



多属性直觉模糊容差粗糙集模型

摘要

在直觉模糊信息系统的背景下提出了基于容差关系的直觉模糊粗糙集模型,从乐观悲观两个角度出发对目标集进行刻画,是对目标集的一种新的逼近方法,同时,可以发现乐观与悲观上下近似的关系.通过求解近似精度可以发现乐观直觉模糊粗糙集模型的近似精度更高.最后给出实证分析,进一步验证结论的有效性.

关键词

直觉模糊信息系统;直觉模糊容差粗糙集;概念近似;近似精度

中图分类号 TP18;O159

文献标志码 A

收稿日期 2020-01-15

资助项目 国家自然科学基金(61772002,61976245);中央高校基本科研业务费项目(XDJK2019B029,SWU119063)

作者简介

徐伟华,男,博士,教授,博士生导师,研究方向为模糊数学、不确定性、人工智能、粒计算、认知概念学习.chxuwh@gmail.com

李文涛(通信作者),男,博士,讲师,研究方向为粗糙集、模糊集、粒计算、形式概念分析.drlwntao@gmail.com

0 引言

波兰数学家 Pawlak 所提出的粗糙集理论作为一种数学工具,在处理不确定信息方面有重要作用^[1].它主要应用在概念近似与属性约减两个方面^[2].概念近似即利用已知的数据,对目标集从上下两个方面对其进行逼近,进而减少目标集的不确定性.经典的概念近似是基于等价关系对分类型数据进行比较刻画^[3].由于现实生活中数据的复杂多样化,数据类型还有数值型、区间型、集值型、直觉模糊型等,各对象之间的关系也不仅仅局限于等价关系,所以经典情况下的概念近似有一定的局限性^[2-7].

不少学者基于不同数据之间的不同关系进行了很多研究,尤其是对于直觉模糊型数据.直觉模糊型集同时考虑对象对某一集合的正隶属度、负隶属度和犹豫度,具有更强的信息表达能力,能够较好地描述和刻画客观世界的不确定性.文献[8-10]揭示了直觉模糊集理论与粗糙集理论之间的关系,证明每个模糊粗糙集实际上是一个直觉L-模糊集,然后利用直觉模糊集的概念定义了直觉模糊逼近空间中的逼近算子.Liu等^[11]通过求解冲突距离来确定对象之间的相似度,进而构建直觉模糊粗糙集模型对研究对象进行刻画.另外,利用区间直觉模糊集和粗糙集相结合的方法,林梦雷等^[12]在区间直觉模糊关系的基础上,构造了区间直觉模糊粗糙集模型,主要是利用隶属度与非隶属度求解汉明距离,没有利用犹豫度.本文将进一步结合犹豫度,求解任意两者之间的相似度,并加以乐观悲观思想构建基于容差关系^[13]的直觉模糊粗糙集.

本文在直觉模糊信息系统下,结合 Jensen等^[14]所定义的模糊相似关系,从乐观悲观两个角度出发,提出基于容差关系的直觉模糊粗糙集模型.首先说明构建模型的理论知识,然后构建多属性下乐观、悲观直觉模糊容差粗糙集模型,接着给出实例分析,最后得出结论.

1 预备知识

本节主要介绍了有关直觉模糊系统(IFS)下构建基于容差关系的模糊粗糙集模型的理论基础以及容差关系.

定义1 称集合 $C = \{ \langle x, \mu_C(x), \nu_C(x) \rangle \mid x \in U \}$ 是定义在论域 U 上的直觉模糊集,其中: $\mu_C(x)$ 表示 x 对集合 C 的隶属度; $\nu_C(x)$ 表示 x 对集合 C 的非隶属度;同时 $0 \leq \mu_C(x) + \nu_C(x) \leq 1, \pi_C(x) = 1 -$

1 西南大学 人工智能学院,重庆,400715

2 西南大学 数学与统计学院,重庆,400715

$\mu_c(x) - \nu_c(x)$ 表示 x 对集合 C 的犹豫度,显然 $\pi_c(x) \in [0,1]$.有序对 $\langle \mu_c(x), \nu_c(x) \rangle$ 是 x 在集合 C 下的直觉模糊值.

定义 2 称 $I = (U, C, IF, V)$ 为直觉模糊信息系统,其中: $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是非空有限论域; $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ 是非空有限条件属性集; $IF: U \times C \rightarrow V$ 是 U 与 C 的关系集,并且 $V(x, c) = \langle \mu_c(x), \nu_c(x) \rangle$, $(\forall x \in U, c \in C)$; V 是不同对象在不同属性下取值所构成的值域.

为了衡量同一个直觉模糊集合下不同对象之间的相似度,依据文献[13]选取定义 3 的相似度函数.

定义 3 称 $S_c(x_i, x_j)$ 为定义在属性 c 下 x_i 与 x_j 的相似度^[13],具体定义如下:

$$S_c(x_i, x_j) = 1 - (\alpha(\mu_c(x_i) - \mu_c(x_j))^2 + \beta(\nu_c(x_i) - \nu_c(x_j))^2 + \gamma(\pi_c(x_i) - \pi_c(x_j))^2)^{1/2},$$

其中:

- 1) $\alpha \geq \beta > \gamma$;
- 2) $\alpha + \beta + \gamma = 1$;
- 3) $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$.

根据相似度的计算公式,我们可知以此为基础所定义的关系满足自反性与对称性,是定义在论域 U 上的相似关系.另外,为了便于研究,我们选取 $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{10}, \gamma = \frac{1}{5}$ 来具体计算任意两个对象之间的相似度.

定义 4 设 $S = S_c(x_i, x_j) \in \mu_{n \times n}$,其中 $\mu_{n \times n}$ 表示维度为 $n \times n$ 的模糊矩阵的全体.对于任意的 $\lambda \in [0,1]$,称 $S_\lambda = (s_c(i, j)^\lambda)$ 为模糊矩阵 $S = S_c(x_i, x_j)$ 的 λ -截矩阵,其中:

$$s_c(i, j)^\lambda = \begin{cases} 1, & s_c(i, j) \geq \lambda, \\ 0, & s_c(i, j) < \lambda, \end{cases}$$

显然, λ -截矩阵 S_λ 为布尔矩阵.

结合定义 3 与 4 可知,在 λ 的某一具体取值下, x_i 的相似类 $[x_i]_c^\lambda = \{x_j \in U \mid s_c(i, j)^\lambda = 1\}$.

定义 5 设 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是所研究对象的全体, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ 是条件属性集合, $X \subseteq U$ 是目标集.给定 λ 的具体取值以及属性 $c \in C$,结合粗糙集^[1]定义,可知在属性 c 下有关目标集 X 的上下近似定义如下:

$$\underline{R}_c(X) = \{x \mid [x]_c^\lambda \subseteq X, x \in U\},$$

$$\overline{R}_c(X) = \{x \mid [x]_c^\lambda \cap X \neq \emptyset, x \in U\},$$

其中 \emptyset 代表空集,表示两个集合没有公共元素.

若 $\underline{R}_c(X) \neq \overline{R}_c(X)$,称 $\langle \underline{R}_c(X), \overline{R}_c(X) \rangle$ 为直觉模糊容差粗糙集.其中:

$$X \text{ 的正域: } POS_c(X) = \underline{R}_c(X);$$

$$X \text{ 的负域: } NEG_c(X) = U - \overline{R}_c(X);$$

$$X \text{ 的边界域: } BON_c(X) = \overline{R}_c(X) - \underline{R}_c(X).$$

定义 6^[21] 在直觉模糊信息系统 $I = (U, C, IF, V)$ 下,给定目标集 X ,以及属性子集 $A \subseteq C$,则属性集 A 下 X 的近似精度 $\alpha(A, X)$ 定义为

$$\alpha(A, X) = \frac{R_c(X)}{\overline{R}_c(X)}.$$

2 多属性下直觉模糊容差粗糙集模型

由定义 5 可以求出直觉模糊信息系统中,某一具体属性下目标集的上下近似.但是,现实生活中某一对象往往有多个属性,针对这种情况我们提出乐观直觉模糊容差粗糙集模型与悲观直觉模糊容差粗糙集模型.

设 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是论域, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ 是条件属性集合, $X \subseteq U$ 是目标集,给定 λ 的具体取值.

在条件属性集 C 中,有关目标集 X 的乐观上下近似定义如下:

$$\underline{R}_c^O(X) = \{x \mid \bigvee_{c=1}^m ([x]_c^\lambda \subseteq X), x \in U\},$$

$$\overline{R}_c^O(X) = \{x \mid \bigwedge_{c=1}^m ([x]_c^\lambda \cap X \neq \emptyset), x \in U\}.$$

“ \vee ”表示“或”,“ \wedge ”表示“且”.

若 $\underline{R}_c^O(X) \neq \overline{R}_c^O(X)$,称 $\langle \underline{R}_c^O(X), \overline{R}_c^O(X) \rangle$ 为乐观直觉模糊容差粗糙集.其中:

$$X \text{ 的正域: } POS_c^O(X) = \underline{R}_c^O(X);$$

$$X \text{ 的负域: } NEG_c^O(X) = U - \overline{R}_c^O(X);$$

$$X \text{ 的边界域: } BON_c^O(X) = \overline{R}_c^O(X) - \underline{R}_c^O(X).$$

在条件属性集 C 中,有关目标集 X 的悲观上下近似定义如下:

$$\underline{R}_c^P(X) = \{x \mid \bigwedge_{c=1}^m ([x]_c^\lambda \subseteq X), x \in U\},$$

$$\overline{R}_c^P(X) = \{x \mid \bigvee_{c=1}^m ([x]_c^\lambda \cap X \neq \emptyset), x \in U\}.$$

若 $\underline{R}_c^P(X) \neq \overline{R}_c^P(X)$,称 $\langle \underline{R}_c^P(X), \overline{R}_c^P(X) \rangle$ 为悲观直觉模糊容差粗糙集.其中:

$$X \text{ 的正域: } POS_c^P(X) = \underline{R}_c^P(X);$$

$$X \text{ 的负域: } NEG_c^P(X) = U - \overline{R}_c^P(X);$$

X 的边界域: $BON_C^p(X) = \overline{R_C^p(X)} - \underline{R_C^p(X)}$.

性质 1 $\underline{R_C^p(X)} \subseteq \underline{R_C^o(X)}$; $\overline{R_C^o(X)} \subseteq \overline{R_C^p(X)}$.

证明 根据目标集 X 乐观与悲观的上下近似定义可直接推导.

根据定义 6 中近似精度定义可知: 在直觉模糊信息系统 $I = (U, C, IF, V)$ 下, 给定目标集 X , 以及属性集 C , 则属性集 C 下 X 的乐观近似精度 $\alpha^o(C, X)$ 定义为

$$\alpha^o(C, X) = \frac{R_C^o(X)}{\overline{R_C^o(X)}}.$$

相应的悲观近似精度 $\alpha^p(C, X)$ 可类似定义.

3 实例分析

针对本文所提出的多属性下直觉模糊容差粗糙集模型, 为了进一步验证其性质, 我们给出一个具体的实例, 通过求解目标集的乐观, 悲观上下近似来验证直觉模糊容差粗糙集模型其性质.

给定一个直觉模糊信息系统 $I = (U, C, IF, V)$ (表 1), 其中: 论域 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_6\}$, 条件属性集 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_6\}$, 目标集 $X = \{x_2, x_3, x_4\}$.

表 1 直觉模糊信息系统

Table 1 Intuitionistic fuzzy information system

U	c_1	c_2	c_3	c_4
x_1	$\langle 0.3, 0.4 \rangle$	$\langle 0.2, 0.6 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.7, 0.1 \rangle$
x_2	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.7, 0.3 \rangle$	$\langle 0.6, 0.3 \rangle$	$\langle 0.5, 0.1 \rangle$
x_3	$\langle 0.5, 0.1 \rangle$	$\langle 0.3, 0.2 \rangle$	$\langle 0.4, 0.1 \rangle$	$\langle 0.7, 0.3 \rangle$
x_4	$\langle 0.2, 0.5 \rangle$	$\langle 0.4, 0.2 \rangle$	$\langle 0.6, 0.2 \rangle$	$\langle 0.9, 0.1 \rangle$
x_5	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.6, 0.4 \rangle$	$\langle 0.5, 0.4 \rangle$	$\langle 0.5, 0.1 \rangle$
x_6	$\langle 1, 0 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.7, 0.3 \rangle$	$\langle 0.7, 0.2 \rangle$

令 $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{10}, \gamma = \frac{1}{5}$ 来具体计算每个属性下

任意两个对象之间的相似度, S_i 表示第 i 个属性下各对象之间的相似度矩阵, $[x]_i^\lambda$ 表示对象 x 第 i 个属性下相似度 $\geq \lambda$ 时的相似类. 为了讨论方便, 我们选取 $\lambda = 0.9$.

各个属性下的相似度矩阵 S_1, S_2, S_3, S_4 分别为

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.7571 & 0.7786 & 0.9106 & 0.8419 & 0.4423 \\ 0.7571 & 1 & 0.8735 & 0.6698 & 0.9106 & 0.6838 \\ 0.7786 & 0.8735 & 1 & 0.6918 & 0.8586 & 0.6000 \\ 0.9106 & 0.6698 & 0.6918 & 1 & 0.7571 & 0.3573 \\ 0.8419 & 0.9106 & 0.8586 & 0.7571 & 1 & 0.6000 \\ 0.4423 & 0.6838 & 0.6000 & 0.3373 & 0.6000 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.6000 & 0.7335 & 0.7243 & 0.6838 & 0.7317 \\ 0.6000 & 1 & 0.6353 & 0.7172 & 0.9106 & 0.8327 \\ 0.7335 & 0.6353 & 1 & 0.9163 & 0.6729 & 0.7975 \\ 0.7243 & 0.7172 & 0.9163 & 1 & 0.7470 & 0.8735 \\ 0.6838 & 0.9106 & 0.6729 & 0.7470 & 1 & 0.8735 \\ 0.7317 & 0.8327 & 0.7975 & 0.8735 & 0.8735 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0.9163 & 0.8129 & 0.9106 & 0.9293 & 0.8327 \\ 0.9163 & 1 & 0.7470 & 0.9293 & 0.9106 & 0.9163 \\ 0.8129 & 0.7470 & 1 & 0.7975 & 0.7470 & 0.6729 \\ 0.9106 & 0.9293 & 0.7975 & 1 & 0.8622 & 0.8735 \\ 0.9293 & 0.9106 & 0.7470 & 0.8622 & 1 & 0.8419 \\ 0.8327 & 0.9163 & 0.6729 & 0.8735 & 0.8419 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0.8327 & 0.8586 & 0.8327 & 0.8327 & 0.9293 \\ 0.8327 & 1 & 0.7470 & 0.6653 & 1 & 0.8419 \\ 0.8586 & 0.7470 & 1 & 0.8211 & 0.7470 & 0.8551 \\ 0.8327 & 0.6653 & 0.8211 & 1 & 0.6653 & 0.7975 \\ 0.8327 & 1 & 0.7470 & 0.6653 & 1 & 0.8419 \\ 0.9293 & 0.8419 & 0.8551 & 0.7975 & 0.8419 & 1 \end{pmatrix}.$$

根据相似度矩阵我们可以得到四个属性下的相似类分别是:

$$\begin{aligned} [x_1]_1^{0.9} &= \{x_1, x_4\}, [x_4]_1^{0.9} = \{x_1, x_4\}, \\ [x_1]_2^{0.9} &= \{x_1\}, [x_4]_2^{0.9} = \{x_3, x_4\}, \\ [x_1]_3^{0.9} &= \{x_1, x_2, x_4, x_5\}, [x_4]_3^{0.9} = \{x_1, x_2, x_4\}, \\ [x_1]_4^{0.9} &= \{x_1, x_6\}, [x_4]_4^{0.9} = \{x_4\}, \\ [x_2]_1^{0.9} &= \{x_2, x_5\}, [x_5]_1^{0.9} = \{x_2, x_5\}, \\ [x_2]_2^{0.9} &= \{x_2, x_5\}, [x_5]_2^{0.9} = \{x_2, x_5\}, \\ [x_2]_3^{0.9} &= \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6\}, \\ [x_5]_3^{0.9} &= \{x_1, x_2, x_5\}, \\ [x_2]_4^{0.9} &= \{x_2\}, [x_5]_4^{0.9} = \{x_2, x_5\}, \\ [x_3]_1^{0.9} &= \{x_3\}, [x_6]_1^{0.9} = \{x_6\}, \\ [x_3]_2^{0.9} &= \{x_3, x_4\}, [x_6]_2^{0.9} = \{x_6\}, \\ [x_3]_3^{0.9} &= \{x_3\}, [x_6]_3^{0.9} = \{x_2, x_6\}, \\ [x_3]_4^{0.9} &= \{x_3\}, [x_6]_4^{0.9} = \{x_1, x_6\}. \end{aligned}$$

根据上下近似定义可知, 目标集 X 的乐观悲观上下近似如下:

$$\begin{aligned} \underline{R_C^o(X)} &= \{x_2, x_3, x_4\}, \\ \overline{R_C^o(X)} &= \{x_2, x_3, x_4, x_5\}, \\ \underline{R_C^p(X)} &= \{x_3\}, \\ \overline{R_C^p(X)} &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}. \end{aligned}$$

根据计算结果, 可知:

$$\underline{R_C^p(X)} = \{x_3\} \subseteq \underline{R_C^o(X)} = \{x_2, x_3, x_4\} = \underline{R_C^o(X)},$$

$$\overline{R_C^O(X)} = \{x_2, x_3, x_4, x_5\} \subseteq \overline{\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}} = \overline{R_C^P(X)}.$$

另外,根据近似精度定义知:乐观直觉模糊粗糙

$$\text{集的近似精度 } \alpha^O(C, X) = \frac{|R_C^O(X)|}{|\overline{R_C^O(X)}|} = \frac{3}{4}; \text{悲观直觉}$$

$$\text{模糊粗糙集的近似精度 } \alpha^P(C, X) = \frac{|R_C^P(X)|}{|\overline{R_C^P(X)}|} = \frac{1}{6}.$$

根据精度大小来看,乐观近似精度大于悲观近似精度,但是二者均有不同实际意义,可根据实际情况进行选择.

4 结论

本文在直觉模糊信息系统中提出一种新的多属性下直觉模糊粗糙集模型.首先,利用相似度函数,通过求解不同对象之间对某一集合的隶属度,非隶属度以及犹豫度之间的差值,求出相似度矩阵;然后,根据相似度矩阵求出不同属性下各个对象的相似类;最后,根据本文所定义的乐观悲观上下近似,从上下两个角度对目标集进行刻画.另外,通过求解可以发现直觉模糊信息系统下,乐观近似精度在数值上大于悲观近似精度.在接下来的工作中,我们可以考虑直觉模糊信息系统下,从乐观悲观两个角度进行属性约减,进而减少计算时间,节约内存.

参考文献

References

[1] Pawlak Z. Rough sets [J]. International Journal of Computer & Information Sciences, 1982, 11(5) : 341-356
 [2] Wang Q, Qian Y H, Liang X Y, et al. Local neighborhood rough set [J]. Knowledge-Based Systems, 2018, 153: 53-64
 [3] 张清华, 王国胤, 肖雨. 粗糙集的近似集 [J]. 软件学报, 2012, 23(7) : 1745-1759
 ZHANG Qinghua, WANG Guoyin, XIAO Yu. Approximation sets of rough sets [J]. Journal of Software,

2012, 23(7) : 1745-1759
 [4] 张文修, 吴伟志. 粗糙集理论介绍和研究综述 [J]. 模糊系统与数学, 2000, 14(4) : 1-12
 ZHANG Wenxiu, WU Weizhi. An introduction and a survey for the studies of rough set theory [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2000, 14(4) : 1-12
 [5] 杨习贝, 杨静宇. 邻域系统粗糙集模型 [J]. 南京理工大学学报, 2012, 36(2) : 291-295
 YANG Xibei, YANG Jingyu. Rough set model based on neighborhood system [J]. Journal of Nanjing University of Science and Technology, 2012, 36(2) : 291-295
 [6] 徐小来, 雷英杰, 谭巧英. 基于直觉模糊三角模的直觉模糊粗糙集 [J]. 控制与决策, 2008, 23(8) : 900-904
 XU Xiaolai, LEI Yingjie, TAN Qiaoying. Intuitionistic fuzzy rough sets based on intuitionistic fuzzy triangle norm [J]. Control and Decision, 2008, 23(8) : 900-904
 [7] 张植明, 田景峰. 基于蕴涵的区间值直觉模糊粗糙集 [J]. 控制与决策, 2010, 25(4) : 614-618
 ZHANG Zhiming, TIAN Jingfeng. Interval-valued intuitionistic fuzzy rough sets based on implicators [J]. Control and Decision, 2010, 25(4) : 614-618
 [8] Coker D. Fuzzy rough sets are intuitionistic L-fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 96(3) : 381-383
 [9] Cornelis C, de Cock M, Kerre E E. Intuitionistic fuzzy rough sets: at the crossroads of imperfect knowledge [J]. Expert Systems, 2003, 20(5) : 260-270
 [10] Cornelis C, Deschrijver G, Kerre E E. Implication in intuitionistic fuzzy and interval-valued fuzzy set theory: construction, classification, application [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2004, 35(1) : 55-95
 [11] Liu Y, Lin Y. Intuitionistic fuzzy rough set model based on conflict distance and applications [J]. Applied Soft Computing, 2015, 31 : 266-273
 [12] 林梦雷, 杨伟萍. 蕴涵区间直觉模糊粗糙集及其性质 [J]. 山东大学学报(理学版), 2011, 46(8) : 104-109
 LIN Menglei, YANG Weiping. Properties of interval-valued intuitionistic fuzzy rough sets with implicators [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2011, 46(8) : 104-109
 [13] Tiwari A K, Shreevastava S, Som T, et al. Tolerance-based intuitionistic fuzzy-rough set approach for attribute reduction [J]. Expert Systems with Applications, 2018, 101 : 205-212
 [14] Jensen R, Shen Q. Computational intelligence and feature selection: rough and fuzzy approaches [M]. Hoboken, New Jersey: Wiley & Sons, 2008

Multiple attribute intuitionistic fuzzy tolerance rough set models

XU Weihua¹ YUAN Kehua² LI Wentao¹

¹ College of Artificial Intelligence, Southwest University, Chongqing 400715

² School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715

Abstract This paper proposes the intuitionistic fuzzy rough set models based on tolerance relation in intuitionistic fuzzy information system, in which the target concept is described from two aspects of optimistic and pessimistic,

which is a new approximation method for target concept. In addition, some relationship is found between optimistic and pessimistic approximations. The approximate accuracy of optimistic intuitionistic fuzzy tolerance rough set is higher than that of the pessimistic one according to the definition of approximation accuracy. Finally, the empirical analysis is provided, which verifies the effectiveness of the presented method.

Key words intuitionistic fuzzy information system; intuitionistic fuzzy tolerance rough set; conceptual approximation; approximation accuracy