



# 小波框架的彩色图像泊松去噪

## 摘要

噪声是影响图像质量的重要因素,噪声的存在导致图像的某些特征细节不能被辨识以及图像的信噪比下降,所以图像去噪是图像处理中的一个重要问题.本文提出了基于小波框架的彩色图像的泊松去噪模型.在该模型中,赋权的 $\ell^2$ 项作为保真项,包含小波框架的 $\ell^1$ 项作为正则项.同时,又提出了解决该模型的重新赋权的 split Bregman 算法.最后,利用仿真实验以及 PSNR(峰值信噪比)指标对该模型的去噪效果进行评估,评估结果表明该算法可行、有效.

## 关键词

小波框架; split Bregman 算法; 彩色图像; 泊松噪声

中图分类号 TP391

文献标志码 A

收稿日期 2016-06-14

资助项目 中央高校基本科研业务费专项资金(2015B19514)

作者简介

高涛,男,硕士生,主要研究方向为小波分析及其应用.gaotao@hhu.edu.cn

## 0 引言

图像去噪是图像处理中的基本问题,其目标是从含噪的观测图像中估计出理想图像.通常这是一个不适定的反问题,大量文献对该问题进行了深入的研究,但主要针对的是高斯白噪声<sup>[1]</sup>.然而,如 CCD(电荷耦合元件)固态光电检测器阵列、天文成像、计算 X 射线成像(CR)、荧光共焦显微成像等,获取的图像往往受到量子噪声的污染,量子噪声一般为非高斯白噪声,而是服从于泊松分布的泊松噪声  $y \sim P(y)$ :

$$P(y) = \frac{e^{-\tau} \tau^y}{y!}, \quad y = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

其中,  $P(y)$  为泊松噪声的概率密度函数.另外,式(1)还体现出泊松噪声强度与方差是信号依赖的.统计上,亮度大的像素受到更多的干扰,因此去除泊松噪声是一个困难的任务.迄今为止,有许多学者在灰色图像的泊松去噪方面做出了大量工作<sup>[2]</sup>.但是,针对彩色图像(RGB)的泊松去噪研究至今很少.

小波分析作为近年来发展起来的一种新的信号分析方法,兼有时域分析和频域分析的特点,在分析信号的去噪方面有其独特的优点.小波变换以其特有的多分辨率性、去相关性和选基灵活性等特点,使得它在图像去噪方面大有可为.图像信号与噪声信号经过小波变换后,在不同的分辨率下呈现出不同规律.在不同的分辨率下,设定阈值门限,调整小波系数,就可以达到小波去噪的目的.小波去噪的方法有很多种,本文选用的是小波阈值去噪.特别的,本文选择小波紧框架<sup>[3]</sup>,因为它的多分辨率特性和冗余有助于算法的实现和图像的稀疏表示<sup>[4-5]</sup>.

本文基于 Goldstein 等<sup>[6]</sup>的研究工作,提出了一种基于小波紧框架的彩色图像泊松去噪模型.该模型是由保真项和正则项构成的最小凸问题.基于泊松噪声的概率密度函数特征,保真项为赋权的二范数项,与此同时,本文在正则项中引入小波紧框架,从而更好地保持了图像的棱角细节.紧接着,本文又提出了解决上述模型的重新赋权的 split Bregman 算法.在本文最后,又给出了该算法的数值实验结果,结果显示该算法具有一定的实用性和应用推广价值.

## 1 背景知识

图像去噪需要较好地保持图像边界等细节信息.本文将含有噪声

<sup>1</sup> 河海大学 理学院,南京,210098

的彩色图像看作一个  $M$  维的向量  $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^M$ , 具体表达形式如下:

$$\mathbf{f} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{u}$  为干净彩色图像,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  是噪声干扰项.  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  分别代表了 RGB 3 个通道. 并且, 对于所加的白高斯噪声, 方差为  $\sigma^2$  的独立正态分布. 采用经典的极大后验概率  $P(\mathbf{u} | \mathbf{f})$  估计, 图像去噪的变分模型通常是保真项和正则项之和的最小化:

$$\min_{\mathbf{u}} F(\mathbf{u}) + \lambda G(\mathbf{u}),$$

其中,  $\lambda$  是一个正数, 用于平衡保真项  $F(\mathbf{u})$  和正则项  $G(\mathbf{u})$ . 保真项是关于噪声的特性, 由似然函数得到, 数据的保真项可以保持修复后的图像  $\mathbf{u}$  与观察的图像  $\mathbf{f}$  足够接近, 否则有用的信息可能在求解模型时丢失. 正则项  $G(\mathbf{u})$  是基于  $\mathbf{u}$  的先验假设得出的, 而惩罚项  $\ell^1$  的标准解代表了小波变换的系数<sup>[7]</sup>. 因此, 下面的变分模型主要研究高斯白噪声图像恢复:

$$\min_{\mathbf{u}} \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{f}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{W}\mathbf{u}\|_1,$$

这里  $\|\cdot\|_1$  表示  $\ell^1$  范数,  $\mathbf{W}$  是一个小波变换<sup>[7]</sup>.

假定观察数据  $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^M$  含有泊松噪声, 即

$$\mathbf{f} \sim P(\mathbf{u} + \mathbf{c}),$$

给定  $\mathbf{u}$ , 可以得到观测数据  $\mathbf{f}$  的概率:

$$P(\mathbf{f} | \mathbf{u}) = \prod_{i=1}^M \frac{(\mathbf{u})_i^{f_i} e^{-u_i}}{f_i!},$$

这里,  $u_i$  表示  $\mathbf{u}$  的第  $i$  行元素. 根据泊松噪声的性质, 可以得出  $\mathbf{f}$  的期望和方差:

$$E(\mathbf{f} | \mathbf{u}) = \text{var}(\mathbf{f} | \mathbf{u}) = \mathbf{u}.$$

## 2 泊松去噪的加权最小二乘法

### 2.1 小波框架

小波框架是一族冗余的具有多分辨率分析 (MRA) 的系统, 它在图像处理等领域已经有很好的应用. 小波框架的构造可通过 UEP (不等差错保护) 方法来生成<sup>[8]</sup>.

通过小波紧框架系统的滤波器, 可以生成快速紧框. 矩阵  $\mathbf{W}$  由  $J + 1$  个子滤波器  $\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_J$  构成. 其中,  $\mathbf{W}_0$  是低通滤波器, 其余的均是高通滤波器. 相应地, 由统一展成原则,  $\mathbf{W}^T$  是快速紧框架重构算子, 且  $\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathcal{I}$  对任何图像  $\mathbf{u}$  均有  $\mathbf{W}^T \mathbf{W}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ .

### 2.2 模型和算法

根据式(2), 可以得到泊松噪声的表达式如下:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{f} - \mathbf{u}.$$

假设给定  $\mathbf{u}$ , 可以得出期望  $E(\boldsymbol{\varepsilon} | \mathbf{u}) = 0$  和方差

$$\text{var}(\boldsymbol{\varepsilon} | \mathbf{u}) = \mathbf{u}.$$

接下来, 用高斯噪声<sup>[9]</sup> 近似估计泊松噪声  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , 即  $\boldsymbol{\varepsilon}$  服从正态分布  $N(0, \mathbf{u})$ :

$$P(\boldsymbol{\varepsilon} | \mathbf{u}) \propto$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{f} - \mathbf{u})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{u})\right\} \sqrt{b^2 - 4ac}, \quad (3)$$

其中,  $\boldsymbol{\Sigma}$  是协方差矩阵. 由于每个像素上的噪声是相互独立的, 因此可以得到

$$\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\mathbf{u}),$$

其中,  $\text{diag}(\mathbf{u})$  是对角矩阵. 运用极大似然估计, 取式(3)的负对数, 得到保真项为

$$-\log P(\boldsymbol{\varepsilon} | \mathbf{u}) \propto -\frac{1}{2}(\mathbf{f} - \mathbf{u})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{u}). \quad (4)$$

设  $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^N$  的赋权  $\ell^2$  范数为  $\|\mathbf{X}\|_Q^2 = \mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Q}$  是对称正定矩阵, 那么式(4)可被改写为

$$F(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{f}\|_{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{f}\|_{\text{diag}(\mathbf{u})^{-1}}^2 = \left\| \frac{\mathbf{u} - \mathbf{f}}{\sqrt{\mathbf{u}}} \right\|_2^2. \quad (5)$$

通过假设  $\mathbf{u} > 0$ , 所以  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$  是正定的. 式(5)可以作为偏差原理去选择正则化参数  $\lambda$ . 然而, 由于保真项中含有一个未知的权重  $\mathbf{u}$ , 所以该问题十分难解. 因此需要近似  $\mathbf{u}$ <sup>[10]</sup>.

最简单的做法是将观察到的数据  $\mathbf{f}$  来近似未知的权重  $\mathbf{u}$ , 从而得到如下表达式:

$$\min_{\mathbf{u} \geq 0} \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{u} - \mathbf{f}}{\sqrt{\mathbf{f}}} \right\|_2^2.$$

但是, 这种近似是粗糙的或者是不精确的. 本文提出一种重新赋权的 split Bregman 算法可以更精确地求解未知量  $\mathbf{u}$ .

结合框架的稀疏化和非负性的约束, 可以得到彩色图像的泊松去噪模型:

$$\min_{\mathbf{u} \geq 0} \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{u} - \mathbf{f}}{\sqrt{\mathbf{u}}} \right\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{W}\mathbf{u}\|_1,$$

其中

$$\left\| \frac{\mathbf{u} - \mathbf{f}}{\sqrt{\mathbf{u}}} \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{u_1}{\sqrt{u_1}} \\ \frac{u_2}{\sqrt{u_2}} \\ \frac{u_3}{\sqrt{u_3}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \right\|_2^2.$$

这一方法可以直接应用到求解非线性最小二乘法的稀疏正则化问题, 为此平滑的正则化项  $\ell^1$  范数

可以通过计算梯度获得.笔者感兴趣的是可以用加权最小二乘结构的优势,并利用提出的高效稀疏正规化方案,例如 split Bregman 方法<sup>[11]</sup>来实现.假设有一个迭代算法可以求解上式,并且求得的结果是序列  $\mathbf{u}_k$ .如果  $\mathbf{u}_k$  收敛到  $\mathbf{u}^*$ ,通过固定  $\mathbf{u}^*$  可以解决下列最小化问题:

$$\min_{\mathbf{u} \geq 0} \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{u} - \mathbf{f}}{\sqrt{\mathbf{u}^*}} \right\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{W}\mathbf{u}\|_1.$$

随着  $k$  的变大,  $\mathbf{u}_k$  变得稳定,可以通过权重  $\frac{1}{\mathbf{u}_k}$  去近似

$\frac{1}{\mathbf{u}^*}$ .因此,可以得到如下算法:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{k+1} = \arg \min_{\mathbf{u} \geq 0} \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{u} - \mathbf{f}}{\sqrt{\mathbf{u}_k}} \right\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{W}\mathbf{u} - \mathbf{d}_k + \mathbf{b}_k\|_2^2, \\ \mathbf{d}_{k+1} = \arg \min_d \lambda \|\mathbf{d}\|_1 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{d} - \mathbf{W}\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{b}_k\|_2^2, \\ \mathbf{b}_{k+1} = \mathbf{b}_k + (\mathbf{W}\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{d}_{k+1}). \end{cases} \quad (6)$$

为了接近先前的迭代而使结果稳定,可以在  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{d}$  的更新中增加一个邻近项.给定  $\gamma_1, \gamma_2$ , 具体步骤如下:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{k+1} = \arg \min_{\mathbf{u} \geq 0} \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{u} - \mathbf{f}}{\sqrt{\mathbf{u}_k}} \right\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{W}\mathbf{u} - \mathbf{d}_k + \mathbf{b}_k\|_2^2 + \\ \frac{\gamma_1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k\|_2^2, \\ \mathbf{d}_{k+1} = \arg \min_d \lambda \|\mathbf{d}\|_1 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{W}\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{d} + \mathbf{b}_k\|_2^2 + \\ \frac{\gamma_2}{2} \|\mathbf{d} - \mathbf{d}_k\|_2^2, \\ \mathbf{b}_{k+1} = \mathbf{b}_k + \mathbf{W}\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{d}_{k+1}, \end{cases} \quad (7)$$

当  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$  时,它就是之前的式(6).

算法 1 更详细地描述了式(7).另外,需特别注意的是,第一步可通过梯度方法投影到非负象限解决.在实践中,多几次迭代足以获得一个合理的结果.

### 3 数值实验

下面,将泊松噪声模型数值试验结果与未加噪声的原始图像进行比较从而证明算法的合理性.其中在干净的图像中添加泊松噪声使用的是 Matlab 中的 'poissrnd' 命令.所有的实验选择分段线性 B 样条.对应的滤波器离散形式<sup>[12]</sup>如下:

$$\mathbf{h}_0 = \left[ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right], \mathbf{h}_1 = \left[ -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right], \\ \mathbf{h}_2 = \left[ \frac{\sqrt{2}}{4}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{4} \right].$$

给定一个  $m \times n$  参考图像  $\mathbf{u}$ , 图像  $\bar{\mathbf{u}}$  到  $\mathbf{u}$  的峰值信噪比 PSNR(其量值为  $R_{\text{PSN}}$ ) 被定义为

$$R_{\text{PSN}}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = 10 \log_{10} \frac{(u_{\max} - u_{\min})^2}{E_{\text{MS}}}, \\ E_{\text{MS}} = \frac{\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|_2^2}{m \cdot n},$$

其中,  $u_{\max}$  和  $u_{\min}$  分别是参考图像  $\mathbf{u}$  的最大值和最小值,  $m, n$  为 2D 图像的大小,  $E_{\text{MS}}$  为均方差.用图像去噪结果  $\bar{\mathbf{u}}$  和原始图像  $\mathbf{u}$  进行数值比较,得到的  $R_{\text{PSN}}$  为图像去噪效果的数值表示.对于每点有 RGB 3 个值的彩色图像来说,其峰值信噪比定义同上,只是均方差是所有方差之和除以图像尺寸再除以 3.

图 1 是试验图像进行算法执行的结果,上层是原始图像,中间是加泊松噪声后的图像,下层为算法迭代 20 次恢复的图像.图 2 是试验迭代次数与对应的 PSNR 的值.

由图 1 可以直观地看出,本文所做的 3 组数值实验的去噪效果均非常好.彩色图像中的具体细节得到了有效的保持.

由图 2 可以看出,算法的 PSNR 值均在迭代 10 次左右达到最大,最大值均接近 27.由此可以看出,算法不但去噪效果好,而且去噪效率极高,从而在具体的生产实际中有着重要的推广价值.

---

#### 算法 1 泊松噪声去噪的重新赋权 $\ell^2$ 范数 split Bregman 算法

---

初始化:  $u_0 = 0, d_0 = \mathbf{W}\mathbf{f}, b_0 = 0, k = 1, \Sigma_0$  是初始的协方差矩阵.

当  $\|\mathbf{u}_{k-2} - \mathbf{u}_{k-1}\|_2 > \delta$  或  $k = 1$  运行,

$$\mathbf{u}_{k+1} = \arg \min_{\mathbf{u} \geq 0} \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{f}\|_{\Sigma_{k-1}^{-1}}^2 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{W}\mathbf{u} - \mathbf{d}_{k-1} + \mathbf{b}_{k-1}\|_2^2 + \frac{\gamma_1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{k-1}\|_2^2, \\ \mathbf{d}_k = \text{sign} \left( \frac{\mu(\mathbf{W}\mathbf{u}_k + \mathbf{b}_{k-1}) + \gamma_2 \mathbf{d}_{k-1}}{\mu + \gamma_2} \right) \cdot \max \left( \left| \mu(\mathbf{W}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{b}_{k-1}) + \gamma_2 \mathbf{d}_{k-1} \right| - \lambda / (\mu + \gamma_2), 0 \right), \\ \mathbf{b}_k = \mathbf{b}_{k-1} + \mathbf{W}\mathbf{u}_k - \mathbf{d}_k, \\ \Sigma_k = \text{diag}(\mathbf{u}_k), \\ k = k + 1.$$

结束

---



图1 试验图像进行算法执行的结果

Fig. 1 Comparison of original image(up), Poission noise image(middle), and denoised image(down) using the proposed algorithm

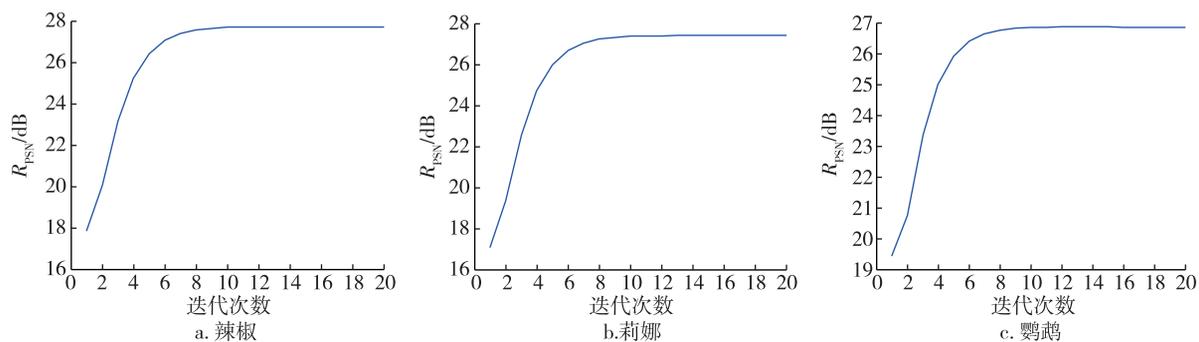


图2 试验迭代次数与对应的PSNR的值

Fig. 2 PSNR value corresponding to number of iterations

## 4 结语

本文提出了一种基于小波紧框架的彩色图像泊松去噪模型.该模型是由保真项和正则项构成的变分问题.基于泊松噪声的概率密度函数特征,保真项为赋权的二范数项,与此同时,本文在正则项中引入小波紧框架,从而更好地保持了图像的棱角细节.紧接着,本文又提出了解决上述模型的重新赋权的 split Bregman 算法.最后,又给出了该算法的数值实验结果,结果显示该算法具有一定的实用性和应用推广价值.

## 参考文献

### References

- [ 1 ] Luisier F, Blu T, Unser M. Image denoising in mixed Poisson-Gaussian noise[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2011, 20(3): 696-708
- [ 2 ] Bertero M, Boccacci P, Desidera G, et al. Image deblurring with Poisson data: from cells to galaxies[J]. Inverse Problems, 2009, 25(12): 1541-1548
- [ 3 ] Cai J F, Dong B, Osher S, et al. Image restoration: total variation, wavelet frames, and beyond[J]. Journal of the American Mathematical Society, 2012, 25(4): 1033-1089
- [ 4 ] Daubechies I, Han B, Ron A, et al. Framelets: MRA-based constructions of wavelet frames[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2003, 14(1): 1-46
- [ 5 ] Dong B, Shen Z W. MRA-based wavelet frames and applications [ M ]. Park City Mathematics Institute, 2013: 3837-3849
- [ 6 ] Goldstein T, Osher S. The split bregman method for  $\ell^1$  regularized problems[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2009, 2(2): 323-343
- [ 7 ] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D-Nonlinear Phenomena, 1992, 60(1/2/3/4): 259-268
- [ 8 ] Ron A, Shen Z W. Affine systems in  $L_2(\mathbf{R}^d)$ : The analysis of the analysis operator[J]. Journal of Functional Analysis, 1997, 148(2): 408-447
- [ 9 ] Setzer S, Steidl G, Teuber T. Deblurring Poissonian images by split Bregman techniques[J]. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2010, 21(3): 193-199
- [ 10 ] Li J, Shen Z W, Yin R J, et al. A reweighted  $\ell^2$  method for image restoration with Poisson and mixed Poisson-Gaussian noise[J]. Inverse Problems & Imaging, 2015, 9(3): 875-894
- [ 11 ] Staglianò A, Boccacci P, Bertero M. Analysis of an approximate model for Poisson data reconstruction and a related discrepancy principle[J]. Inverse Problems, 2011, 27(12): 1061-1063
- [ 12 ] Rockafellar R. Augmented Lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming[J]. Mathematics of Operations Research, 1976, 1(2): 97-116

# Wavelet frame based denoising algorithm for color image with Poisson noise

GAO Tao<sup>1</sup> HE Xiuli<sup>1</sup>

<sup>1</sup> College of Science, Hohai University, Nanjing 210098

**Abstract** As an important factor influencing image quality, noise can blur characteristic details and reduce the signal to noise ratio, thus make the denoising critical in image processing. A wavelet frame based Poisson denoising model for color images is proposed in this paper, where the weighted  $\ell^2$  is chosen as fidelity term and the  $\ell^1$  item containing wavelet frame as a regularization item, while the reweighted split Bregman algorithm is employed to solve this model. Numerical experiments are carried out and PSNR indicators are used to assess the denoising effect of the proposed model. Results show that the algorithm is feasible and effective.

**Key words** wavelet frame; split Bregman algorithm; color image; Poisson noise