quad (52)$$

基于式(51),得到

$$\begin{bmatrix} -\bar{P} & \sqrt{2}[(\tilde{H}^T \otimes I_n)\bar{A}]^T & \sqrt{2\zeta}\delta\bar{A}^T \\ * & -\bar{P}^{-1} & 0 \\ * & 0 & -\bar{P}^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (53)$$

经过计算,可得到

$$-\bar{P} + 2[(\tilde{H}^T \otimes I_n)\bar{A}]^T\bar{P}(\tilde{H}^T \otimes I_n)\bar{A} + 2\zeta\delta^2\bar{A}^T\bar{P}\bar{A} < 0, \quad (54)$$

式(50)保证了式(54)成立.系统(48)的 Lyapunov 函数如下:

$$V(k) = \bar{e}^T(k)P\bar{e}(k). \quad (55)$$

通过计算得出

$$\begin{aligned} \Delta V(\bar{e}(k)) &= \bar{e}^T(k+1)P\bar{e}(k+1) - \bar{e}^T(k)P\bar{e}(k) = \\ & \{[\hat{A} - \hat{L}\tilde{C} + \delta\sqrt{\zeta}(\check{A} - \check{L}\tilde{C})]\bar{e}(k) + \\ & (\hat{D} + \delta\sqrt{\zeta}\check{D})v(k)\}^T P \{[\hat{A} - \hat{L}\tilde{C} + \\ & \delta\sqrt{\zeta}(\check{A} - \check{L}\tilde{C})]\bar{e}(k) + (\hat{D} + \delta\sqrt{\zeta}\check{D})v(k)\} - \\ & \bar{e}^T(k)P\bar{e}(k) = \bar{e}^T(k)[\hat{A} - \hat{L}\tilde{C} + \delta\sqrt{\zeta}(\check{A} - \check{L}\tilde{C})]^T P(\hat{D} + \\ & \delta\sqrt{\zeta}\check{D})v(k) + v^T(k)(\hat{D} + \delta\sqrt{\zeta}\check{D})^T P[\hat{A} - \hat{L}\tilde{C} + \\ & \delta\sqrt{\zeta}(\check{A} - \check{L}\tilde{C})]\bar{e}(k) + v^T(k)(\hat{D} + \\ & \delta\sqrt{\zeta}\check{D})^T P(\hat{D} + \delta\sqrt{\zeta}\check{D})v(k) - \bar{e}^T(k)P\bar{e}(k) + \\ & \bar{e}^T(k)[\hat{A} - \hat{L}\tilde{C} + \delta\sqrt{\zeta}(\check{A} - \check{L}\tilde{C})]^T P[\hat{A} - \hat{L}\tilde{C} + \\ & \delta\sqrt{\zeta}(\check{A} - \check{L}\tilde{C})]\bar{e}(k) = \\ & \begin{bmatrix} \bar{e}(k) \\ v(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ * & \Omega_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}(k) \\ v(k) \end{bmatrix}, \quad (56) \end{aligned}$$

其中 $\Omega_1 = [\hat{A} - \hat{L}\tilde{C} + \delta\sqrt{\zeta}(\check{A} - \check{L}\tilde{C})]^T P[\hat{A} - \hat{L}\tilde{C} + \delta\sqrt{\zeta}(\check{A} - \check{L}\tilde{C})] - P$, $\Omega_2 = [\hat{A} - \hat{L}\tilde{C} + \delta\sqrt{\zeta}(\check{A} - \check{L}\tilde{C})]^T P(\hat{D} + \delta\sqrt{\zeta}\check{D})$, $\Omega_3 = (\hat{D} + \delta\sqrt{\zeta}\check{D})^T P(\hat{D} + \delta\sqrt{\zeta}\check{D})$.与式(23)相似,可以从式(49)推导出

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 + I & \Omega_2 \\ * & \Omega_3 - \alpha I \end{bmatrix} < 0. \quad (57)$$

下面的证明与定理1中(24)至(29)的步骤相似,在此省略.证毕.

注3 当TPM是不确定时,系统的故障估计问题仍可以通过定理2解决.此外,基于所提出的辅助系统,可以很容易地构造中间估计器.它可以看作是故障估计问题从确定性系统向随机系统的扩展结

果.尽管确定性信号 $f(k)$ 成功估计,但其计算复杂度也是需要考虑的问题.可以看出,所给的LMI的维数较大,同时也包含了许多要求解的变量.其主要原因是所考虑的系统是一个具有 N 个模态的马氏系统.如何进一步降低复杂性是一个必要且重要的问题,这将是今后要做的工作.本文所提出的方法更具有一般性,而且可以扩展到其他问题.第一,因为 $r(k)$ 是一个随机过程,所以一些确定性系统的故障估计问题可以作为本文的一个特殊情形;第二,它可以用来处理半马尔可夫跳变系统,尽管半马尔可夫跳变过程更具有一般性.

3 仿真研究

考虑系统(1)的模型^[17,20],参数为

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.7786 & 0.9908 & 0.1270 \\ 0.1616 & 0.8443 & 0.8144 \\ 0.9214 & 0.9747 & 0.7825 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.2485 & 0.7409 \\ 0.2501 & 0.5257 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.3984 & 0.3263 & 0.7764 \\ 0.7806 & 0.9886 & 0.1297 \\ 0.8814 & 0.4718 & 0.3110 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.2722 & 0.6055 \\ 0.1576 & 0.1580 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.3049 & 0.4247 & 0.8979 \\ 0.8448 & 0.2485 & 0.6921 \\ 0.7558 & 0.9160 & 0.3636 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0.4945 & 0.3020 \\ 0.9237 & 0.9118 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0.1194 & 0.3964 & 0.2454 \\ 0.1034 & 0.2515 & 0.4983 \\ 0.6981 & 0.8655 & 0.2403 \end{bmatrix},$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 0.9894 & 0.7205 \\ 0.1709 & 0.1519 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [0.3815 \quad 0.6916 \quad 0.7183],$$

$$C_2 = [0.0591 \quad 0.8258 \quad 0.4354],$$

$$C_3 = [0.5204 \quad 0.8010 \quad 0.9708],$$

$$C_4 = [0.6995 \quad 0.3081 \quad 0.8767],$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix}, \quad D_2 = D_3 = D_4 = D_1,$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0.2485 \\ 0.2501 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0.2722 \\ 0.1576 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0.4945 \\ 0.9237 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0.9894 \\ 0.1709 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

不失一般性, 将 Markov 过程 $r(k) \in \mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$ 的转移概率给定为

$$H = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix},$$

给定 $\alpha = 65$, 根据定理 1, 可得观测器增益为

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1.0521 \\ 1.0402 \\ 1.4689 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0.7660 \\ 1.2940 \\ 0.8988 \end{bmatrix},$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0.7058 \\ 0.7861 \\ 0.9001 \end{bmatrix}, \quad L_4 = \begin{bmatrix} 0.3377 \\ 0.4033 \\ 0.8703 \end{bmatrix},$$

和

$$F_1 = 0.3290, \quad F_2 = 0.5054,$$

$$F_3 = 0.1137, \quad F_4 = -0.1878.$$

不失一般性, 故障信号 $f(k)$ 如下所示:

$$f(k) = \begin{cases} 0.1k, & k \in (15, 30], \\ 1, & k \in (50, 78], \\ \cos(k/12), & k \in (78, 168], \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

在这里, 本文考虑了三种类型的故障信号, 即常值信号、斜坡信号以及余弦信号. 基于上述参数, 在初始条件 $\mathbf{x}(0) = [1 \quad -1 \quad 0]^T$ 下, 得到了 $\zeta(k) \triangleq E[\mathbf{x}(k)] = \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i(k)$, $\hat{\zeta}(k) \triangleq E[\hat{\mathbf{x}}(k)] = \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{q}}_i(k)$ 状态的仿真结果图 1, 以及 $r(k)$ 的模态图 2. 同时, 图 3 表示系统估计误差 $e_x(k) \triangleq \zeta(k) - \hat{\zeta}(k)$ 的响应. 仿真结果表明, 系统误差满足 ISS, 验证了本文所提出方法的有效性. 关于故障估计效果, 图 4a 中给出了故障 $f(k)$ 及其估计 $\hat{f}(k)$, 图 4b 中给出了估计误差 $e_f(k) \triangleq f(k) - \hat{f}(k)$. 仿真表明, 尽管故障信号是时变的, 但估计效果良好, 表明所给提出的方法是有效的.

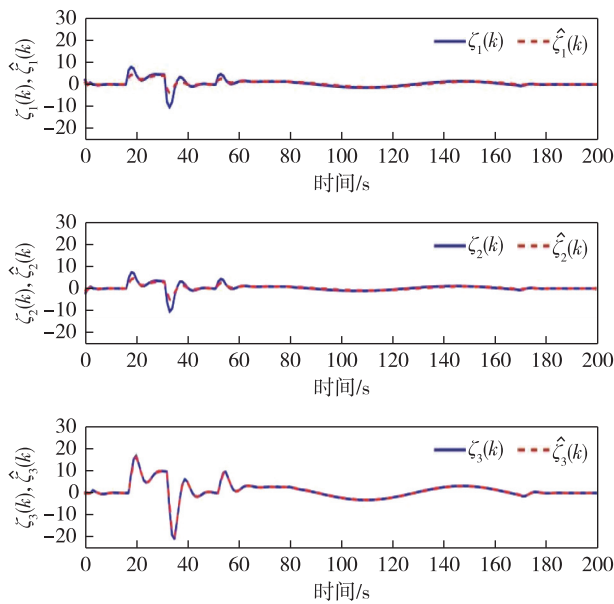


图 1 状态曲线 $\zeta(k)$ 和 $\hat{\zeta}(k)$

Fig. 1 State curves of $\zeta(k)$ and $\hat{\zeta}(k)$

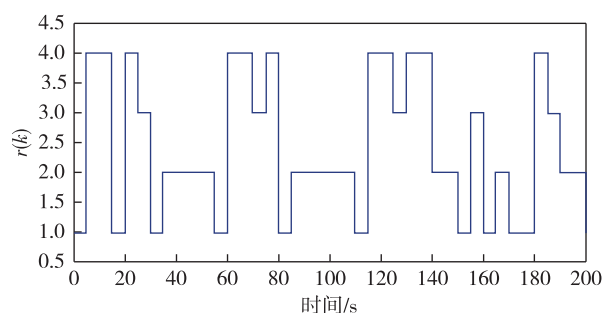


图 2 模态 $r(k)$ 的仿真

Fig. 2 Simulation result of modal $r(k)$

当 H 不确定时, 可以通过定理 2 来研究类似的问题. 不失一般性, 基于式 (30), 假设

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix},$$

与此同时, 令 $\delta = 0.23$, $\zeta = 3.5$. 根据定理 2, 控制器增益计算为

$$K_1 = \begin{bmatrix} 4.7030 & -2.5447 & -10.3255 \\ -2.9556 & -0.8292 & 3.0180 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -9.4802 & -11.3391 & 0.2477 \\ 3.2275 & 4.3527 & -1.5289 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.8663 & -2.6983 & -3.9029 \\ -0.2397 & 2.2308 & 3.1023 \end{bmatrix},$$

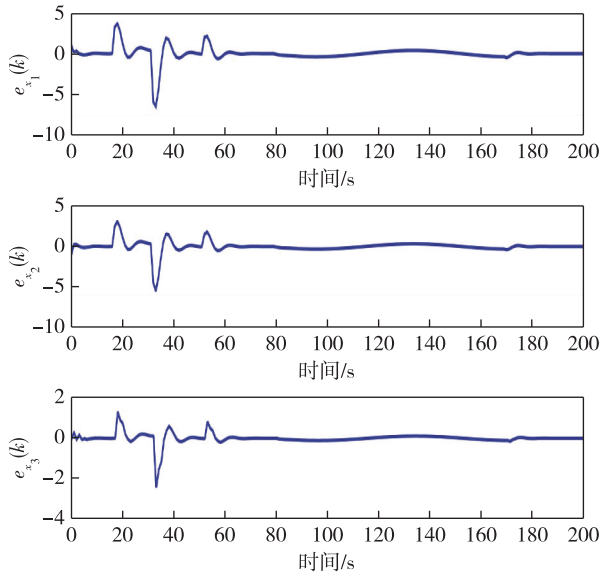


图3 误差曲线 $e_x(k)$
Fig.3 Error curves for $e_x(k)$

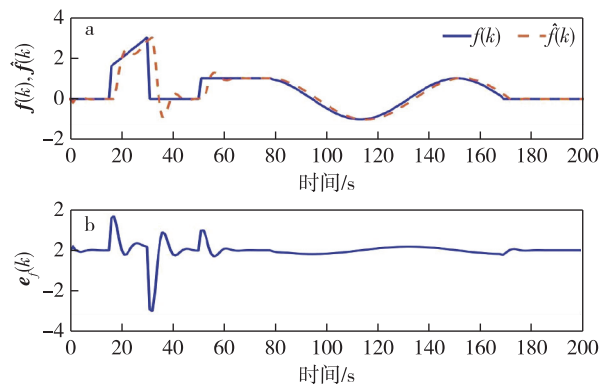


图4 故障 $f(k)$, 估计 $\hat{f}(k)$ 和估计误差 $e_f(k)$
Fig.4 Failure $f(k)$, estimation $\hat{f}(k)$ and estimation error $e_f(k)$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 5.2484 & 8.3731 & 12.9626 \\ -7.6213 & -12.3544 & -18.2293 \end{bmatrix},$$

观测器增益为

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1.1589 \\ 1.0009 \\ 1.5433 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0.8867 \\ 1.4006 \\ 1.0675 \end{bmatrix},$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0.6702 \\ 0.7621 \\ 0.9729 \end{bmatrix}, \quad L_4 = \begin{bmatrix} 0.3316 \\ 0.3823 \\ 0.9095 \end{bmatrix}$$

和

$$F_1 = -0.0500, \quad F_2 = -0.0358,$$

$$F_3 = 0.0107, \quad F_4 = 0.0107.$$

最后,为进一步比较,并证明本文提出的方法的

优点,不失一般性,假设

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.3984 + \theta & 0.3263 & 0.7764 \\ 0.7806 & 0.9886 + \theta & 0.1297 \\ 0.8814 & 0.4718 & 0.3110 + \theta \end{bmatrix},$$

其中 $\theta \geq 0$ 表示为扰动.一方面,当 $\theta = 0$ 时,从定理1可以得出 α 的最小可行解 $\alpha_{\min} = 3.2$,而文献[17]中相应的 $\alpha_{\min} = 10.99$ 且更大.即使对上述不确定的TPM,定理2得到的最小可行解 $\alpha_{\min} = 3.8$,仍然小于文献[17],但大于 $\alpha_{\min} = 3.2$.由此可见,本文方法的保守性较小.另一方面,当 $\alpha = 81$ 时,基于定理2的 θ 的最大可行解 $\theta_{\max} = 1.91$,大于文献[18]中得到的 $\theta_{\max} = 1.58$;同时,定理2的相应最大可行解 $\theta_{\max} = 1.67$.与前一种情况结果相似,可知本文方法保守性更小.

4 结束语

本文采用辅助系统方法研究了 D-MJSs 的故障估计问题,可以很好地解决随机系统与确定性故障之间的矛盾.通过对随机变量求取期望,构造确定性中间变量,并利用中间估计器来同时估计状态与故障.通过放缩手段研究了 TPM 的其他情况.通过仿真算例验证了结果的实用性与优势.仍然有以下问题需要考虑:第一, $r(k)$ 在中间变量式(4)中很重要,当其无法得到时,如何考虑类似问题是必要且更贴合实际的;第二,应进一步降低计算复杂度和保守性,尤其是系统模态大幅增加后;第三,当 Π 由式(32)表示,但 δ 未知时,如何进行有效估计是很有必要的.本文的结论同样适用于其他系统或问题,例如非线性系统、多智能体系统和滤波器设计.

参考文献

References

- [1] Du D S, Cocquempot V, Jiang B. Robust fault estimation observer design for switched systems with unknown input [J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 348: 70-83
- [2] Li X H, Ahn C K, Lu D K, et al. Robust simultaneous fault estimation and nonfragile output feedback fault-tolerant control for Markovian jump systems [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2019, 49(9): 1769-1776
- [3] Zhu Y Z, Zhang L X, Zheng W X. Distributed H_∞ filtering for a class of discrete-time Markov jump Lur'e systems with redundant channels [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2016, 63(3): 1876-1885
- [4] Li X W, Lam J, Gao H J, et al. H_∞ and H_2 filtering for linear systems with uncertain Markov transitions [J]. Auto-

- matica, 2016, 67: 252-266
- [5] Wen J W, Nguang S K, Shi P, et al. Robust H_∞ control of discrete-time nonhomogenous Markovian jump systems via multistep Lyapunov function approach [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2017, 47(7): 1439-1450
- [6] 张光华, 韩崇昭, 连峰, 等. Pairwise 马尔可夫模型下的势均衡多目标多伯努利滤波器 [J]. 自动化学报, 2017, 43(12): 2100-2108
ZHANG Guanghua, HAN Chongzhao, LIAN Feng, et al. Cardinality balanced multi-target multi-Bernoulli filter for pairwise Markov model [J]. Acta Automatica Sinica, 2017, 43(12): 2100-2108
- [7] Li X H, Karimi H R, Wang Y Y, et al. Robust fault estimation and fault-tolerant control for Markovian jump systems with general uncertain transition rates [J]. Journal of the Franklin Institute, 2018, 355(8): 3508-3540
- [8] 赵园, 郭戈, 丁磊, 等. 部分拓扑切换概率未知的移动传感网保性能一致性控制研究 [J]. 自动化学报, 2017, 43(7): 1265-1272
ZHAO Yuan, GUO Ge, DING Lei, et al. Guaranteed consensus control of mobile sensor networks with partially unknown switching probabilities [J]. Acta Automatica Sinica, 2017, 43(7): 1265-1272
- [9] Zhu J W, Yang G H, Wang H, et al. Fault estimation for a class of nonlinear systems based on intermediate estimator [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(9): 2518-2524
- [10] Zhang K, Liu G S, Jiang B. Robust unknown input observer-based fault estimation of leader-follower linear multi-agent systems [J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2017, 36: 525-542
- [11] Yang P, Ma B, Dong Y, et al. Fault-tolerant consensus of leader-following multi-agent systems based on distributed fault estimation observer [J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2018, 16: 2354-2362
- [12] Ren W J, Wang C L, Lu Y. Fault estimation for time-varying Markovian jump systems with randomly occurring nonlinearities and time delays [J]. Journal of the Franklin Institute, 2017, 354(3): 1388-1402
- [13] Yang H Y, Yin S. Actuator and sensor fault estimation for time-delay Markov jump systems with application to wheeled mobile manipulators [J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2020, 16(5): 3222-3232
- [14] Li X H, Zhang W D, Wang Y Y. Simultaneous fault estimation for uncertain Markovian jump systems subjected to actuator degradation [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2019, 29(13): 4435-4453
- [15] Huang S J, Yang G H. Fault estimation for a class of linear parameter varying systems with Markovian jumps [J]. Journal of the Franklin Institute, 2016, 353(17): 4680-4700
- [16] Lu D K, Li X H. Reduced-order observer based-fault estimation for Markovian jump systems with time-varying generally uncertain transition rates [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2020, 67(8): 2803-2815
- [17] Tabatabaeipour S M, Bak T. Robust observer-based fault estimation and accommodation of discrete-time piecewise linear systems [J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351(1): 277-295
- [18] Zhang K, Jiang B, Shi P. Fast fault estimation and accommodation for dynamical systems [J]. IET Control Theory & Applications, 2009, 3(2): 189-199
- [19] Wang G L, Sun Y Y. Consensus of multiagent systems with random switching topologies and its application [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020, 30(5): 2079-2096
- [20] Bara G I, Boutayeb M. Switched output feedback stabilization of discrete-time switched systems [C]. // Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control, 2006: 2667-2672

Observer-based fault estimation for discrete-time Markovian jump systems

WANG Guoliang¹ SONG Ge¹

¹ School of Information and Control Engineering, Liaoning Petrochemical University, Fushun 113001

Abstract Observer-based discrete Markov jump systems (D-MJSs) are random, but their faults to be estimated are deterministic signals, so it is difficult to directly study the fault estimation of the system. Here, an approach of constructing auxiliary systems is proposed, which constructs deterministic intermediate variables by taking expectations of random variables, and then the established intermediate estimator can estimate the system state and faults at the same time. In addition, based on a new scaling method, the uncertainty of the Transition Probability Matrix (TPM) is considered. All conditions are given by Linear Matrix Inequalities (LMIs), and the state error is ensured by stable input state. Numerical simulation examples are provided to prove the effectiveness and superiority of the proposed approach.

Key words fault estimation; Markovian jump system; observer; stochastic intermediate variable; intermediate estimator