



非连通通信网络中的分布式优化算法

摘要

本文考虑了非连通通信模式下互联网的带宽资源优化分配问题,其目标是使得网络中每个节点独立地将流量以最优方式分配给给定的一个或多个下一跳节点.注意到用户在使用某些应用时有非弹性的服务需求,故将网络效用函数建模为非凹的函数.最大化一类非凹的效用函数,也就是要解决非凸的优化问题.为了解决上述问题,本文设计了一个序列的优化问题,该序列的优化问题的解会收敛到原问题的最优解.基于上述优化问题,设计了一种分布式的流量分配算法.本文中的结果是基于实分析和凸优化理论等理论得到的.应用本文的算法可以使得每个节点独立地更新流量分配策略,并且仅用到最少的局部信息.最后,通过数值仿真验证了算法的有效性.

关键词

流量分配;最大化非凸函数;分布式算法

中图分类号 TP18

文献标志码 A

收稿日期 2020-07-01

资助项目 国家自然科学基金(61803319);深圳市科技计划基础研究项目(JCYJ20180306172720364);福建省自然科学基金(2019J05021)

作者简介

王靖瑶,女,博士,助理教授,研究方向为复杂系统的分布式控制.wangjingyao1@xmu.edu.cn

0 引言

随着手机、电脑等电子产品的不断普及,IP 视频流在现代网络中占据了越来越重的份额.思科公司年度视觉网络指数预测报告^[1]指出,到 2021 年,IP 视频流量在整个网络流量中的比重将会增长到 82%,这远高于 2016 年的 73%.此外,该报告还调研了用户对于视频发送服务的喜好,发现用户对服务的体验满意程度决定着用户对于服务商的选择倾向.因此,整个视频服务系统的成功运营不仅由它能否满足用户对视频服务不断增长的需求决定,还由它能否为用户提供满意的服务体验决定.然而,现存的网络资源分配协议却不能为视频服务系统的发展提供有力的支撑.这主要是因为:一方面,由于“大象流”的存在,现存的网络中网络资源分配不均现象频发;另一方面,用户对服务的满意程度函数作为数据率的函数,是非凹的.

自 Kelly 等^[2]引入网络效用函数最大化问题以来,该问题框架已经被多次应用于网络资源分配协议及网络堵塞控制协议的研究.基于此问题框架的研究成果中,例如文献[3-5],大部分考虑的是由 FTP 和 HTTP 等应用产生的网络流,而这些网络流被认为是弹性流,其对应的网络效用函数是严格的凹函数.考虑弹性流的好处在于,所得到的最大化网络效用函数是容易求解的.但是,仅考虑弹性流却影响了上述研究成果在实际中的应用.这是因为,视频流和音频流被认为是非弹性的,并且被建模为非凹函数.例如,手机用户对视频服务的满意程度是一个关于数据率非减的并且阶梯状的函数^[6].

视频和音频的这种非弹性特性逐渐被重视起来,文献[7]提出了一种中心式算法来逼近最优解,然而这种方法仅适用于优化可以转化成多项式形式的效用函数.文献[8-14]则提出了分布式算法.文献[8]针对效用函数为反曲函数的优化问题提出了求解次优解的启发式算法;文献[9]给出了在分布式梯度算法下收敛到全局最优解的条件;文献[10-11]针对连通通信模式下的互联网网络设计了分布式的流量分配方法,并通过仿真验证了算法对于链路断开的鲁棒性;文献[12-14]针对非连通通信模式下的互联网网络提出了分布式优化算法,该算法通过以流量目的地分类流量的方法更新数据率来减少计算量,但是由于算法运行需要传递较多信息,执行该算法仍需要较大的通信代价和计算代价.

本文针对非连通通信模式下的互联网网络,考虑了最大化效用

1 厦门大学 航空航天学院,厦门,361002

2 厦门大学 深圳研究院,深圳,518000

函数的问题,将用户对服务的满意程度建模为非凹的函数.因而,本文要解决的是非凸的优化问题.本文的主要贡献有两方面:一方面,本文设计了一种分布式的流量分配算法来最大化网络资源利用率,并且避免了链路堵塞事件的发生;另一方面,本文设计的协议使得每个节点根据局部信息来决定自身发送数据率,需要的非局部信息仅仅是路径有没有堵塞的信息,而这个信息仅占一个字节(1 B).

1 预备知识

本文考虑非连通通信模式下的互联网网络,将网络中流量传输关系建模为有向图.其中,有向图的边代表了传输链路,记为 l . 所有边构成的集合用 \mathcal{L} 表示. 链路 l 的流量承载上限记为 $c_l > 0, l \in \mathcal{L}$. 有向图的顶点代表了网络中的节点. 发送流量的节点记为 s . 由传输流量的节点构成的集合记为 \mathcal{B} , 传输流量的节点记为 $b, b \in \mathcal{B}$. 对于传输流量节点 b , 与节点 b 相连的边构成的集合记为 \mathcal{L}_b . 当有向边 l 指向节点 b 时, 该边相连的上游节点记为 $u_{b,l}$. 当有向边 l 由节点 b 指出时, 该边相连的下游节点记为 $d_{b,l}$. 第 i 个发送流量的节点发出的流量类型记为 i . 由流量类型构成的集合记为 $\mathcal{S}, i \in \mathcal{S}$. 由经过节点 b 的所有流量类型构成的集合记为 \mathcal{I}_b . 那么, 节点 b 将类型为 i 的流量输出的有向边构成的集合为 $\mathcal{L}_{b,i}$. 类型为 i 的流量经过的所有传输流量节点构成的集合记为 \mathcal{N}_i . 对于发送流量节点 s_i , 所有与该节点相连的边构成的集合记为 \mathcal{L}_{s_i} . 所有用来传输类型为 i 的流量的有向边构成的集合记为 \mathcal{L}_i . 类型为 i 的流量的数据率记为 $r_i \in \mathbf{R}_+$. 对于类型为 i 的流量, 通过边 l 离开节点 b 的数据率记为 $x_{i,b,l}^{\text{out}} \in \mathbf{R}_+$; 通过边 l 到达节点 b 的数据率记为 $x_{i,b,l}^{\text{in}} \in \mathbf{R}_+$. 由集合 \mathcal{L}_i 中所有边传输的流量记为向量 \mathbf{x}_i . 图 1 展示了由两条路径运送流量类型为 i 的流量相应的记号. 每个类型为 i 的流量都有一个关于数据率 r_i 的效用函数 $U_i(r_i): \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$. 假设对于所有的流量类型, 目标函数都是非凹的.

2 分布式流量分配算法

2.1 问题描述

本文将效用函数最大化问题建模为

$$\max_{r_i, x_i, i \in \mathcal{S}} \text{imize} \sum_{i \in \mathcal{S}} U_i(r_i), \quad (1)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} x_{i,b,l}^{\text{in}} + x_{i,b,l}^{\text{out}} \leq c_l, \forall l \in \mathcal{L}, \forall b \in \mathcal{B}, \quad (2)$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}_{b,i}} x_{i,b,l}^{\text{out}} - \sum_{l \in \mathcal{L}_b} x_{i,b,l}^{\text{in}} = 0, \forall b \in \mathcal{B}, \forall i \in \mathcal{I}_b, \quad (3)$$

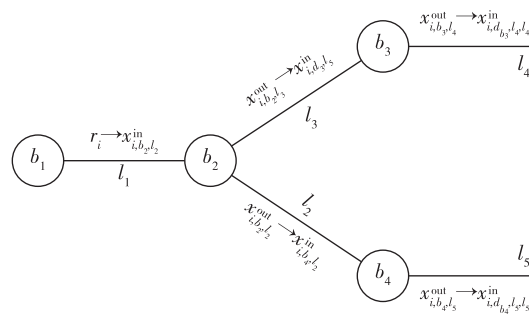


图 1 由两条路径运送流量类型为 i 的流量的相应记号示例

Fig. 1 Notation graph for transporting flow of type i through two paths

$$x_{i,b,l}^{\text{out}} - x_{i,d_{b,l},l}^{\text{in}} = 0, \forall b \in \mathcal{B}, \forall l \in \mathcal{L}_b, \forall i \in \mathcal{I}_b, \quad (4)$$

$$\alpha_i \leq r_i \leq \beta_i, \forall i \in \mathcal{S}. \quad (5)$$

这里, 式(2)是网络链路承载能力的限制, 当链路上通过的所有流量超过该链路的承载能力时, 称该链路被堵塞了; 式(3)代表了进入和离开每个节点处的流量守恒的限制, 引入该限制条件的目的是避免流量在节点处丢失; 式(4)代表了每条链路上流量守恒的限制, 引入该限制条件的目的是避免流量在边上丢失; 式(5)是每种类型的流量上下限的限制. 考虑到链路具有保持流量守恒的特点, 本文中假设公式 $x_{i,b,l}^{\text{out}} = x_{i,d_{b,l},l}^{\text{in}}, l \in \mathcal{L}$ 在所有链路上都成立. 将上述优化问题中的变量 $x_{i,d_{b,l},l}^{\text{in}}$ 用 $x_{i,b,l}^{\text{out}}$ 替换得到:

$$\max_{r_i, x_i, i \in \mathcal{S}} \text{imize} \sum_{i \in \mathcal{S}} U_i(r_i), \quad (6)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} x_{i,u_{b,l},l}^{\text{out}} + x_{i,b,l}^{\text{out}} \leq c_l, \forall l \in \mathcal{L}, \forall b \in \mathcal{B}, \quad (7)$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}_{b,i}} x_{i,b,l}^{\text{out}} - \sum_{l \in \mathcal{L}_b} x_{i,u_{b,l},l}^{\text{out}} = 0, \forall b \in \mathcal{B}, \forall i \in \mathcal{I}_b, \quad (8)$$

$$\alpha_i \leq r_i \leq \beta_i, \forall i \in \mathcal{S}. \quad (9)$$

对于类型为 i 的流量, 本文分别为网络链路承载能力限制和流量守恒限制定义两对矩阵偶对 $(\mathbf{A}_i, \mathbf{C})$ 和 $(\mathbf{B}_i, \mathbf{D}_i)$. $\mathbf{A}_i = [a_{i,j}]_{1 \times \mathcal{L}} \times 1 \times \mathcal{L}_i$, 其中当向量 \mathbf{x}_i 中第 j 个数据率通过链路 $l \in \mathcal{L}$ 传递时有 $a_{i,j} = 1$, 否则 $a_{i,j} = 0$. $\mathbf{C} = [c_l]_{1 \times \mathcal{L}} \times 1$, 其中 c_l 是链路 l 的承载量. $\mathbf{B}_i = [b_{j,k}]_{1 \times \mathcal{N}_i} \times 1 \times \mathcal{L}_i$, 其中当向量 \mathbf{x}_i 中第 k 个数据率从集合 \mathcal{N}_i 的第 j 个节点离开时有 $b_{j,k} = 1$, 当向量 \mathbf{x}_i 中第 k 个数据率到达集合 \mathcal{N}_i 的第 j 个节点时有 $b_{j,k} = -1$, 否则 $b_{j,k} = 0$. $\mathbf{D}_i = [d_l]_{1 \times \mathcal{N}_i} \times 1$ 是一个所有元均为零的向量. 此外, 本文引入矩阵 $\mathbf{T}_i = [t_{i,j}]_{1 \times \mathcal{L}_i}$, 其中 $r_i = \mathbf{T}_i \mathbf{x}_i$. 由于向量 \mathbf{x}_i 中第一个元对应着类型为 i 的流量的数据率, 本文令 $t_{i1} = 1$, 其他元均为零. 借助于上述矩阵定义, 我们可将上述优化问题写为一个矩阵的形式:

$$\max_{r_i, x_i, i \in \mathcal{S}} \text{imize } \sum_{i \in \mathcal{S}} U_i(r_i), \quad (10)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} A_i x_i < C, \quad (11)$$

$$B_i x_i = D_i, \forall i \in \mathcal{S}, \quad (12)$$

$$\alpha_i \leq r_i \leq \beta_i, \forall i \in \mathcal{S}, \quad (13)$$

$$r_i = T_i x_i, \forall i \in \mathcal{S}. \quad (14)$$

上述优化问题的限制条件是超空间和超平面的交集,该问题很显然是非凹的最大化问题.非凹的最大化问题是很难求解和分析的.

2.2 主要结果

注意到优化问题(10)是非凸的,这意味着该问题很难分析和求解.为了解决该问题,本文将用一类如下式的类多项式函数逼近效用函数:

$$\max_{r_i, x_i, i \in \mathcal{S}} \text{imize } \sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{\alpha=1}^n p_{i,\alpha} r_i^{\alpha/n}. \quad (15)$$

基于上述逼近结果,有

$$\max_{r_i, x_i, i \in \mathcal{S}} \text{imize } \sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{\alpha=1}^n p_{i,\alpha} r_i^{\alpha/n}, \quad (16)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} A_i x_i < C, \quad (17)$$

$$B_i x_i = D_i, \forall i \in \mathcal{S}, \quad (18)$$

$$\alpha_i \leq r_i \leq \beta_i, \forall i \in \mathcal{S}, \quad (19)$$

$$r_i = T_i x_i, \forall i \in \mathcal{S}. \quad (20)$$

类似于文献[10],将上述问题转化为下述等价问题:

$$\max_{r_i, y_i, x_i, i \in \mathcal{S}} \text{imize } \sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{\alpha=1}^n p_{i,\alpha} y_i^\alpha, \quad (21)$$

$$y_i \leq r_i^{1/n}, \forall i \in \mathcal{S}, \quad (22)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} A_i x_i < C, \quad (23)$$

$$B_i x_i = D_i, \forall i \in \mathcal{S}, \quad (24)$$

$$\alpha_i \leq r_i \leq \beta_i, \forall i \in \mathcal{S}, \quad (25)$$

$$r_i = T_i x_i, \forall i \in \mathcal{S}. \quad (26)$$

令 $m_{i,k}$ 表示 y_i 在某种测度下的 k 阶矩,即 $m_{i,j} = E_\mu[y_i^j]$. 上述问题可用下列问题逼近:

$$\max_{r_i, x_i, m_i, i \in \mathcal{S}} \text{imize } \sum_{i \in \mathcal{S}} p_i^T m_i, \quad (27)$$

$$m_{i,0} = 1, \forall i \in \mathcal{S}, \quad (28)$$

$$M(0, l, m_i) \geq 0, \forall i \in \mathcal{S}, \quad (29)$$

$$y_{i,\max} M(1, l-1, m_i) - M(2, l, m_i) \geq 0, \quad (30)$$

$$y_i \leq r_i^{\alpha/n}, \alpha \in \{1, \dots, n\}, \forall i \in \mathcal{S}, \quad (31)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} A_i x_i < C, \quad (32)$$

$$B_i x_i = D_i, \forall i \in \mathcal{S}, \quad (33)$$

$$\alpha_i \leq r_i \leq \beta_i, \forall i \in \mathcal{S}, \quad (34)$$

$$r_i = T_i x_i, \forall i \in \mathcal{S}. \quad (35)$$

对于类型为 i 的流量, $p_i = [p_{i,\alpha}]_{\alpha \in \{1, \dots, n\}}$ 和 $m_i = [m_{i,\alpha}]_{\alpha \in \{1, \dots, n\}}$ 是矩构成的向量. $y_{i,\max}$ 是第 i 个数据率的已知上界. 矩阵 $M(k, k+2h, m_i)$ 是如下式的汉克儿矩阵:

$$M(k, k+2h, m_i) = \begin{bmatrix} m_{i,k} & \cdots & m_{i,k+h} \\ m_{i,k+1} & \cdots & m_{i,k+h+1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{i,k+h} & \cdots & m_{i,k+2h} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

为了保持优化问题(27)的紧性,本文引入下述记号.

对于类型为 i 的流量,令集合 \mathcal{S}_i 定义为 $\mathcal{S}_i = \{ (m_i, r_i) \in \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}; m_{i,0} = 1, M(0, l, m_i) \geq 0, y_{i,\max} M(1, l-1, m_i) - M(2, l, m_i) \geq 0, y_i \leq r_i^{\alpha/n}, \alpha \in \{1, \dots, n\}, \alpha_i \leq r_i \leq \beta_i, \}$, (37)

$$\mathcal{A} = \{ x \in \mathbf{R}^{\sum_{i \in \mathcal{S}} |\mathcal{L}_i|} : \sum_{i \in \mathcal{S}} A_i x_i < C, B_i x_i = D_i, \forall i \in \mathcal{S} \}. \quad (38)$$

优化问题(27)可以写为

$$\max_{r_i, x_i, m_i, \forall i \in \mathcal{S}} \text{imize } \sum_{i \in \mathcal{S}} p_i^T m_i, \quad (39)$$

$$(m_i, r_i) \in \mathcal{S}_i, \forall i \in \mathcal{S}, \quad (40)$$

$$r_i = T_i x_i, \forall i \in \mathcal{S}, \quad (41)$$

$$x \in \mathcal{A}. \quad (42)$$

定理 1 优化问题(39)的解可以逼近问题(16)的解.

证明 该定理的证明可由文献[10]中定理的证明得到.

接下来将求解凸优化问题(39).

$$\max_{r_i, x_i, m_i, \forall i \in \mathcal{S}} \text{imize } \sum_{i \in \mathcal{S}} p_i^T m_i + \sum_{i \in \mathcal{S}} f_i(m_i, r_i) + g(x), \quad (43)$$

$$r_i = T_i x_i, \forall i \in \mathcal{S}. \quad (44)$$

这里, $f_i(m_i, r_i)$ 是矩限制和上下限限制的指示函数,即:

$$f_i(m_i, r_i) = \begin{cases} 0, & (m_i, r_i) \in \mathcal{S}_i, \\ -\infty, & (m_i, r_i) \notin \mathcal{S}_i. \end{cases} \quad (45)$$

$g(x)$ 同样是指示函数,即:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathcal{A}, \\ -\infty, & x \notin \mathcal{A}. \end{cases} \quad (46)$$

带有二次约束的拉格朗日函数为

$$L_\rho(m, r, z, v) = \sum_{i \in \mathcal{S}} [p_i^T m_i - v_i(r_i - T_i x_i) + f_i(m_i, r_i) - \frac{\rho}{2}(r_i - T_i x_i)^2], \quad (47)$$

其中, $\rho > 0$ 是惩罚参数, $v_i (i \in \mathcal{S})$ 是对偶变量.

基于 ADMM 的算法如下:

算法1 ADMM 算法

1)更新 m 和 r :对于类型为 i 的流量, (m_i, r_i) 更新:

$$(m_i, r_i)^{k+1} = \underset{(m_i, r_i) \in \mathcal{S}_i}{\operatorname{argmax}} \left(\mathbf{p}_i^T \mathbf{m}_i - v_i(r_i - \mathbf{T}_i \mathbf{x}_i^k) - \frac{\rho}{2}(r_i - \mathbf{T}_i \mathbf{x}_i^k + u_i^k)^2 \right), i \in \mathcal{S}. \quad (48)$$

2)更新 \mathbf{x} :

$$\mathbf{T} \mathbf{x}^{k+1} = \Pi_{\mathcal{A}}(r^{k+1} + u^k), \quad (49)$$

其中 $\Pi_{\mathcal{A}}(\cdot)$ 代表了向集合 \mathcal{A} 的欧几里得投影算子.

3)更新 u :对每个 $i \in \mathcal{S}$,更新 u_i :

$$u_i^{k+1} = u_i^k + r_i^{k+1} - \mathbf{T}_i \mathbf{x}_i^k. \quad (50)$$

注意到算法1中, \mathbf{x} 的更新步骤中需要全局信息,这就阻碍了将此算法应用于分布式场景.为解决上述问题,注意到投影意味着解决下述二次规划问题:

$$\min \operatorname{imize} \sum_{i \in \mathcal{S}} (\mathbf{T}_i \mathbf{x}_i - (r_i^{k+1} + u_i^k))^2, \quad (51)$$

$$\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i < \mathbf{C}, \forall i \in \mathcal{S}, \quad (52)$$

$$\mathbf{B}_i \mathbf{x}_i = \mathbf{D}_i, \forall i \in \mathcal{S}, \quad (53)$$

$$\mathbf{x}_i \geq 0, \forall i \in \mathcal{S}. \quad (54)$$

上述二次规划问题的等价问题为

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} (\mathbf{T}_i \mathbf{x}_i - (r_i^{k+1} + u_i^k))^2 +$$

$$\lambda_1 \left(\max \left\{ \sum_{l \in L} \mathbf{a}_{li}^T \mathbf{x}_i - c_l, 0 \right\} \right) + \lambda_2 \sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{\tilde{b} \in N_i} \left(\max \left\{ \mathbf{B}_{\tilde{b}i}^T \mathbf{x}_i, 0 \right\} + \max \left\{ -\mathbf{B}_{\tilde{b}i}^T \mathbf{x}_i, 0 \right\} \right), \quad (55)$$

其中 λ_1 和 λ_2 是惩罚参数;向量 \mathbf{a}_{li} 是矩阵 \mathbf{A}_i 第 l 行的转置;向量 $\mathbf{B}_{\tilde{b}i}$ 是矩阵 \mathbf{B}_i 第 \tilde{b} 行的转置.当 λ_1 和 λ_2 充分大时,问题(51)和(55)是等价的.问题(55)使得本文可以以分布式的方式更新变量 \mathbf{x} .本文利用次下降梯度算法来解决问题(55),而且该算法仅需要邻居节点处的最少的信息.相应的迭代算法如下:

算法2 迭代算法

更新 $x_{i,1}$:对每个 $i \in \mathcal{S}$,

$$x_{i,1}^{(k+1)} = x_{i,1}^{(k)} - \alpha^{(k)} \left(2(x_{i,1}^{(k)} - (r_i^{k+1} + u_i^k)) + \lambda_1 \beta_{li} + \lambda_2 \gamma_{bi} \right). \quad (56)$$

其中 $\alpha^{(k)}$ 是次下降梯度算法的步长; β_{li} 是链路 $l \in \mathcal{L}_{si}$ 的拥堵信息,即:

$$\beta_{li} = \begin{cases} 1, & \text{当链路 } l \text{ 堵塞,} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (57)$$

节点 $d_{s,l}$ 是唯一与发送流量的节点 s 相连的节点. γ_{bi} 是节点 $d_{s,l}$ 是否有流量守恒的信息,即:

$$\gamma_{bi} = \begin{cases} 1, & r_i > \sum_{\tilde{l} \in \mathcal{L}_{d_{s,l},i}} x_{i,d_{s,l},\tilde{l}}^{\text{out}}, \\ -1, & r_i < \sum_{\tilde{l} \in \mathcal{L}_{d_{s,l},i}} x_{i,d_{s,l},\tilde{l}}^{\text{out}}, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (58)$$

更新 $x_{i,j}, j \in \{2, \dots, |\mathcal{L}_i|\}$:对每个 $i \in \mathcal{S}$,

$$x_{i,j}^{(k+1)} = x_{i,j}^{(k)} - \alpha^{(k)} (\lambda_1 \beta_{li} + \lambda_2 \gamma_{bi}). \quad (59)$$

令数据率 $x_{i,j}$ 是由节点 b 经边 l 发出, β_{li} 代表了链路 l 的拥堵信息,即:

$$\beta_{li} = \begin{cases} 1, & \text{当 } l \text{ 堵塞,} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (60)$$

γ_{bi} 包含了节点 b 和它的下游节点 $d_{b,l}$ 的流量守恒信息,即:

$$\gamma_{bi} = \begin{cases} -1, & \sum_{\tilde{l} \in \mathcal{L}_{u_b,i}} x_{i,u_b,\tilde{l}}^{\text{out}} > \sum_{l \in \mathcal{L}_{b,i}} x_{i,b,l}^{\text{out}}, \\ 1, & \sum_{\tilde{l} \in \mathcal{L}_{u_b,i}} x_{i,u_b,\tilde{l}}^{\text{out}} < \sum_{l \in \mathcal{L}_{b,i}} x_{i,b,l}^{\text{out}}, \\ 0, & \text{否则} \\ 1, & \sum_{l \in \mathcal{L}_{b,i}} x_{i,b,l}^{\text{out}} > \sum_{\tilde{l} \in \mathcal{L}_{d_b,l},i} x_{i,d_b,l,\tilde{l}}^{\text{out}}, \\ -1, & \sum_{l \in \mathcal{L}_{b,i}} x_{i,b,l}^{\text{out}} < \sum_{\tilde{l} \in \mathcal{L}_{d_b,l},i} x_{i,d_b,l,\tilde{l}}^{\text{out}}, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (61)$$

分布式算法如下:

算法 3 分布式算法

1) 给定初始值 $\mathbf{x}^0, u^0, k = 0, 1, \dots, N$.

2) 每个发送流量的节点通过求解一个凸的半正定规划问题更新它的数据率:

$$(\mathbf{m}_i, r_i)^{k+1} = \arg \max_{(\mathbf{m}_i, r_i) \in \mathcal{S}_i} \left(\mathbf{p}_i^T \mathbf{m}_i - v_i(r_i - \mathbf{T}_i \mathbf{x}_i^k) - \frac{\rho}{2} (r_i - \mathbf{T}_i \mathbf{x}_i^k + u_i^k)^2 \right), i \in \mathcal{S}. \quad (62)$$

3) 给定初始值 $\mathbf{x}^{k_g, 0} \leftarrow \mathbf{x}^k$.

4) $k_g = 0, 1, \dots, N_g, i = 1, \dots, |\mathcal{S}|$.

5) 每个节点 $\tilde{b} \in \mathcal{N}_i$ 查看它自身的流量守恒信息并且将 $\gamma_{\tilde{b}i}$ 发送它的最近的邻居.

6) 每条链路 $l \in \mathcal{L}_b$ 将它的拥堵信息 β_{li} 发给它相连的边节点,

$$x_{i, \tilde{b}}^{(k_g+1)} = x_{i, \tilde{b}}^{(k_g)} - \alpha^{(k_g)} (2(x_{i, \tilde{b}}^{(k_g)} - (r_i^{k_g+1} + u_i^k)) + \lambda_1 \beta_{li} + \lambda_2 \gamma_{\tilde{b}i}), \quad (63)$$

$$x_{i, j}^{(k_g+1)} = x_{i, j}^{(k_g)} - \alpha^{(k_g)} (\lambda_1 \beta_{li} + \lambda_2 \gamma_{\tilde{b}i}), j \in \{2, \dots, |\mathcal{L}_i|\}, \quad (64)$$

$$\mathbf{x}^{k+1} \leftarrow \mathbf{x}^{k_g, k_g}. \quad (65)$$

7) 每个发送流量的节点更新它的对偶变量

$$u_i^{k+1} = u_i^k + r_i^{k+1} - z_i^k, i \in \mathcal{S}. \quad (66)$$

定理 2 算法 3 生成的序列 $\{(\mathbf{m}_i, \mathbf{x}_i, r_i, z_i, \rho u_i)\}$ 收敛到优化问题的一个 KKT 点.

证明 该定理的结果可通过文献[15]中的结果得到.

3 仿真结果

考虑通信网络图 2. 网络中流量类型集合为 $\mathcal{S} = \{1, \dots, 8\}$, 并且多项式目标函数的阶数为 $n = 6$. 算法参数为 $\rho = 0.7, \alpha^{(k_g)} = 1/k_g$ 和 $\lambda_1 = \lambda_2 = 8$. 图 3 比较了

$N_g = 10^3$ 时算法 3 和基因算法求解结果. 从图 3 可以发现: 虽然算法 3 是分布式的求解方法, 但是该方法得到的目标函数值会收敛到基因算法这种中心式算法得到的全局最优解. 这充分说明了算法 3 的有效性.

4 结束语

本文针对非连通通信模式下的互联网网络提出了一种分布式的流量分配方法. 该方法可以有效地

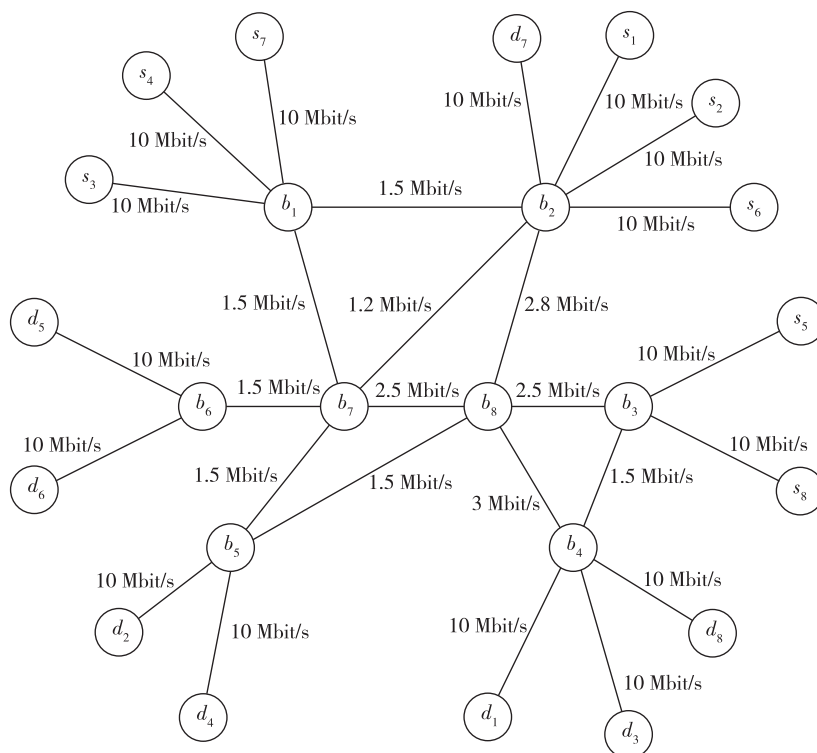


图 2 通信网络图

Fig. 2 Communication network graph

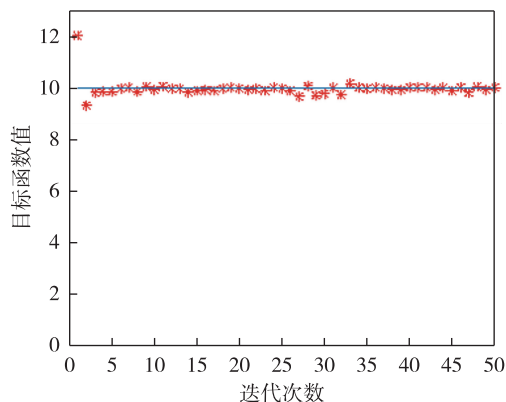


图3 目标函数值曲线(红色点状虚线是由算法3得到的结果,蓝色实线是由基因算法得到的结果)

Fig. 3 The network utility function values
(The red dotted line is obtained by Algorithm 3,
while the blue line is obtained by genetic algorithm)

最大化网络效用函数,提高用户对服务的体验满意程度,并且避免网络中链路堵塞和流量丢失等现象的发生.仿真结果表明,虽然本文提出的方法是分布式的,但是该方法得到的结果可以收敛到原问题的最优解.

参考文献

References

- [1] CISCO. Cisco visual networking index: forecast and methodology, 2016 – 2021 [R/OL]. [2020-06-08]. <https://www.cisco.com/c/en/us/solutions/collateral/service-provider/visual-networking-index-vni/complete-white-paper-c11-481360.pdf>
- [2] Kelly F P, Maulloo A K, Tan D K H. Rate control for communication networks: shadow prices, proportional fairness and stability [J]. Journal of the Operational Research Society, 1998, 49(3): 237-252
- [3] 武胜帅, 赵宇. Lipschiz-type 的高阶非线性多智能体系统分布式优化算法研究 [J]. 南京信息工程大学学报(自然科学版), 2018, 10(4): 456-461
WU Shengshuai, ZHAO Yu. Distributed optimization for Lipschiz-type high-order nonlinear multi-agent systems [J]. Journal of Nanjing University of Information Science & Technology (Natural Science Edition), 2018, 10(4): 456-461
- [4] Lagoa C M, Che H, Mavsichoff B A. Adaptive control al-

- gorithm for decentralized optimal traffic engineering in the internet [J]. IEEE/ACM Transactions on Networking, 2004, 12(3): 415-428
- [5] 张家琦, 游科友. 基于相对状态符号信息的分布式优化算法 [J]. 南京信息工程大学学报(自然科学版), 2018, 10(6): 647-657
ZHANG Jiaqi, YOU Keyou. Distributed optimization using the sign of relative state information [J]. Journal of Nanjing University of Information Science & Technology (Natural Science Edition), 2018, 10(6): 647-657
- [6] Yin X Q, Jindal A, Sekar V, et al. A control-theoretic approach for dynamic adaptive video streaming over HTTP [J]. ACM SIGCOMM Computer Communication Review, 2015, 45(4): 325-338
- [7] Fazel M, Chiang M. Network utility maximization with nonconcave utilities using sum-of-squares method [C] // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, 2005: 1867-1874
- [8] Lee J W, Mazumdar R R, Shroff N B. Non-convex optimization and rate control for multi-class services in the Internet [J]. IEEE/ACM Transactions on Networking, 2005, 13(4): 827-840
- [9] Hande P, Zhang S Y, Chiang M. Distributed rate allocation for inelastic flows [J]. IEEE/ACM Transactions on Networking, 2007, 15(6): 1240-1253
- [10] Ashour M, Wang J Y, Aybat N S, et al. End-to-end distributed flow control for networks with nonconcave utilities [J]. IEEE Transactions on Network Science and Engineering, 2019, 6(3): 303-313
- [11] Ashour M, Wang J Y, Lagoa C, et al. Non-concave network utility maximization: a distributed optimization approach [C] // IEEE Conference on Computer Communications, 2017: 1-9
- [12] Wang J Y, Ashour M, Lagoa C M, et al. A fully distributed traffic allocation algorithm for nonconcave utility maximization in connectionless communication networks [J]. Automatica, 2019, 109: 108506
- [13] Wang J Y, Guo J H, Wang Q S, et al. Necessary and sufficient condition for non-concave network utility maximization [J]. International Journal of Control, 2020, 93(2): 319-327
- [14] Wang J Y, Ashour M, Lagoa C, et al. Non-concave network utility maximization in connectionless networks: a fully distributed traffic allocation algorithm [C] // 2017 American Control Conference (ACC), 2017: 3980-3985
- [15] Eckstein J, Bertsekas D P. On the douglas-rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators [J]. Mathematical Programming, 1992, 55(1/2/3): 293-318

A distributed optimization algorithm in connection-less networks

WANG Jingyao^{1,2} GUO Jinghua^{1,2}

1 School of Aerospace Engineering, Xiamen University, Xiamen 361002

2 Shenzhen Research Institute of Xiamen University, Shenzhen 518000

Abstract This paper considers the optimization problem of traffic allocation in a connection-less autonomous system. The objective is to enable each node in the network to independently distribute traffic among any given set of next hops in an optimal way. We model the network utility function with non-concave function because of users' inelastic requirements on data rates in some practical applications, such as video and audio streaming. Therefore, we tackle the problem of optimizing a generalized class of non-concave utility functions. To solve this problem, we first design a sequence of convex relaxations whose solution converges to that of the original problem. Then, we propose a distributed sending rate control algorithm to solve the convex relaxation problems. The approach taken relies on results from real-analysis theory and optimization theory. All computations required by the algorithm are performed independently and locally at each node using local information and minimum information exchange between neighboring nodes. Numerical simulations are performed to evaluate our results.

Key words traffic allocation; maximizing non-concave function; distributed algorithm