



边界微分方程及其应用



作者简介:文舸一,1982年7月本科毕业于西北电讯工程学院雷达信息处理专业,1984年12月获西北电讯工程学院(现西安电子科技大学)电磁场微波技术专业硕士学位,1987年9月获西安电子科技大学电磁场微波技术专业博士学位。1988年4月—1990年11月在东南大学无线电系做第一期博士后(讲师),1990年12月—1992年12月在电子科技大学应用物理研究所做第二期博士后(副教授),1992年6月—1993年5月在美国伯克利加州大学电子学研究所访问。1993年6月—1998年8月为电子科技大学应用物理研究所教授,博士生导师,应用物理研究所副所长、所长。1998年2月—1998年5月为加拿大滑铁卢大学客座教授。1998年8月—2007年12月在加拿大黑莓手机制造商RIM公司工作,先后担任射频部资深科学家,公司预研部总监。2010年回国任复旦大学教授并入选“国家特聘专家”。现任南京信息工程大学应用电磁学研究中心教授,主要从事电磁场与微波技术学科的教学和科研工作,在国内外期刊发表论文100余篇,出版英文专著两部(Foundations of Applied Electrodynamics, Wiley, 2010; Foundations for Radio Frequency Engineering, World Scientific, 2015),中文专著两部(电磁理论新进展,国防工业出版社,1998;电磁场数值计算的现代方法,科学与工程计算丛书,河南科学技术出版社,1994)。
E-mail: wgy@nuist.edu.cn

摘要

本文讨论二维 Helmholtz 方程外边值问题的求解,以较为严格的方式建立了更精准的新的边界微分方程。在贴体坐标系下, Helmholtz 方程可转化为非齐次 Bessel 方程。将 Bessel 方程的一般解代入 Sommerfeld 辐射条件可以得到等价于原 Helmholtz 方程的积分-微分方程,再利用分部积分消去其中积分,即可建立高频问题的边界微分方程。文中通过若干算例对新得到的边界微分方程进行了数值验证。

关键词

贴体坐标系;散射问题;边界微分方程

中图分类号 O29;O59

文献标志码 A

0 引言

物理问题既可用局部微分方程描述,也可用整体积分方程描述。前者可用域法(如有限元法、有限差分法等)进行数值求解,离散后得到的矩阵方程是稀疏的;后者则可用边界法(如矩量法、边界元法等)进行数值求解,得到的矩阵方程是稠密的。域法中的待求未知量分布于整个求解区域,而边界法的待求未知量仅限于边界。故用域法所得到的稀疏矩阵的阶数通常要远高于边界法得到的稠密矩阵阶数。又因边界法的离散误差仅限于边界,故精度较域法高。

当微分方程的解定义在无限大区域(如外边值问题)时,其数值求解过程必须引入截断边界(即吸收边界),以保证未知量数目为有限。截断边界的引入会导致人为的反射与干扰,从而影响计算结果精度。为了表征场在截断边界处的真实行为以及避免由于反射引起的场失真,在截断边界处必须引入人工边界条件,称作吸收边界条件。国内外学者对吸收边界条件做过大量研究^[1-24]。吸收边界条件实质上是研究场与其法向导数在截断边界上的关系。Kriegsmann 等基于远区场展开式,直接将吸收边界条件用于散射体表面,得到所谓表面辐射条件(SRC)^[8]。这是一个大胆尝试,在理论上欠严密,其合法性一直没有严格的论证。Jones 基于电磁场在等相面附近的展开给出了推导 SRC 的一种新方法^[9]。他认为 SRC 中应包含散射体的局部几何信息(如曲率等),但其推导过程用到几何光学假定,即电磁场可以展开成波长的幂级数且展开系数与波长无关。尔后又出现了若干针对 SRC 的改进

收稿日期 2019-09-15

基金项目 国家自然科学基金(61971231)

¹ 南京信息工程大学 应用电磁学研究中心, 南京,210044

方案^[10-24].

SRC 通常是定义在散射体表面的微分方程, 故可称作边界微分方程 (BDE). 由于 SRC 兼有域法和边界法的优点, 其数值求解只涉及到低阶的稀疏矩阵方程, 优点不言自明. 本文试图摆脱前述大胆尝试与假定, 用较为严格的方式建立新的 BDE. 通过采用贴体坐标系, Helmholtz 方程可转化为非齐次 Bessel 方程. 再利用 Sommerfeld 辐射条件, 可以得到等价于原 Helmholtz 方程的积分-微分方程. 该积分-微分方程给出场及其法向导数的精确关系式. 对高频问题, 利用分部积分可消去其中的积分而得到 BDE, 其形式不同于常见的 SRC. 数值计算结果表明, 新的 BDE 可有效地用于高频散射问题的研究.

1 贴体坐标系中的 Helmholtz 方程

设二维标量场 φ 满足如下标量 Helmholtz 方程:

$$(\nabla^2 + k^2)\varphi(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \mathbf{R}^2 - \Omega, \quad (1)$$

式中 \mathbf{R}^2 表示欧氏平面, k 为波数, Ω 是平面上有一有界凸区域, 其边界用 Γ 表示. 令 $\tilde{\Gamma}$ 表示包围 Ω 的曲线, 并假定 $\tilde{\Gamma}$ 平行于 Γ , 即 $\tilde{\Gamma}$ 系由 Γ 中的点沿法向作常数平移而得. 故 $\tilde{\Gamma}$ 上任意一点 P 可表示为

$$\mathbf{r}(\rho, s) = \mathbf{r}_0(s) + \rho \mathbf{u}_n(s),$$

式中 \mathbf{u}_n 是曲线 Γ 的单位法向矢量, $\mathbf{r}_0(s)$ 是曲线 Γ 的以弧长 s 为参数的位置矢量, ρ 是点 $\mathbf{r}_0(s)$ 到点 P 的法向距离. 贴体坐标系如图 1 所示. 显然, 曲线坐标系 (ρ, s) 是正交的, 其度量系数是

$$\begin{aligned} h_1 &\equiv \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}} = h_1^0 [1 + \rho \kappa_0(s)], \\ h_2 &\equiv \sqrt{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}} = 1, \end{aligned} \quad (2)$$

式中 $h_1^0(s)$ 是度量系数 h_1 在 $\rho = 0$ 处的取值, 其表达式为 $h_1^0(s) = \sqrt{(\partial \mathbf{r}_0 / \partial s) \cdot (\partial \mathbf{r}_0 / \partial s)}$; $\kappa_0(s)$ 是 Γ 在 $\rho = 0$ 处的曲率. 推导式(2)时用到如下关系:

$$\frac{d\mathbf{u}_n}{ds} = \kappa_0(s) \frac{d\mathbf{r}_0}{ds}.$$

曲线 $\tilde{\Gamma}$ 在 P 点的曲率 κ 可用 κ_0 表示为

$$\kappa(\rho, s) = \frac{\kappa_0(s)}{1 + \rho \kappa_0(s)}. \quad (3)$$

在曲线坐标系 (ρ, s) 中, 拉氏算符可表示为

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) =$$

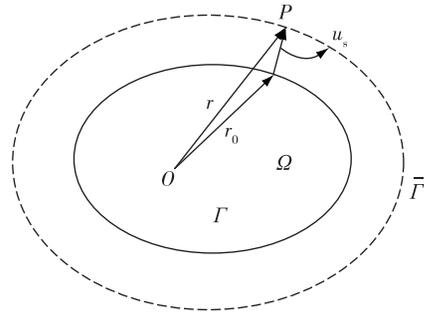


图 1 贴体坐标系

Fig. 1 Body-fitted coordinate system

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) + \frac{1}{h_1} \left(h_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial h_1}{\partial \rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right).$$

由于 s 是弧长参数, 故有 $h_1^0 = 1$. 于是式(1)可写作:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{\kappa_0(s)}{1 + \rho \kappa_0(s)} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + k^2 \varphi = \frac{1}{1 + \rho \kappa_0(s)} f(\rho), \quad (4)$$

其中

$$f(\rho) = - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{1 + \rho \kappa_0} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right). \quad (5)$$

上式只含对弧长的(切向)导数. 设曲率 κ_0 不为零, 遂令 $\xi = (1 + \rho \kappa_0) / \kappa_0$, 将方程(4)写作:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + k^2 \varphi = \frac{f}{\xi \kappa_0}. \quad (6)$$

因此, 对贴体坐标系中的凸散射体, Helmholtz 方程(1)可转换为零阶非齐次 Bessel 方程(6).

2 边界微分方程

零阶非齐次 Bessel 方程(6)的一般解可表示成

$$\varphi(\xi) = A J_0(k\xi) + B N_0(k\xi) + \varphi_0(\xi), \quad (7)$$

式中 A 和 B 是个两个独立于 ξ 的常数; J_0 和 N_0 分别是第一类和第二类零阶 Bessel 函数; φ_0 是方程(6)的一个特解, 可表示为

$$\begin{aligned} \varphi_0(\xi) = & - J_0(k\xi) \int_{1/\kappa_0}^{\xi} \frac{N_0(k\xi) f(\xi)}{\xi \kappa_0 W(J_0, N_0)} d\xi + \\ & N_0(k\xi) \int_{1/\kappa_0}^{\xi} \frac{J_0(k\xi) f(\xi)}{\xi \kappa_0 W(J_0, N_0)} d\xi, \end{aligned}$$

式中 $W(J_0, N_0)$ 是函数 J_0 和 N_0 的 Wronskian 行列式. 简单计算表明:

$$W(J_0, N_0) =$$

$$k [J_0(k\xi) N_0'(k\xi) - J_0'(k\xi) N_0(k\xi)] = 2/(\pi \xi), \quad (8)$$

式中撇号表示对 Bessel 函数的参量求导. 注意到散

射体表面 Γ 上有 $\xi = 1/\kappa_0$, 从式(7) 可推得场量 φ 及其法向导数的表达式:

$$\begin{aligned} \varphi|_{\Gamma} &= AJ_0(\nu) + BN_0(\nu), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} &= AkJ'_0(\nu) + BkN'_0(\nu), \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $\nu = k/\kappa_0$. 由式(8) 和式(9) 可推得:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi \nu}{2k} \left[kN'_0(\nu) \varphi|_{\Gamma} - N_0(\nu) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \right], \\ B &= \frac{\pi \nu}{2k} \left[-kJ'_0(\nu) \varphi|_{\Gamma} + J_0(\nu) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

于是,一般解(7) 可进一步表示为

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \frac{\pi k \nu}{2k} [N'_0(\nu) J_0(k\xi) - J'_0(\nu) N_0(k\xi)] \varphi|_{\Gamma} + \\ &\frac{\pi \nu}{2k} [J_0(\nu) N_0(k\xi) - J_0(k\xi) N_0(\nu)] \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - \\ &\frac{\pi}{2\kappa_0} J_0(k\xi) \int_{1/\kappa_0}^{\xi} N_0(k\xi) f(\xi) d\xi + \\ &\frac{\pi}{2\kappa_0} N_0(k\xi) \int_{1/\kappa_0}^{\xi} J_0(k\xi) f(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (11)$$

其法向导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= \frac{\pi k \nu}{2} [N'_0(\nu) J'_0(k\xi) - J'_0(\nu) N'_0(k\xi)] \varphi|_{\Gamma} + \\ &\frac{\pi \nu}{2} [J_0(\nu) N'_0(k\xi) - N_0(\nu) J'_0(k\xi)] \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - \\ &\frac{k\pi}{2\kappa_0} J'_0(k\xi) \int_{1/\kappa_0}^{\xi} N_0(k\xi) f(\xi) d\xi + \\ &\frac{k\pi}{2\kappa_0} N'_0(k\xi) \int_{1/\kappa_0}^{\xi} J_0(k\xi) f(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (12)$$

又当 ρ 充分大时,场 φ 必须满足 Sommerfeld 辐射条件:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + jk\varphi \right) = 0. \quad (13)$$

将式(11) 和(12) 代入式(13), 并利用 Bessel 函数的渐近关系,可得到:

$$\begin{aligned} kH_1^{(2)}(\nu) \varphi|_{\Gamma} + H_0^{(2)}(\nu) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} &= \\ \int_0^{+\infty} H_0^{(2)}[\nu(1+\rho\kappa_0)] \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{1+\rho\kappa_0} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) d\rho. \end{aligned} \quad (14)$$

于是 Helmholtz 方程(1) 可转换成式(14) 所示的等价积分-微分方程.积分-微分方程(14) 是标量场 φ 与其法向导数的关系,且是个严格的表达式.可看出标量场 φ 与其法向导数之间的关系在一般情况下是及其复杂的.现作变量代换

$H_0^{(2)}[\nu(1+\rho\kappa_0)] = h_0(\rho)e^{-j\kappa\rho}$, $f(\rho) = f_0(\rho)e^{-j\kappa\rho}$, 并利用分部积分可得到:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} H_0^{(2)}[k(1+\rho\kappa_0)/\kappa_0] f(\rho) d\rho &= \\ \left[-\frac{j3H_0^{(2)}(\nu)}{4k} + \frac{H_1^{(2)}(\nu)}{4k} \right] f(0) - \frac{1}{4k^2} H_0^{(2)}(\nu) \frac{\partial f_0(0)}{\partial \rho} - \\ \frac{1}{4k^2} \int_0^{+\infty} e^{-j2\kappa\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} [h_0(\rho)f_0(\rho)] d\rho. \end{aligned} \quad (15)$$

注意到 $f_0(\rho)$ 和 $h_0(\rho)$ 都是 ρ 的慢变化函数,故式(15) 右边的积分可忽略.于是:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} H_0^{(2)}[k(1+\rho\kappa_0)/\kappa_0] f(\rho) d\rho &= \\ \left[\frac{j3H_0^{(2)}(\nu)}{4k} - \frac{H_1^{(2)}(\nu)}{4k} \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \Big|_{\Gamma} - \frac{H_0^{(2)}(\nu)}{4k^2} \cdot \\ \left[\kappa'_0 \frac{\partial \varphi}{\partial s} \Big|_{\Gamma} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + \kappa_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \Big|_{\Gamma} - jk \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \Big|_{\Gamma} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

将式(16) 代入式(14) 可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} &= \left(-\frac{j}{k} + \frac{1}{4k\tau} + \frac{\kappa_0}{4k^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \Big|_{\Gamma} + \\ \frac{\kappa'_0}{4k^2} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \Big|_{\Gamma} - \frac{1}{4k^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - \frac{k}{\tau} \varphi|_{\Gamma}, \end{aligned} \quad (17)$$

式中 $\tau = H_0^{(2)}(\nu)/H_1^{(2)}(\nu)$. 忽略式(17) 中高于 $1/k^2$ 的项,则有:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = - \left(\frac{j3}{4k} - \frac{1}{4k\tau} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \Big|_{\Gamma} - \frac{k}{\tau} \varphi|_{\Gamma}. \quad (18)$$

忽略式(17) 中高于 $1/k$ 的项,则有:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = - \frac{k}{\tau} \varphi|_{\Gamma}. \quad (19)$$

方程(17)、(18) 和(19) 即是所求的边界微分方程.注意,这些方程仅含沿法向的一阶导数.

3 导体柱的散射

下面讨论用边界微分方程求解无穷长导体柱的散射问题.在外场的激励下,导体柱表面会产生感应电流,感应电流进一步产生散射场.为了确定表面电流分布,通常需要求解 Dirichlet 边值问题或 Neumann 边值问题.在 TM 波(横磁波)入射下,标量场 φ 在柱体表面上的取值是已知的,属于 Dirichlet 边值问题.在 TE 波(横电波)入射下,标量场 φ 在柱体表面上的法向导数取值是已知的,属于 Neumann 边值问题.下面分别讨论上述两种情况.

1) TM 波入射

设入射 TM 波的电场强度为 \mathbf{E}^{in} , 入射方向与正 x 轴形成的夹角记作 α , 如图 2 所示. 设入射波电场强度方向平行于柱体轴线, 可表示成

$$\mathbf{E}^{\text{in}} = \mathbf{u}_z E^{\text{in}} = \mathbf{u}_z e^{-jk r} = \mathbf{u}_z e^{jk(x \cos \alpha + y \sin \alpha)},$$

式中 \mathbf{u}_z 是沿正 z 轴方向的单位矢量. 将柱体表面感应电流产生的散射场记作 $\mathbf{E}^{\text{s}} = \mathbf{u}_z E^{\text{s}}$, 柱体外总电场记作 $\mathbf{E} = \mathbf{u}_z E$. 根据电磁场边界条件, 导体表面上总电场的切向分量必须等于零. 故有:

$$E(\mathbf{r}) = E^{\text{in}}(\mathbf{r}) + E^{\text{s}}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Gamma, \quad (20)$$

其中 Γ 表示柱体横截面的边界. 在边界微分方程 (18) 中令 $\varphi|_{\Gamma} = E^{\text{s}}$, 则有:

$$\frac{\partial E^{\text{s}}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = - \left(\frac{j3}{4k} - \frac{1}{4k\tau} \right) \frac{\partial^2 E^{\text{s}}}{\partial s^2} \Big|_{\Gamma} - \frac{k}{\tau} E^{\text{s}} \Big|_{\Gamma}. \quad (21)$$

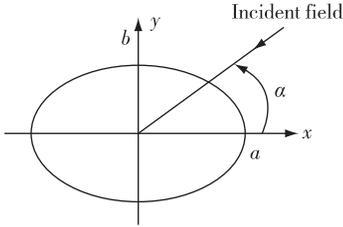


图 2 平面波照射下的无穷长导体柱

Fig. 2 An infinitely long conducting cylinder illuminated by a plane wave

柱体表面的电流分布 \mathbf{J} 只含纵向分量, 可确定如下^[25]:

$$\eta_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_z \eta_0 J(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_z \left. \frac{1}{jk} \frac{\partial E}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \mathbf{u}_z \left(\left. \frac{1}{jk} \frac{\partial E^{\text{in}}}{\partial n} \right|_{\Gamma} + \left. \frac{1}{jk} \frac{\partial E^{\text{s}}}{\partial n} \right|_{\Gamma} \right), \quad (22)$$

式中 $\eta_0 = 120\pi$ 表示自由空间波阻抗. 利用式 (20)、(21) 和 (22) 不难推得:

$$\eta_0 J = \left(\frac{3}{4k^2} - \frac{1}{j4k^2\tau} \right) \frac{\partial^2 E^{\text{in}}}{\partial s^2} \Big|_{\Gamma} + \frac{1}{j\tau} E^{\text{in}} \Big|_{\Gamma} + \frac{1}{jk} \frac{\partial E^{\text{in}}}{\partial n} \Big|_{\Gamma}. \quad (23)$$

式 (23) 表明表面电流可直接根据已知入射场解析求出.

以上讨论基于式 (18). 若对精度有更高要求, 可采用式 (17). 此时电流满足二阶微分方程:

$$\frac{1}{4k^2} \frac{\partial^2 \eta_0 J}{\partial s^2} + \eta_0 J = \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{j4k^2\tau} - \frac{\kappa_0}{j4k^3} \right) \frac{\partial^2 E^{\text{in}}}{\partial s^2} \Big|_{\Gamma} - \frac{\kappa_0'}{j4k^3} \frac{\partial E^{\text{in}}}{\partial s} \Big|_{\Gamma} +$$

$$\frac{1}{j4k^3} \frac{\partial^2 E^{\text{in}}}{\partial s^2} \frac{\partial E^{\text{in}}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + \frac{1}{j\tau} E^{\text{in}} \Big|_{\Gamma} + \frac{1}{jk} \frac{\partial E^{\text{in}}}{\partial n} \Big|_{\Gamma}.$$

该方程可用下面一阶迭代方案求得:

$$\eta_0 J = - \frac{1}{4k^2} \frac{\partial^2 \eta_0 J^{(0)}}{\partial s^2} + \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{j4k^2\tau} - \frac{\kappa_0}{j4k^3} \right) \frac{\partial^2 E^{\text{in}}}{\partial s^2} \Big|_{\Gamma} - \frac{\kappa_0'}{j4k^3} \frac{\partial E^{\text{in}}}{\partial s} \Big|_{\Gamma} + \frac{1}{j4k^3} \frac{\partial^2 E^{\text{in}}}{\partial s^2} \frac{\partial E^{\text{in}}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + \frac{1}{j\tau} E^{\text{in}} \Big|_{\Gamma} + \frac{1}{jk} \frac{\partial E^{\text{in}}}{\partial n} \Big|_{\Gamma}. \quad (24)$$

式中 $\eta_0 J^{(0)}$ 由式 (23) 确定. 数值计算结果表明, 一阶迭代解 (24) 对精度的提高十分有限. 因此下面的算例都基于式 (23). 设弧长的计算起点为正 x 轴. 图 3 给出了 $k=6$ 时单位半径导体圆柱表面上归一化电流 $\eta_0 J$ 的幅度与归一化弧长参数 s/λ (λ 为工作波长) 的关系曲线. 可看出 BDE 的计算结果与矩量法 (MoM) 算得的结果相当吻合.

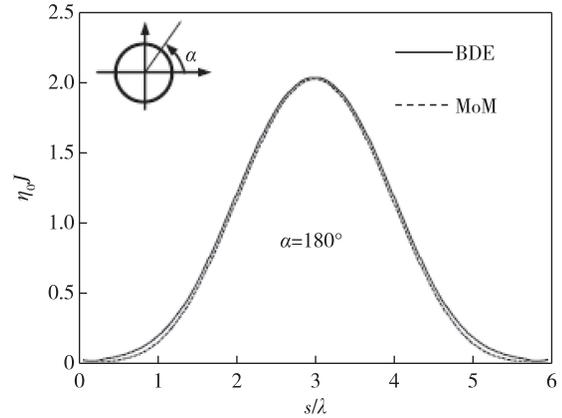
图 3 圆柱导体上电流分布, TM 入射 ($k=6, a=b=1$)

Fig. 3 Current on circular cylinder, TM case

图 4 给出了长轴 $a=2$ 、短轴 $b=1$ 的椭圆柱体 (图 2) 的表面电流分布 ($k=4$). 图 4 中显示了不同入射角的计算结果, 并与矩量法进行了对比, 两者基本吻合.

图 5 给出了薄导体条带上的表面电流分布 (薄条带可用椭圆近似, 这里令 $a=2, b=0.01$). 可看出 BDE 给出的电流分布在条带上下是平坦的, 而在条带两端因曲率为无穷大而呈现奇异性, 这与物理光学解相吻合.

2) TE 波入射

设入射 TE 波的磁场强度为 (图 2)

$$\mathbf{H}^{\text{in}} = \mathbf{u}_z H^{\text{in}} = \mathbf{u}_z e^{-jk r} = \mathbf{u}_z e^{jk(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}.$$

该入射场所感应的散射场记作 $\mathbf{H}^{\text{s}} = \mathbf{u}_z H^{\text{s}}$. 在柱

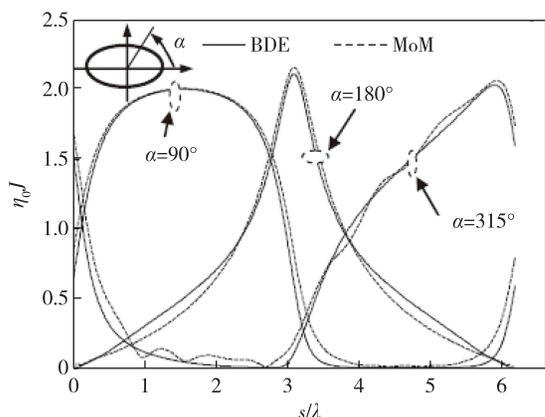


图4 椭圆导体上电流分布, TM 入射($k=4, a=2, b=1$)

Fig. 4 Current on elliptical cylinder, TM case

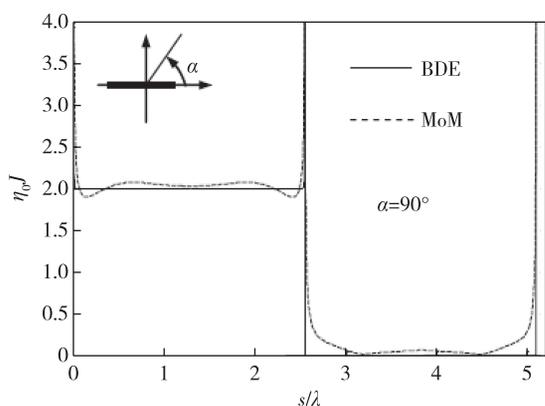


图5 薄条带上电流分布, TM 入射($k=4, a=2, b=0.01$)

Fig. 5 Current on a thin strip, TM case

体表面上,总磁场 $\mathbf{H} = \mathbf{u}_z H$ 必须满足齐次 Neumann 边界条件:

$$\frac{\partial H(\mathbf{r})}{\partial n} = \frac{\partial H^{\text{in}}(\mathbf{r})}{\partial n} + \frac{\partial H^{\text{s}}(\mathbf{r})}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{r} \in \Gamma. \quad (25)$$

在式(17)、(18)和(19)中令 $\varphi|_{\Gamma} = H^{\text{s}}$, 分别得到

$$\left(-\frac{j3}{4k} + \frac{1}{4k\tau} - \frac{j}{4k} + \frac{\kappa_0}{4k^2} \right) \frac{\partial^2 H^{\text{s}}}{\partial s^2} \Big|_{\Gamma} + \frac{\kappa'_0}{4k^2} \frac{\partial H^{\text{s}}}{\partial s} \Big|_{\Gamma} - \frac{k}{\tau} H^{\text{s}} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial H^{\text{s}}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + \frac{1}{4k^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial H^{\text{s}}}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \quad (26)$$

$$\left(j3k - \frac{k}{\tau} \right) \frac{\partial^2 H^{\text{s}}}{\partial s^2} \Big|_{\Gamma} + \frac{4k^3}{\tau} H^{\text{s}} \Big|_{\Gamma} = -4k^2 \frac{\partial H^{\text{s}}}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial H^{\text{s}}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = -\frac{k}{\tau} H^{\text{s}} \Big|_{\Gamma}. \quad (28)$$

表面电流则由下式确定:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_{\varphi} J(\mathbf{r}) = -\mathbf{u}_{\varphi} [H^{\text{in}}(\mathbf{r}) + H^{\text{s}}(\mathbf{r})]. \quad (29)$$

相对于式(26)、(27)和(28), 电流分布分别满足下述方程:

$$J = a(s) \frac{\partial^2 J}{\partial s^2} + b(s) \frac{\partial J}{\partial s} + c(s), \quad (30)$$

$$J = g(s) \frac{\partial^2 J}{\partial s^2} + f(s), \quad (31)$$

$$J = -\frac{\tau}{k} \frac{\partial H^{\text{in}}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - H^{\text{in}} \Big|_{\Gamma}, \quad (32)$$

表达式(30)和(31)中各项系数定义为

$$a(s) = -\frac{j\tau}{k^2} + \frac{1}{4k^2} + \frac{\kappa_0\tau}{4k^3}, \quad b(s) = \frac{\kappa'_0\tau}{4k^3},$$

$$c(s) = a(s) \frac{\partial^2 H^{\text{in}}}{\partial s^2} \Big|_{\Gamma} + b(s) \frac{\partial H^{\text{in}}}{\partial s} \Big|_{\Gamma} - H^{\text{in}} \Big|_{\Gamma} - \frac{\tau}{k} \frac{\partial H^{\text{in}}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - \frac{\tau}{4k^3} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{\partial H^{\text{in}}}{\partial n} \Big|_{\Gamma},$$

$$g(s) = -\frac{j3\tau}{4k^2} + \frac{1}{4k^2},$$

$$f(s) = g(s) \frac{\partial^2 H^{\text{in}}}{\partial s^2} \Big|_{\Gamma} - H^{\text{in}} \Big|_{\Gamma} - \frac{\tau}{k} \frac{\partial H^{\text{in}}}{\partial n} \Big|_{\Gamma}.$$

类似地, 可将式(32)代入式(30)和式(31)得到一阶迭代解. 下面的讨论基于式(31). 图6给出了 $k=4$ 时椭圆柱体上的表面电流分布. 在阴影区, BDE 结果与矩量法略有差别, 与 TM 情况相比精度显然要低. 但 BDE 解的精度随着频率升高会明显改善. 图7给出了 $k=50$ 时椭圆柱体上的表面电流分布. 显然, BDE 解的精度有所改善, 与矩量法吻合较好.

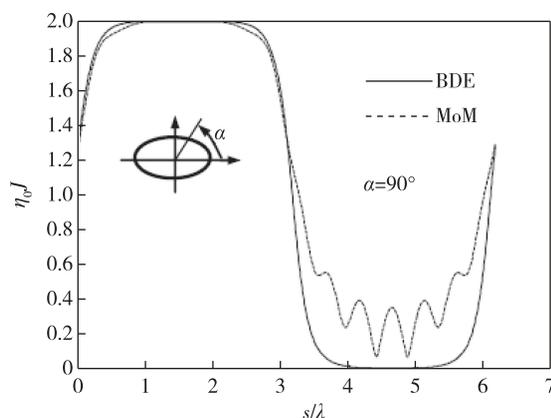


图6 椭圆柱上电流分布, TE 入射($k=4, a=2, b=1$)

Fig. 6 Current on elliptical cylinder, TE case

4 结束语

本文采用贴体坐标系, 将二维 Helmholtz 方程的外边值问题转化成积分-微分方程. 从积分-微分方程出发, 以较为严格的方式建立了适用于高频问题的

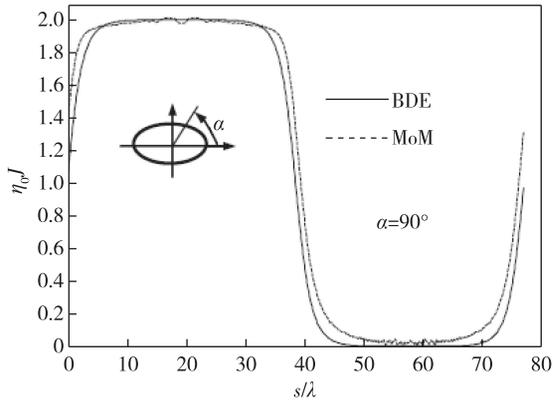


图7 椭圆柱上电流分布,TE入射($k=50, a=2, b=1$)

Fig. 7 Current on elliptical cylinder, TE case

边界微分方程,克服了过去推导表面辐射条件时直接将远区场展开式用于散射体表面而不加论证的粗糙做法.新得到的边界微分方程的解可以解析求得,经数值检验其精度能满足一般工程要求.

本文的研究尚属初步尝试,还有很多相关问题需做进一步深入探讨.例如,如何将边界微分方程推向更低的频段以及更复杂的散射体等.值得指出,对低频散射问题也存在解析迭代解^[26].

参考文献

References

- [1] Lindman E L. Free-space boundary conditions for the time dependent wave equation [J]. *Journal of Computational Physics*, 1975, 18(1) : 66-78
- [2] Engquist B, Majda A. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves [J]. *Mathematics of Computation*, 1977, 31(139) : 629-651
- [3] Bayliss A, Turkel E. Radiation boundary conditions for wave-like equations [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1980, 33(6) : 707-725
- [4] Mur G. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations [J]. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 1981, EMC-23(4) : 377-382
- [5] Feng K. Asymptotic radiation conditions for reduced wave equation [J]. *J Comput Math*, 1984, 2 : 130-138
- [6] Moore T G, Blaschak J G, Taflove A, et al. Theory and application of radiation boundary operators [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1988, 36(12) : 1797-1812
- [7] Mitra R, Ramahi O. Absorbing boundary conditions for the direct solution of partial differential equations arising in electromagnetic scattering problems [M] // *Finite Element and Finite Difference Methods in Electromagnetic Scattering*. Elsevier, 1990 : 133-173. DOI : 10. 1016/b978-0-444-01518-1.50010-9
- [8] Kriegsmann G, Taflove A, Umashankar K. A new formulation of electromagnetic wave scattering using an on-surface radiation boundary condition approach [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1987, 35(2) : 153-161
- [9] Jones D S. Surface radiation conditions [J]. *IMA J Appl Math*, 1988, 41 : 21-30
- [10] Kriegsmann D S J A. Note on surface radiation conditions [J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1990, 50(2) : 559-568
- [11] Jones D S. An improved surface radiation condition [J]. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1992, 48(2) : 163-193
- [12] Arendt S, Umashankar K R, Taflove A, et al. Extension of on-surface radiation condition theory to scattering by two-dimensional homogeneous dielectric objects [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1990, 38(10) : 1551-1558
- [13] Jin J M, Volakis J L, Liepa V V. A comparative study of the OSRC approach in electromagnetic scattering [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1989, 37(1) : 118-124
- [14] Ma Y C. A note on the radiation boundary conditions for the Helmholtz equation [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1991, 39(10) : 1526-1530
- [15] Umashankar K, Chun W, Taflove A. Simple analytical solution to electromagnetic scattering by two-dimensional conducting object with edges and corners. I. TM polarization [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1991, 39(12) : 1665-1671
- [16] Murch R D. The on-surface radiation condition applied to three-dimensional convex objects [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1993, 41(5) : 651-658
- [17] Calvo D C, Collins M D, Dacol D K. A higher-order on-surface radiation condition derived from an analytic representation of a dirichlet-to-Neumann map [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2003, 51(7) : 1607-1614
- [18] Teymur M. A note on higher-order surface radiation conditions [J]. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1996, 57(2) : 137-163
- [19] Antoine X. Fast approximate computation of a time-harmonic scattered field using the on-surface radiation condition method [J]. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2001, 66(1) : 83-110
- [20] Antoine X, Darbas M, Lu Y Y. An improved surface radiation condition for high-frequency acoustic scattering problems [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195(33/34/35/36) : 4060-4074
- [21] Acosta S. High order surface radiation conditions for time-harmonic waves in exterior domains [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, 322 : 296-310
- [22] 韩厚德, 巫孝南. 人工边界方法: 无界区域上的偏微分方程数值解 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2009
HAN Houde, WU Xiaonan. Artificial boundary method: numerical method for solving partial differential equations on unbounded domains [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2009

- [23] 文舸一. 计算电磁学的进展与展望[J]. 电子学报, 1995,23(10):62-69
WEN Geyi. Recent advances in computational electromagnetics[J]. Acta Electronica Sinica, 1995, 23(10): 62-69
- [24] 文舸一. 测度不变方程法及其应用[J]. 电子学报, 1995,23(3):73-77
WEN Geyi. The method of measuring equation of invariance and its applications[J]. Acta Electronica Sinica, 1995,23(3):73-77
- [25] WEN Geyi. Foundations of applied electrodynamics[M]. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2010. DOI: 10.1002/9780470661369
- [26] 文舸一. 电磁散射问题的 Neumann 级数解[J]. 电子学报, 1995,23(12):67-70
WEN Geyi. Neumann's series solutions for low frequency electromagnetic scattering problems[J]. Acta Electronica Sinica, 1995,23(12):67-70

Boundary differential equations and their applications

WEN Geyi¹

¹ Research Center of Applied Electromagnetics, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044

Abstract In this paper, new boundary differential equations for the two-dimensional exterior scattering problem have been derived. It has been shown that the Helmholtz equation can be reduced to an inhomogeneous Bessel's equation in a body-fitted coordinate system. By imposing the Sommerfeld radiation condition to the general solution of the Bessel's equation, an integro-differential equation, which is equivalent to the original Helmholtz equation, can be obtained. The boundary differential equation can then be established by use of the integration by parts to get rid of the integral in the integro-differential equation for high frequency problems. Numerical examples have been presented to demonstrate the validity of the new boundary differential equations.

Key words body-fitted coordinate system; scattering problem; boundary differential equation