DOI:10.13878/j.cnki.jnuist.2020.01.003

曹进德[1]　宋强[2]　刘芳[3,4]　程尊水[5]

复杂网络牵制控制概述

摘要

本文回顾了十多年来复杂网络牵制控制的研究进展,对复杂网络现有的牵制控制算法进行了归纳分类,然后基于网络拓扑及节点动力学特性讨论了网络牵制控制的一些必要或充分条件.针对牵制控制下的复杂网络,重点论述了牵制节点的选取策略,综合分析了牵制节点个数、耦合强度、牵制控制增益及节点动力学等因素对复杂网络牵制控制的影响,讨论了具有合作竞争关系符号网络牵制控制的进展,并简要介绍了复杂网络牵制控制的一些应用前景.最后,就复杂网络牵制控制将来的研究方向提了一些建议及展望.

关键词

复杂网络;牵制控制;牵制节点;牵制控制增益;耦合强度

中图分类号 TP13;O231.5

文献标志码 A

作者简介:曹进德,男,东南大学首席教授、校学术委员会副主任、校务委员会委员、理学部主任、教育部高等学校数学类专业教指委委员、江苏省工业与应用数学学会理事长、江苏省运筹学会副理事长、数学学院院长、江苏省网络群体智能重点实验室主任、国家自然科学基金重点项目负责人、江苏省首届十佳研究生导师、享受国务院特殊津贴.2019 年当选国际系统与控制科学院院士,2018 年当选欧洲科学与艺术院院士,2017 年当选巴基斯坦科学院院士并荣获首届全国创新争先奖,2016 年当选为欧洲科学院院士,2015 年当选 IEEE Fellow.连续入选 Thomson Reuters/Clarivate Analytics 全球高被引科学家(覆盖工程学、计算机科学和数学三个领域).
E-mail:jdcao@ seu.edu.cn

收稿日期 2019-04-15
基金项目 国家自然科学基金(61833005,61973177,61773155);河南省科技攻关计划(182102410067,182102310625);河南省群体机器人协同控制创新型科技团队项目

1 东南大学 数学学院,南京,210096
2 南通大学 电气工程学院,南通,226019
3 黄淮学院 信息工程学院,驻马店,463000
4 河南省智能机器人行为优化控制国际联合实验室,驻马店,463000
5 青岛科技大学 数理学院,青岛,266061

0 引言

现实生活中的互联网、交通网、航空网、电力网、生物网和无线传感器网等网络系统都可用复杂网络进行建模和分析[1-5].因此,在过去的几十年里,复杂网络引起了学者们的浓厚兴趣并得到了深入研究.1960 年 Erdös 和 Rényi 开创了随机图理论,为随机复杂网络的研究提供了理论支撑[6];1998 年 Watts 和 Strogatz 提出了小世界网络模型,分析了网络的小世界效应[7];1999 年 Barabási 建立了无标度网络模型,揭示了复杂网络的幂律特性[8].无疑,这些开创性工作为复杂网络研究奠定了坚实基础并促进了复杂网络研究的飞速发展.

由于复杂网络在现实生活中广泛存在,关于复杂网络的同步控制问题的研究成为网络科学的一个重要研究课题.复杂网络的同步可分为有领导者和无领导者两种.有些网络仅利用相邻节点的信息,在某些条件下可使整个网络涌现出同步现象,称为无领导者情形下的同步[9-13].但是,多数复杂网络仅依赖节点的信息交互自身无法达到同步,针对这些复杂网络,可设计合适的分布式控制器,驱使网络同步于某一领导者的状态(平衡点、混沌轨线或孤立节点等).复杂网络这种在外部控制作用下的同步行为可被称作有领导者情形下的同步[14-50].

现有研究成果表明,仅对少数关键节点施加控制,可使网络所有节点的状态趋于一致,这种策略被称为牵制控制(pinning control).牵

制控制策略无疑可大大降低复杂网络的控制成本,提高经济效益,具有较高的理论和应用价值.Wang 等[14]首次采用牵制控制策略,成功实现了无标度网络的控制;Li 等[15]提出了"虚拟控制"(virtual control)的概念,通过讨论控制信号在网络中的传播,揭示了复杂网络牵制控制的机理;Chen 等[21]指出,当牵制控制增益足够大时,可以控制一个节点来实现对整个复杂网络的控制.

在复杂网络的牵制控制中,首先要解决的问题是牵制节点的选取,即控制应该施加在哪些节点上.对此,学者们对不同网络提出了相应的节点选取方法,发现对无标度网络,应首先牵制度数大的节点;而对随机网络,牵制度大的节点和随机选取牵制节点并没有明显区别[14-15];当耦合强度比较小时,牵制度较小的节点效果也可能会更好[16-17].由于耦合矩阵的不对称性,有向网络的牵制节点选取比较困难,若网络的拓扑包含一条有向生成树,根节点必须被选为牵制节点[21];否则,可对网络拓扑进行强连通分解,然后研究牵制节点的选取[22-23].

最初的牵制控制方法往往要求网络的牵制增益和耦合强度足够大,因而会使得控制成本较高,该方法在现实中难以实现.Song 等[29]利用 M 矩阵理论证明,选取较大的牵制控制增益可使网络的牵制控制更容易实现,但牵制控制增益达到某临界值时,增加牵制控制增益并不能有效地提高牵制控制的性能.因此,对于一个复杂态网络,如何避免牵制控制增益及耦合强度过大、牵制节点数目过多,或者说,如何在牵制控制增益、耦合强度和牵制节点数目之间寻求一种平衡,仍然值得深入研究.

十多年来,复杂网络的牵制控制已得到了较为深入的研究.无向复杂网络的牵制控制研究已较为成熟[14-20],有向复杂网络的牵制控制研究也产出了较为丰硕的成果[21-32],时滞复杂网络的牵制控制[33-38]和切换拓扑下复杂网络的牵制控制[42,49-50]取得了一些进展,具有正负连边符号图拓扑的复杂网络的牵制控制近年来引起了人们较大的研究兴趣[51-55],复杂网络的牵制控制在实际中也具有一定的应用前景[56-60].

本文旨在概述复杂网络牵制控制的研究进展,主要包括牵制控制条件、牵制节点选取、影响网络牵制控制的因素、符号复杂网络牵制控制、牵制控制算法、牵制控制的应用.最后,总结现有结论,给出复杂网络牵制控制研究的一些未来研究方向.

1 基础知识

具有 N 个节点的复杂网络可用下式描述[14]:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=f(\boldsymbol{x}_i)+\boldsymbol{c}\sum_{i=1}^{N}a_{ij}\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_i)+\boldsymbol{u}_i,\ i=1,\cdots,N, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}_i=(x_{i1},\cdots,x_{in})^{\mathrm{T}}$ 为网络节点 i 的状态变量;$f:\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}^n$ 是连续的向量函数;$\boldsymbol{c}$ 为耦合强度;$\boldsymbol{\Gamma}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为节点间的内部耦合矩阵,本文中假设其为正定矩阵;a_{ij} 为网络(1)的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{N\times N}$ 的元素,若从节点 j 到 $i(j\neq i)$ 有一条有向边,则 $a_{ij}>0$,否则 $a_{ij}=0$;对角元素 $a_{ii}=0,i=1,\cdots,N$;$\boldsymbol{u}_i$ 为节点 i 的控制信号.

复杂网络(1)的拉普拉斯矩阵定义如下[26-29]:$\boldsymbol{L}=(l_{ij})_{N\times N}$,其中 $l_{ij}=-a_{ij}\leqslant 0(i\neq j)$ 及 $l_{ii}=\sum_{k=1}^{N}a_{ik}$,可见拉普拉斯矩阵是行和皆为零的耗散矩阵,这样复杂网络(1) 可写为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=f(\boldsymbol{x}_i)-\boldsymbol{c}\sum_{i=1}^{N}l_{ij}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{x}_j+\boldsymbol{u}_i,\quad i=1,\cdots,N. \tag{2}$$

复杂网络(2)的领导者节点为

$$\dot{\boldsymbol{s}}(t)=f(\boldsymbol{s}). \tag{3}$$

复杂网络牵制控制算法的核心思想是:仅对一小部分关键节点施加控制,通过网络节点间的相互耦合,使领导者可直接或间接地影响所有节点的状态,最终使网络(2)节点的状态同步于领导者(3)的状态,即 $\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}_i(t)-\boldsymbol{s}(t)\|=0,i=1,\cdots,N$.特别需要指出的是,仅有被牵制的网络节点才能获取领导者的信息,而领导者的状态却不受任何节点的影响.

对于复杂网络(2),令 V 与 $V_{\mathrm{pin}}\subset V$ 分别为全部节点及牵制节点的集合,利用局部线性反馈,可为复杂网络(2) 设计以下的牵制控制器[27]:

$$\boldsymbol{u}_i=-\boldsymbol{c}\boldsymbol{d}_i\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{s}), \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{d}_i$ 为牵制控制增益,若 $i\in V_{\mathrm{pin}}$,则 $\boldsymbol{d}_i>0$;否则 $\boldsymbol{d}_i=0$.

本文主要基于局部线性反馈控制算法(4)分析及讨论复杂网络(2)的牵制控制.

2 复杂网络全局牵制控制的条件

本节讨论复杂网络的全局牵制控制条件.

令 $\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{s},i=1,\cdots,N$,考虑到拉普拉斯矩阵的耗散性质,从式(2)—(4) 可得以下的误差系统:

$$\dot{\boldsymbol{e}}_i=f(\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{s})-f(\boldsymbol{s})-\boldsymbol{c}\sum_{j=1}^{N}l_{ij}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{e}_j-\boldsymbol{c}\boldsymbol{d}_i\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{e}_i,$$

$i=1,\cdots,N.$ (5)

可将系统(5)写为矩阵形式:

$$\dot{\boldsymbol{e}}(t)=F(\boldsymbol{e},\boldsymbol{s})-\boldsymbol{c}((\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D})\otimes)\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{e}, \tag{6}$$

其中

$\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{e}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{d}_1,\cdots,\boldsymbol{d}_N)$,

$F(\boldsymbol{e},\boldsymbol{s})=(f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{s})-f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{s}),\cdots,f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_N+\boldsymbol{s})-f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{s}))^{\mathrm{T}}.$

研究结果表明,复杂网络牵制控制条件的表达形式与节点动力学性质密切相关,节点动力学满足QUAD或Lipschitz条件的复杂网络,其牵制控制条件可用代数不等式表达[16,21,26-28];节点动力学满足扇区条件的复杂网络,其牵制控制条件可以采用低维的线性矩阵不等式进行描述[31-32].在本文中,为分析复杂网络(2)的牵制控制,对节点非线性函数做以下假设.

假设1[16] 对于复杂网络(2)的非线性函数,假设存在一个正常数θ使得

$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}(f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y}))\leqslant\theta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$, $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$.

以下关于网络拓扑及节点间连边的假设对牵制控制的研究至关重要.

假设2[26] 对于网络(2)未被牵制控制的任何节点$i\in V\backslash V_{\mathrm{pin}}$,总存在一个牵制节点$j\in V_{\mathrm{pin}}$,使得节点$j$到节点$i$存在一条有向路径,从而领导者节点(3)到网络(2)的任何节点都有一条有向路径.

假设2是实现复杂网络牵制控制的一个必要条件,否则网络(2)的某些节点状态无法受到领导者的直接或间接影响,导致网络不能实现牵制控制.

在满足假设1和2的前提下,为研究网络(2)的全局牵制控制条件,目前文献主要采用以下两种方法:

一种是基于未被牵制的网络节点对应的拉普拉斯矩阵的子矩阵构造一个对称矩阵,然后利用该矩阵的最大特征值给出网络的牵制控制条件[16,26-27]:

$$\lambda_{\max}(\boldsymbol{H})>\frac{\theta}{\boldsymbol{c}}, \tag{7}$$

其中矩阵$\boldsymbol{H}$是矩阵$(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})/2$中由未被牵制节点构成的子矩阵.

另一种则是把拉普拉斯矩阵$\boldsymbol{L}$与牵制反馈增益矩阵$\boldsymbol{D}$构成矩阵$\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}$,再利用$\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}$所有特征值的最小实部和M矩阵理论研究复杂网络牵制控制条件[28]:

$$\min_{1\leqslant i\leqslant N}\mathrm{Re}(\lambda_i(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}))>\frac{\theta}{\boldsymbol{c}}. \tag{8}$$

从条件(7)和(8)可见,复杂网络牵制控制的条件与网络拓扑、节点动力学及耦合强度等因素密切相关.特别需要指出的是,文献[29]利用M矩阵理论证明,假设1可保证矩阵$\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}$的特征值均在右半开平面;而优先控制出度大于入度的节点,并适当选取牵制控制增益条件,假设1可保证矩阵$(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})/2$的特征值皆为正数(具体请参见文献[29]的Proposition 4).

在复杂网络牵制控制条件的推导中,涉及的主要数学工具是代数图理论和Lyapunov稳定性理论[16-30],对于具有时滞复杂网络可构造适当的Lyapunov-Krasovskii函数进行分析[33-38].

3 牵制节点的选取策略

在复杂网络牵制控制的研究中,最关键的一个科学问题是如何有效地选取一组合适的牵制节点,即需要施加控制信号的节点.本节概述复杂网络牵制节点选取策略的一些主要研究成果.

3.1 牵制节点选取的总体原则

为实现复杂网络的牵制控制,领导者必须直接或间接影响到网络的所有节点,使得网络节点和领导者共同构成的图必须含有一条有向生成树,且领导者为唯一的根节点[21].不难发现,第2节中的假设2可以保证牵制节点的选取原则得到满足.

3.2 无向网络的牵制节点选取

对于连通的无向网络,一般采用随机选取或特定选取两种方式选择牵制节点[14-15].一般地说,优先牵制度大的节点控制性能要好,这对无标度网络是成立的.但是,对随机网络,牵制度大的节点和随机选取牵制节点并没有明显区别.当耦合强度比较小时,牵制度小的节点效果反而更好[16-17].

当无向网络的拓扑不连通时,网络拓扑由多个连通的子图构成,针对每个子图采用随机或特定的方式选取牵制节点,那么牵制节点的集合即为所有子图牵制节点集合的并集.

3.3 有向网络的牵制节点选取

与无向网络比较,有向网络由于耦合矩阵的不对称性,牵制节点的选取更具挑战性.下面介绍一下有向网络牵制节点选取研究取得的一些成果.

如果网络拓扑包含一条有向生成树,根节点必须被选为牵制节点[21-22].尤其需要指出的是,在耦合强度足够大的情况下,对一个根节点施加控制即可

实现网络的牵制控制[21].

对于不包含有向生成树的有向网络,牵制节点的选取较为困难.Wu[22-23]指出牵制控制必须施加到每一组有向树的根节点;Lu 等[25]定义了 Control Rank(CR)概念,指出应优先牵制 CR 大的节点;Lu 等[26]根据拓扑强连通部分和 M 矩阵理论,研究了牵制节点选取;Song 等[27]综合考虑节点的出度及入度,指出应优先牵制那些出度大于入度的节点;Song 等[28-29]利用 M 矩阵理论,把拓扑分解为最小数目的子图,提出了一些牵制节点的选取策略.最近,Cheng 等[30]基于左 Perron 特征向量研究牵制节点的选取,发现前一个牵制节点选定以后,后一个牵制节点应选取与前面所有牵制节点距离最远的节点;或者说,较为有效的牵制策略应该是使得牵制节点均匀分布在整个网络中[30].

下面以网络进行强连通分解为例讨论牵制节点的选取,对于不包含有向生成树的有向网络,其拉普拉斯矩阵为可约矩阵且具有以下的 Frobenius 标准形式[22-23]:

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PLP}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1,k+1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1,k+m}\\ & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ & & \boldsymbol{B}_k & \boldsymbol{B}_{k,k+1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{k,k+m}\\ & & & \boldsymbol{B}_{k+1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ & & & & \ddots & \boldsymbol{0}\\ & & & & & \boldsymbol{B}_{k+m}\end{bmatrix},\tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 为置换矩阵,$\boldsymbol{B}_i(i=1,\cdots,k+m)$ 皆为不可约矩阵,$\boldsymbol{0}$ 代表合适维数的零矩阵,$1\leqslant m<N$.

注意到矩阵 $\boldsymbol{L}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值,因此可根据拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的 Frobenius 标准形式 $\boldsymbol{B}$ 矩阵对应的图研究复杂网络的牵制控制.从式(9)可看出,后 m 行矩阵 $\boldsymbol{B}_i,i=k+1,\cdots,k+m$ 对应的子图都没有外部的入边,为满足第 2 节的假设 2,每个子图 $\boldsymbol{B}_i(i=k+1,\cdots,k+m)$ 的根节点必须被选为牵制节点.事实上,$\boldsymbol{B}_i,i=1,\cdots,k+m$ 对应的子图皆为强连通,这些子图中的每个节点皆为根节点,因此可对每个子图任意选取一个节点作为牵制节点.

进一步,对每一个强连通子图,可以选取出度大于入度的点优先牵制;对出度和入度相等的节点,可以用基于左 Perron 特征向量的办法顺序选取牵制节点的集合[30].

4　影响网络牵制控制的因素分析

影响复杂网络牵制控制的因素主要包括牵制节点个数、牵制控制增益、耦合强度及节点动力学等.

4.1　牵制节点个数的影响

为实现复杂网络的牵制控制,应至少控制最小数目的节点,对于含有一条有向生成树的网络,牵制节点的最小数目为 1;对于具有一般拓扑的复杂网络,拉普拉斯矩阵为 m-可约矩阵,其 Frobenius 标准形式由式(9)给出,牵制节点的最小数目为 m,研究结果已表明,假设 2 条件满足情形下,拉普拉斯矩阵零特征值的代数重数恰好为 m[22,26,28].

下面我们讨论牵制节点数目对复杂网络牵制控制的影响.一些文献通过数值仿真或定性分析,发现牵制较多的节点可使牵制控制更容易实现.然而,如果某些关键节点没被牵制使得第 2 节中的假设 2 不成立,导致存在一些节点不受领导者的影响,这样即使牵制节点数目再多,网络也不能被同步到期望的轨线上.在满足第 2 节假设 2 的条件下,Song 等[29]利用代数图理论、非负矩阵和 M 矩阵等,从理论上严格证明,增加牵制节点的个数可以使 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\mathrm{Re}(\lambda_i(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}))$ 取得更大的值,从而使复杂网络的牵制控制更容易实现.

4.2　牵制控制增益的影响

牵制控制增益对复杂网络的牵制控制性能也具有较大的影响.早期的一些文献往往把牵制控制增益选得较大,2013 年 Song 等[29]利用代数图理论、非负矩阵和 M 矩阵等工具,从理论上证明在满足第 2 节中假设 2 的前提下,增大牵制控制增益可使牵制控制更容易实现,但过大的牵制控制增益却不能有效地提高网络的牵制控制性能.尤其是当牵制控制增益足够大时,网络拉普拉斯矩阵与牵制控制增益矩阵共同构成的 $\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}$ 矩阵的特征值最小实部将收敛于某一常数[29].为优化牵制控制增益,一些文献采用以下自适应算法[16,27]:

$\dot{\boldsymbol{d}}_i(t)=\alpha_i\ (\boldsymbol{x}_i(t)-\boldsymbol{s}(t))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x}_i(t)-\boldsymbol{s}(t))$, $\alpha_i>0$ 在线调整牵制控制增益

4.3　耦合强度的影响

耦合强度对复杂网络的牵制控制具有较大的影响.在满足第 2 节中假设 2 的前提下,从条件(7)和(8)可以看出,耦合强度越大,实现复杂网络牵制牵制的牵制节点数目就越少.特别需要指出的是,当网络拓扑包含一条有向生成树且耦合强度足够大的情形下,仅牵制一个根节点也可实现整个网络的牵制控制[21].

4.4 节点动力学的影响

从条件(7)和(8)可见节点的动力学特性对耦合强度对复杂网络的牵制控制也有影响.参数 θ 越小,实现网络牵制控制的牵制节点数目就越少,反之则需要牵制较多的网络节点.

如何在牵制节点数目、牵制控制增益及耦合强度之间寻找一个平衡,达到利用较小数目的节点和尽可能小的牵制增益,实现整个复杂网络的牵制控制,仍然是当前牵制控制的公开问题之一.

5 符号网络的牵制控制

近年来,具有正负连边的符号网络的分布式控制受到了广泛关注[51-55],其中正边代表节点间的合作关系,而负边则表示节点间的竞争关系.符号网络的拓扑可被称为符号图,而常规网络的拓扑可被称为无符号图.

2013 年,Altafini[51]研究了一阶符号网络的分布式控制,符号网络的拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}=(l_{ij})_{N\times N}$ 定义为 $l_{ij}=-a_{ij}(i\neq j)$ 及 $l_{ii}=\sum_{k=1}^{N}|a_{ik}|$,所以其行和不一定都为零,这点与常规网络有着很大的不同.在符号网络分布式控制研究中,结构平衡与不平衡是至关重要的概念.按文献[51],如果一个符号图的节点集合可分解为两个互斥的子集,每个子集内部节点间连边的权重皆为正值,而两个子集节点之间连边的权重皆为负值,则称该符号图为结构平衡,否则称该图为结构不平衡.

结构平衡符号网络在一定条件下会涌现出二分一致性(bipartite consensus)的群体行为,即一部分节点的状态收敛于某条轨线,而其余节点的状态则收敛于此轨线的负值[51-55].近年来,具有结构平衡图拓扑的复杂网络的牵制控制研究取得了一些进展,文献[53]研究了牵制控制下节点动力学满足 Lipschitz 条件的符号网络的二分同步;文献[54]研究了结构平衡符号图拓扑下 Lur'e 网络的二分同步问题,并设计了连续时间及采样控制的牵制控制算法;文献[55]利用牵制控制研究了时滞神经网络的二分同步问题,并考虑了节点时滞为可微或不可微的两种情形.

在研究结构平衡符号网络的牵制控制时,可首先确定牵制节点集合,通过坐标变换把符号图变换为常规图[51],按照常规网络的牵制控制策略选取牵制节点.然后设计牵制控制增益,即确定领导者到牵制节点连边的正负符号,按结构平衡定义把节点集合分解为两个互斥的子集,领导者与其中一个子集的牵制节点如果连边皆为正,那么与另一子集中牵制节点的连边必须为负.

结构不平衡的符号网络的分布式研究结果较少,文献[52]利用根环的概念研究了符号网络的稳定性及二分区间一致性问题.

6 复杂网络的牵制控制算法

近年来,学者们对牵制控制算法(4)进行了扩展,提出了一些新的牵制控制算法.下面我们从控制理论的观点,对复杂网络牵制控制的主要算法进行适当归纳分类.

1)连续通信情形下的反馈牵制控制算法

目前,复杂网络的牵制控制算法大多是对牵制节点施加连续时间的局部反馈控制即节点间连续通信,主要形式为算法(4),根据网络耦合项设计线性反馈或非线性反馈的分布式牵制控制器[14-37].注意到有些文献进一步提出了自适应的反馈牵制控制算法,对耦合强度、牵制反馈增益或网络连接权值进行在线调整[19-21].

2)间歇通信情形下的反馈牵制控制算法

连续时间反馈牵制控制算法的一个主要不足是网络节点需要连续通信.为减少领导者和牵制节点间的通信频次,有些学者提出了周期或非周期的间歇牵制控制算法,仅在一系列不连续的时间间隔内才对牵制节点施加反馈控制,而在其他时间间隔里牵制控制信号皆为零[38-39].下式给出周期间歇牵制控制下的复杂网络,其中 ω 为控制宽度,T 为周期:

对于 $nT\leqslant t<nT+\omega$,有

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=f(\boldsymbol{x}_i(t))-\boldsymbol{c}\sum_{i=1}^{N}l_{ij}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{x}_j(t)-\boldsymbol{c}\boldsymbol{d}_i\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x}_i(t)-\boldsymbol{s}(t)),$$

当 $nT+\omega\leqslant t<(n+1)T$ 时,

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=f(\boldsymbol{x}_i(t))-\boldsymbol{c}\sum_{i=1}^{N}l_{ij}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{x}_j(t).$$

3)基于采样数据的反馈牵制控制算法

考虑到控制理论中采样控制算法的优点,一些文献利用一系列采样时刻获取的网络节点采样数据,设计了周期或非周期的采样反馈牵制控制算法[40-41],领导者仅在采样时刻才与牵制节点进行通信,从而大大减轻了网络的通信负荷,降低了复杂网络的牵制控制成本.基于采样数据牵制控制算法的复杂网络可描述如下:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=f(\boldsymbol{x}_i(t))-\boldsymbol{c}\sum_{i=1}^{N}l_{ij}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{x}_j(t_k)-\boldsymbol{c}\boldsymbol{d}_i\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x}_i(t_k)-\boldsymbol{s}(t_k)),$$

$t \in [nT,(n+1)T), \quad i=1,\cdots,N.$

4)事件触发下的反馈牵制控制算法

近年一些文献把事件触发控制策略应用于复杂网络的牵制控制,根据局部节点信息定义适当的事件触发函数,提出事件触发下复杂网络的反馈牵制控制算法[42-43],仅在事件触发时刻才启动牵制控制,从而极大地降低了通信和控制成本,算法如下:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)= f(\boldsymbol{x}_i(t)) - \boldsymbol{c}\sum_{i=1}^{N} l_{ij}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{x}_j(t_k^i) - \boldsymbol{c}\boldsymbol{d}_i\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x}_i(t_k^i) - \boldsymbol{s}(t_k^i)),$$
$$t \in [t_k^i, t_{k+1}^i), \quad i=1,\cdots,N,$$

其中 t_k^i 为事件触发时刻.

5)脉冲牵制控制算法

一些学者采用脉冲控制策略设计了复杂网络的脉冲牵制控制算法,牵制节点的状态在一系列离散时刻按一定算法进行跳变[44-47].以下为文献[44]提出的复杂网络的脉冲牵制控制算法:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=f(\boldsymbol{x}_i(t)) - \boldsymbol{c}\sum_{i=1}^{N} l_{ij}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{x}_j(t), \quad t\neq t_k,$$
$$\boldsymbol{x}_i(t_k^+)=\boldsymbol{x}_i(t_k^-)+\mu(\boldsymbol{x}_i(t_k^-)-\boldsymbol{s}(t_k^-)), \quad i\in V_{\text{pin}},$$
$$\boldsymbol{x}_i(t_k^+)=\boldsymbol{x}_i(t_k^-), \quad i\in V\backslash V_{\text{pin}}.$$

6)混合控制牵制控制算法

有些文献把多种不同的控制策略相互结合,提出了复杂网络的混合控制牵制控制算法,比如文献[48]把反馈控制和脉冲控制进行结合,实现了复杂网络的牵制控制.

7 网络牵制控制的应用

网络系统的牵制控制不仅具有较高的理论价值,同时也具有广泛的潜在应用前景.下面我们简要讨论一下网络牵制控制的一些相关实际应用.

1)辨识复杂网络的结构

考虑以下的复杂网络模型:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=f(\boldsymbol{x}_i) - \boldsymbol{c}\sum_{i=1}^{N} l_{ij}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{x}_j, \quad i=1,\cdots,N.$$

为辨识上述网络的拉普拉斯矩阵,文献[56]基于牵制控制的思想,提出相应的观测器网络:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_i(t)=f(\hat{\boldsymbol{x}}_i) - \sum_{i=1}^{N} \hat{l}_{ij}\boldsymbol{\Gamma}\hat{\boldsymbol{x}}_j - \boldsymbol{d}_i\boldsymbol{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{x}}_i-\boldsymbol{x}_i),$$
$$\dot{\hat{\boldsymbol{d}}}_i=\alpha_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i-\boldsymbol{x}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}(\hat{\boldsymbol{x}}_i-\boldsymbol{x}_i),$$
$$\dot{\hat{l}}_{ij}=\beta_{ij}(\hat{\boldsymbol{x}}_i-\boldsymbol{x}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}\hat{\boldsymbol{x}}_i, \quad i,j=1,\cdots,N.$$

在以上观测器网络中,α_i,β_{ij} 为正常数,定义 V_{pin} 为观测器网络中可获取原网络节点状态的节点集合,若 $i\in V_{\text{pin}}$ 则 $\boldsymbol{d}_i>0$,否则 $\boldsymbol{d}_i=0$.当观测器网络与原网络实现同步时,l_{ij} 可认为是 $\hat{l}_{ij}$ 的收敛值.

2)在电网中的应用

设 $\boldsymbol{\rho}_i(t)$ 为电网能量第 i 个存储单元的状态,文献[57]采用以下的牵制控制策略对 $\boldsymbol{\rho}_i(t)$ 进行调节:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_i(t)=\sum_{i=1}^{N} l_{ij}\boldsymbol{\rho}_j\boldsymbol{d}_i(\boldsymbol{\rho}_i-\boldsymbol{\rho}_r), \quad i=1,\cdots,N,$$

其中 $\boldsymbol{\rho}_r$ 为领导者单元的状态.

3)跟踪领导者的蜂拥及编队控制

牵制控制策略也可应用于多个机器人、飞行器的蜂拥及编队控制中[58-60].对于由 N 个二阶系统构成的网络,设 $\boldsymbol{q}_i=(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{v}_i)^{\mathrm{T}}$ 为第 i 个节点的状态,而 $\boldsymbol{q}_r=(\boldsymbol{x}_r,\boldsymbol{y}_r)^{\mathrm{T}}$ 为领导者的状态,可采用牵制控制的策略设计控制器:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=\boldsymbol{v}_i,$$
$$\dot{\boldsymbol{v}}_i(t)=\boldsymbol{u}_i=f(\boldsymbol{q}_i,\boldsymbol{q}_j,\boldsymbol{q}_r \mid j\in N_i), \quad i=1,\cdots,N,$$

其中 N_i 为第 i 个节点的近邻节点集合.

8 结论及展望

本文回顾了十多年来复杂网络的牵制控制算法及其实施策略的研究进展,重点论述了牵制节点的选取,综合分析了影响网络牵制控制性能的因素.尽管复杂网络牵制控制已取得了很多成果,但仍存在一些挑战性难题值得深入探索.下面对复杂网络的牵制控制研究提出一些展望:

1)分布式复杂网络的牵制控制.目前文献关于复杂网络中牵制节点的选取大多涉及到网络拓扑结构的全局信息,如何利用局部邻居信息,实现完全分布式的复杂网络牵制控制,这是一个亟待解决的有趣问题.

2)牵制节点个数、牵制控制增益和网络收敛速度的优化.一般来讲,当牵制节点数目较少时,需匹配较大的牵制反馈增益,为减小复杂网络牵制控制的代价,应在牵制节点个数与牵制控制增益间取得适当的平衡.利用较小的控制增益和较少的牵制节点,就可以实现复杂网络的牵制控制同步,这是一个值得探索的研究方向.另外,牵制节点个数和控制增益都较小时,实现同步的收敛速度往往比较慢,如何在牵制节点个数、反馈增益和收敛速度之间寻找一种最优的牵制策略,仍值得深入研究.

3)具有切换拓扑的复杂网络的牵制控制.目前复杂网络的牵制控制研究主要侧重于固定拓扑下的网络,对于具有切换拓扑的有向或无向网络,如何保

持网络拓扑的连通性或在一定时间间隔切换子图并图的连通性,从而确保复杂网络的牵制控制,是值得深入研究的又一个公开问题.

4)复杂网络的牵制可控性.目前,复杂网络牵制控制问题的研究大多集中在实现网络同步或一致性,而关于复杂网络的可控性已经有了丰富的研究成果,如何将它们结合起来,在牵制控制的条件下,实现复杂网络的可控性,是一个新的研究课题.

5)超网络、异质网络的牵制控制问题.近年来,随着复杂网络研究的深入,人们提出了超网络(网络的网络)以及根据网络节点的不同动力学特性,提出了异质网络的概念.目前关于超网络和异质网络的牵制控制的研究结果较少,值得深入研究.

参考文献
References

[1] 汪小帆,李翔,陈关荣.复杂网络理论及其应用[M].北京:清华大学出版社,2006
WANG Xiaofan,LI Xiang,CHEN Guanrong.Complex networks theory and its application[M].Beijing:Tsinghua University Press,2006

[2] 郭雷,许晓鸣.复杂网络[M].上海:上海科技教育出版社,2006
GUO Lei, XU Xiaoming. Complex networks [M]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers,2106

[3] Wu C W. Synchronization in complex networks of nonlinear dynamical systems[M].World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd.,2007

[4] 何大韧,刘宗华,汪秉宏.复杂系统与复杂网络[M].北京:高等教育出版社,2009
HE Daren, LIU Zonghua, WANG Binhong. Complex systems and complex networks[M].Beijing:Higher Education Press,2009

[5] 陈光,温广辉,虞文武.基于复杂网络的城市公交网络研究综述[J].南京信息工程大学学报(自然科学版),2018,10(4):401-408
CHEN Guang,WEN Guanghui,YU Wenwu.A survey of studies on urban public transportation networks based on complex network[J].Journal of Nanjing University of Information Science & Technology (Natural Science Edition),2018,10(4):401-408

[6] Erdös P,Rényi A.On the evolution of random graphs[J].Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Science,1960,5(1):17-60

[7] Watts D J,Strogatz S H.Collective dynamics of ‘small-world’ networks[J].Nature,1998,393(6684):440-442

[8] Barabási A. Emergence of scaling in random networks [J].Science,1999,286(5439):509-512

[9] Wu C W, Chua L O. Synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications,1995,42(8):430-447

[10] Pecora L M,Carroll T L.Master stability functions for synchronized coupled systems [J]. Physical Review Letters,1998,80(10):2109-2112

[11] Lü J H,Chen G R.A time-varying complex dynamical network model and its controlled synchronization criteria [J].IEEE Transactions on Automatic Control,2005,50(6):841-846

[12] Lu W L,Chen T P.New approach to synchronization analysis of linearly coupled ordinary differential systems[J].Physica D: Nonlinear Phenomena, 2006, 213 (2): 214-230

[13] Arenas A,Díaz-Guilera A,Kurths J,et al.Synchronization in complex networks[J].Physics Reports,2008,469(3):93-153.

[14] Wang X F,Chen G R.Pinning control of scale-free dynamical networks[J].Physica A: Statistical Mechanics and its Applications,2002,310(3/4):521-531

[15] Li X,Wang X F,Chen G R.Pinning a complex dynamical network to its equilibrium[J].IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2004, 51 (10): 2074-2087

[16] Yu W W,Chen G R,Lü J H.On pinning synchronization of complex dynamical networks[J].Automatica,2009,45(2):429-435

[17] Zou Y L,Chen G R.Choosing effective controlled nodes for scale-free network synchronization[J].Physica A:Statistical Mechanics and its Applications,2009,388(14):2931-2940

[18] Xiang J,Chen G R.Analysis of pinning-controlled networks:a renormalization approach[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2009,54(8):1869-1875

[19] de Lellis P,di Bernardo M,Garofalo F.Synchronization of complex networks through local adaptive coupling[J].Chaos,2008,18(3):037110

[20] de Lellis P,di Bernardo M,Porfiri M.Pinning control of complex networks via edge snapping[J].Chaos,2011,21(3):033119

[21] Chen T P,Liu X W,Lu W L.Pinning complex networks by a single controller[J].IEEE Transactions on Circuits and Systems I:Regular Papers,2007,54(6):1317-1326

[22] Wu C W.Localization of effective pinning control in complex networks of dynamical systems[C]//2008 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 2008: 2530-2533

[23] Wu C W.On the relationship between pinning control effectiveness and graph topology in complex networks of dynamical systems[J].Chaos,2008,18(3):037103

[24] Zhou J,Lu J A,Lü J H.Pinning adaptive synchronization of a general complex dynamical network[J].Automatica,2008,44(4):996-1003

[25] Lu Y Y,Wang X F.Pinning control of directed dynamical networks based on ControlRank[J].International Journal of Computer Mathematics,2008,85(8):1279-1286

[26] Lu W L,Li X,Rong Z H.Global stabilization of complex networks with digraph topologies via a local pinning algorithm[J].Automatica,2010,46(1):116-121

[27] Song Q,Cao J D.On pinning synchronization of directed

and undirected complex dynamical networks [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2010,57(3):672-680

[28] Song Q, Liu F, Cao J D, et al. Pinning-controllability analysis of complex networks: an M-matrix approach [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2012, 59(11):2692-2701

[29] Song Q, Liu F, Cao J D, et al. M-matrix strategies for pinning-controlled leader-following consensus in multiagent systems with nonlinear dynamics [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2013, 43(6):1688-1697

[30] Cheng Z S, Xin Y M, Cao J D, et al. Selecting pinning nodes to control complex networked systems [J]. Science China Technological Sciences, 2018, 61(10):1537-1545

[31] Song Q, Cao J D, Liu F, et al. Some simple criteria for pinning a Lur'e network with directed topology [J]. IET Control Theory & Applications, 2014, 8(2):131-138

[32] Huang N, Duan Z S, Wen G H, et al. Event-triggered consensus tracking of multi-agent systems with Lur'e nonlinear dynamics [J]. International Journal of Control, 2016, 89(5):1025-1037

[33] Lu J Q, Ho D W C, Wang Z D. Pinning stabilization of linearly coupled stochastic neural networks via minimum number of controllers [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2009, 20(10):1617-1629

[34] Zhao J C, Lu J A, Zhang Q J. Pinning a complex delayed dynamical network to a homogenous trajectory [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2009, 56(6):514-518

[35] Zhou J, Wu X Q, Yu W W, et al. Pinning synchronization of delayed neural networks [J]. Chaos, 2008, 18(4):043111

[36] Guo W L, Austin F, Chen S H, et al. Pinning synchronization of the complex networks with non-delayed and delayed coupling [J]. Physics Letters A, 2009, 373(17):1565-1572

[37] Song Q, Cao J D, Liu F. Pinning-controlled synchronization of hybrid-coupled complex dynamical networks with mixed time-delays [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2012, 22(6):690-706

[38] Xia W G, Cao J D. Pinning synchronization of delayed dynamical networks via periodically intermittent control [J]. Chaos, 2009, 19(1):013120

[39] Liu X W, Chen T P. Cluster synchronization in directed networks via intermittent pinning control [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2011, 22(7):1009-1020

[40] Wen G, Yu W, Chen M Z Q, et al. H_∞ pinning synchronization of directed networks with aperiodic sampled-data communications [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2014, 61(11):3245-3255

[41] Dharani S, Rakkiyappan R, Park J H. Pinning sampled-data synchronization of coupled inertial neural networks with reaction-diffusion terms and time-varying delays [J]. Neurocomputing, 2017, 227:101-107

[42] Adaldo A, Alderisio F, Liuzza D, et al. Event-triggered pinning control of switching networks [J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2015, 2(2):204-213

[43] Zhou B, Liao X F, Huang T W, et al. Pinning exponential synchronization of complex networks via event-triggered communication with combinational measurements [J]. Neurocomputing, 2015, 157:199-207

[44] Zhou J, Wu Q J, Xiang L. Pinning complex delayed dynamical networks by a single impulsive controller [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2011, 58(12):2882-2893

[45] Lu J Q, Kurths J, Cao J D, et al. Synchronization control for nonlinear stochastic dynamical networks: pinning impulsive strategy [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2012, 23(2):285-292

[46] Yang X S, Cao J D, Yang Z C. Synchronization of coupled reaction-diffusion neural networks with time-varying delays via pinning-impulsive controller [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2013, 51(5):3486-3510

[47] He W L, Qian F, Lam J, et al. Quasi-synchronization of heterogeneous dynamic networks via distributed impulsive control: error estimation, optimization and design [J]. Automatica, 2015, 62:249-262

[48] Lu J Q, Ho D W C, Cao J D, et al. Single impulsive controller for globally exponential synchronization of dynamical networks [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2013, 14(1):581-593

[49] Wen G H, Duan Z S, Chen G R, et al. Consensus tracking of multi-agent systems with Lipschitz-type node dynamics and switching topologies [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2014, 61(2):499-511

[50] Wen G H, Yu W W, Hu G Q, et al. Pinning synchronization of directed networks with switching topologies: a multiple Lyapunov functions approach [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2015, 26(12):3239-3250

[51] Altafini C. Consensus problems on networks with antagonistic interactions [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(4):935-946

[52] Meng D Y, Du M J, Jia Y M. Interval bipartite consensus of networked agents associated with signed digraphs [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(12):3755-3770

[53] Zhai S D, Li Q D. Pinning bipartite synchronization for coupled nonlinear systems with antagonistic interactions and switching topologies [J]. Systems & Control Letters, 2016, 94:127-132

[54] Liu F, Song Q, Wen G H, et al. Bipartite synchronization of Lur'e network under signed digraph [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2018, 28(18):6087-6105

[55] Liu F, Song Q, Wen G H, et al. Bipartite synchronization in coupled delayed neural networks under pinning control [J]. Neural Networks, 2018, 108:146-154

[56] Xu J Q, Zhang J X, Tang W S. Parameters and structure identification of complex delayed networks via pinning control [J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2013, 35(5):619-624

[57] Wen G H, Hu G Q, Hu J Q, et al. Frequency control of source-grid-load systems: a compound control strategy

[J].IEEE Transactions on Industrial Informatics,2016,12(1):69-78

[58] Gu D B,Wang Z Y.Leader-follower flocking:algorithms and experiments [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology,2009,17(5):1211-1219

[59] Su H S,Wang X F,Lin Z L.Flocking of multi-agents with a virtual leader [J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2009,54(2):293-307

[60] Di Bernardo M, Falcone P, Salvi A, et al. Design, analysis,and experimental validation of a distributed protocol for platooning in the presence of time-varying heterogeneous delays [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology,2016,24(2):413-427

An overview on pinning control of complex networks

CAO Jinde[1] SONG Qiang[2] LIU Fang[3,4] CHENG Zunshui[5]

1 School of Mathematics,Southeast University,Nanjing 210096

2 School of Electrical Engineering,Nantong University,Nantong 226019

3 School of Information Engineering,Huanghuai University,Zhumadian 463000

4 Henan International Joint Laboratory of Behavior Optimization Control for Smart Robots,Zhumadian 463000

5 School of Mathematics and Physics,Qingdao University of Science and Technology,Qingdao 266061

Abstract This paper presents an overview on the studies of pinning control for complex networks over the past decade.Firstly,we summarize the pinning control algorithms for synchronizing complex networks.Then,based on network topology and node dynamics,some necessary or sufficient conditions for the pinning control of complex networks are discussed.For the pinning-controlled complex networks,we address the strategies for selecting the pinned nodes in detail,and comprehensively analyze the effects of the pinned-node number,the coupling strength,the pinning feedback gains and the node dynamics on the pinning control of complex networks.Moreover,we discuss the progress in the pinning control of signed networks where exist both cooperative and competitive relationships and provide some brief introduction for the application of the pinning control of complex networks.Finally,some suggestions are given to address the future research trends for the pinning control of complex networks.

Key words complex network;pinning control;pinned node;pinning feedback gain;coupling strength