



# 具有遗忘时滞的静态神经网络的 $H_\infty$ 状态估计

## 摘要

本文研究了具有遗忘时滞的静态神经网络的  $H_\infty$  状态估计问题.首先降低了时变时滞可微的条件,然后通过构造合适的 Lyapunov-Krasovskii 泛函,设计保  $H_\infty$  性能的状态估计器,使得误差系统实现全局渐近稳定.最后,借助 Matlab 中线性矩阵不等式工具箱进行数值仿真,验证了结论的有效性.

## 关键词

静态神经网络;  $H_\infty$  状态估计; 遗忘时滞; 线性矩阵不等式

中图分类号 O19

文献标志码 A

## 0 引言

静态神经网络采用神经元的状态作为基本变量来刻画神经网络的动力学演化规则,在稳定性分析、同步、耗散性、状态估计等方面都已经获得了许多结果<sup>[1-4]</sup>.

在实际生活中,由于传输媒介和机械器件本身的限制,神经网络的信息在传播过程中会产生时滞,而时滞已成为影响静态神经网络性能、稳定性的主要原因之一.因此对静态时滞神经网络的稳定性、状态估计问题的研究具有十分重要的理论意义和应用价值.近年来,时滞神经网络也引起了人们的广泛关注,不同类型的时滞(常时滞<sup>[2]</sup>、分布时滞<sup>[5]</sup>、随机时滞<sup>[6]</sup>、时变时滞<sup>[7]</sup>、遗忘时滞<sup>[8]</sup>等)在研究静态神经网络的状态估计、稳定性等方面都得到了相应的结果.

在一个规模较大的静态神经网络中,通常难以完全获知各神经元的状态信息.在实际应用中,常采用估计状态来代替真实状态以达到预定目标.对于静态神经网络状态估计的研究,文献[9]针对时变时滞静态神经网络利用 S-procedure 技术解决了保  $H_\infty$  和  $H_2$  性能的状态估计问题;文献[10]借助下界引理分别给出了时滞依赖和不依赖于时滞的  $H_\infty$  状态估计准则.结合当前研究结果,我们发现对于具有遗忘时滞的静态神经网络  $H_\infty$  状态估计的问题还有待进一步研究.

因此,本文研究了具有遗忘时滞的静态神经网络的  $H_\infty$  状态估计问题.特别地,降低了时变时滞可微的条件,通过构造合适的 Lyapunov-Krasovskii 泛函,利用线性矩阵不等式处理技术,设计了保  $H_\infty$  性能的状态估计器.通过数值分析,验证了结果的有效性.

## 1 问题描述

考虑如下具有遗忘时滞的静态神经网络:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{A}\mathbf{x}(t - \sigma) + \mathbf{f}(\mathbf{W}\mathbf{x}(t - \tau(t)) + \mathbf{J}) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{w}(t), \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{D}\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{x}(s) = \boldsymbol{\varphi}(s), \quad s \in [-\eta, 0], \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbf{R}^n$  是由  $n$  个神经元的状态信息组成的向量;  $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^m$  是测量得到的输出信号;  $\mathbf{z}(t) \in \mathbf{R}^p$  是状态向量  $\mathbf{x}(t)$  的线性组合,也是本文需要估计的状态信息;  $\mathbf{w}(t) \in L_2[0, \infty)$  是噪声输入信号.  $\mathbf{A}, \mathbf{W}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}$  和  $\mathbf{D}$  是具有适当维数的

收稿日期 2019-06-27

资助项目 国家自然科学基金(61673247);山东省自然科学基金杰出青年基金(JQ201719)

作者简介

吴淑晨,女,硕士生,研究方向为不连续控制系统理论. wushuchen1997@163.com

李晓迪(通信作者),男,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为不连续控制系统理论. lxd@sdnu.edu.cn

1 山东师范大学 数学与统计学院, 济南, 250014

2 山东师范大学 控制与工程计算研究中心, 济南, 250014

已知实矩阵.具体地,矩阵  $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\} > 0$ ,  $W = [w_{ij}]_{n \times n}$  是神经元之间的连接权矩阵,  $f(x(t)) = [f_1(x_1(t)), f_2(x_2(t)), \dots, f_n(x_n(t))]^T$  是神经元的激励函数,  $J = [J_1, J_2, \dots, J_n]^T$  是作用于该神经网络的外部输入向量, 函数  $\tau(t)$  是有界的时变时滞,  $\varphi(s)$  是定义在已知区间  $[-\eta, 0]$  上的初始条件.

对静态神经网络(1), 为了实现对  $z(t)$  的良好估计, 设计如下状态估计器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = -A\hat{x}(t - \sigma) + f(W\hat{x}(t - \tau(t)) + J) + \\ \quad K(y(t) - C\hat{x}(t)), \\ \dot{\hat{z}}(t) = D\hat{x}(t), \\ \hat{x}(s) = 0, \quad s \in [-\eta, 0], \end{cases} \quad (2)$$

$\hat{x}(t) \in \mathbf{R}^n, \hat{z}(t) \in \mathbf{R}^p, K$  是需要确定的增益矩阵.

定义误差信号分别为  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t), \bar{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t)$ , 那么由系统(1)和(2)可以确定误差信号满足如下微分方程:

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = -Ae(t - \sigma) - KCe(t) + \psi(We(t - \tau(t)), \\ \quad \hat{x}(t - \tau(t))) + (B_1 - KB_2)w(t), \\ \dot{\bar{z}}(t) = De(t), \\ e(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\eta, 0], \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $\psi(We(t - \tau(t)), x(t - \tau(t))) = f(Wx(t - \tau(t)) + J) - f(W\hat{x}(t - \tau(t)) + J)$ .

首先, 本文给出具有遗忘时滞的静态神经网络的保  $H_\infty$  性能的状态估计问题的定义.

**定义 1** 对于给定的  $H_\infty$  扰动抑制度  $\gamma > 0$ , 设

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & R - H & H & 0 & P & \Omega_{16} & \Omega_{17} & \Omega_{18} & D^T \\ * & \Omega_{22} & R - H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -S & 0 & 0 & 0 & -\tau A^T P & 0 \\ * & * & * & * & -\alpha I & -PA & 0 & \tau P & 0 \\ * & * & * & * & * & -Q & \Omega_{67} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & \Omega_{78} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -2P + R & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} R & H \\ * & R \end{bmatrix} > 0,$$

其中,

$$\Omega_{11} = -PA - A^T P - GC - C^T G^T + \sigma^2 Q - R + S,$$

$$\Omega_{16} = A^T P A + C^T G^T A, \quad \Omega_{17} = P B_1 - G B_2,$$

$$\Omega_{18} = -\tau C^T G^T, \quad \Omega_{22} = -2R + H + H^T + \alpha W^T L^T L W,$$

$$\Omega_{67} = -A^T P B_1 + A^T G B_2, \quad \Omega_{78} = \tau B_1^T P - \tau B_2^T G^T.$$

并且, 状态估计器的增益矩阵  $K$  被设计为:  $K = P^{-1}G$ .

计合适的状态估计器(2)使得满足下面两个条件:

1) 当  $w(t) \equiv 0$ , 误差信号系统(3)的平衡点是全局渐近稳定的;

2) 在零初始条件下, 对于任意非零的  $w(t) \in L_2[0, \infty)$  有

$$\|\bar{z}(t)\|_2 \leq \gamma \|w(t)\|_2, \quad (4)$$

其中,  $\|\bar{z}(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \bar{z}^T(t)\bar{z}(t)dt}$ .

为了研究方便, 本文作出如下假设:

(H<sub>1</sub>) 神经元的激励函数连续且满足:

$$|f(u) - f(v)| \leq L|u - v|, \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^n, u \neq v,$$

其中,  $L \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是已知的实对角矩阵;

(H<sub>2</sub>) 遗忘时滞  $\sigma \geq 0$  是常数;

(H<sub>3</sub>) 存在一个常数  $\tau$ , 使得时变时滞  $\tau(t)$  满足:  $0 \leq \tau(t) \leq \tau$ , 且  $\eta = \max\{\sigma, \tau\}$ .

**引理 1** [11] 给定任意的对称正定实矩阵  $M \in \mathbf{R}^{n \times n}$  和向量值函数  $\omega(\cdot): [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ , 如果下式中涉及到的积分有意义, 则

$$\left[ \int_a^b \omega(t) dt \right]^T M \left[ \int_a^b \omega(t) dt \right] \leq \gamma^2 \int_a^b \omega^T(t) M \omega(t) dt.$$

## 2 主要结果

**定理 1** 对于给定的常数  $\tau > 0$ , 令  $H_\infty$  扰动抑制度  $\gamma > 0$ , 则  $H_\infty$  状态估计问题是可解的, 如果存在一个正实数  $\alpha$  和一些  $n \times n$  实矩阵  $P > 0, Q > 0, R > 0, S > 0$  以及  $G, H$ , 使得如下线性矩阵不等式成立:

**证明** 根据保  $H_\infty$  状态估计问题的定义, 需要将定理 1 的证明分为两部分. 首先, 证明不等式(4)成立; 然后, 证明当  $w(t) \equiv 0$  时, 误差系统(3)的平衡点是全局渐近稳定的.

步骤 1. 构造如下 Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$V(t) = \sum_{i=1}^4 V_i(t), \quad (6)$$

其中,

$$\begin{aligned}
V_1(t) &= \left[ \mathbf{e}(t) - \mathbf{A} \int_{t-\sigma}^t \mathbf{e}(s) ds \right]^T \mathbf{P} \left[ \mathbf{e}(t) - \mathbf{A} \int_{t-\sigma}^t \mathbf{e}(s) ds \right], \\
V_2(t) &= \sigma \int_{-\sigma}^0 \int_{t-\sigma}^t \mathbf{e}^T(s) \mathbf{Q} \mathbf{e}(s) ds d\theta, \\
V_3(t) &= \tau \int_{t-\tau}^t (s-t+\tau) \dot{\mathbf{e}}^T(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{e}}(s) ds, \\
V_4(t) &= \int_{t-\sigma}^t \mathbf{e}^T(s) \mathbf{S} \mathbf{e}(s) ds.
\end{aligned}$$

在零初始条件下,显然  $V(t)|_{t=0} = 0$  且对  $\forall t > 0, V(t) \geq 0$ . 为了简化书写,定义:

$$J_\infty = \int_0^t \bar{\mathbf{z}}^T(s) \bar{\mathbf{z}}(s) - \gamma^2 \mathbf{w}^T(s) \mathbf{w}(s) ds, \quad t > 0.$$

进而,可得:

$$\begin{aligned}
J_\infty &\leq \int_0^t \bar{\mathbf{z}}^T(s) \bar{\mathbf{z}}(s) - \gamma^2 \mathbf{w}^T(s) \mathbf{w}(s) ds + V(t) + V(t)|_{t=0} = \\
&\int_0^t \bar{\mathbf{z}}^T(s) \bar{\mathbf{z}}(s) - \gamma^2 \mathbf{w}^T(s) \mathbf{w}(s) + \dot{V}(s) ds.
\end{aligned}$$

通过直接计算  $V_1(t)$  沿误差系统(3)的轨迹对时间  $t$  的导数,可得:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(t) &= \mathbf{e}^T(t) [-\mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{K}\mathbf{C}) - (\mathbf{A} + \mathbf{K}\mathbf{C})^T \mathbf{P}] \mathbf{e}(t) + \\
&2\mathbf{e}^T(t) \mathbf{P} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{W}\mathbf{e}(t-\tau(t)), \hat{\mathbf{x}}(t-\tau(t))) + \\
&2\mathbf{e}^T(t) (\mathbf{B}_1 - \mathbf{K}\mathbf{B}_2) \mathbf{w}(t) + \\
&2 \left[ \int_{t-\sigma}^t \mathbf{e}(s) ds \right]^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{K}\mathbf{C}) \mathbf{e}(t) - \\
&2 \left[ \int_{t-\sigma}^t \mathbf{e}(s) ds \right]^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{W}\mathbf{e}(t-\tau(t)), \hat{\mathbf{x}}(t-\tau(t))) - \\
&2 \left[ \int_{t-\sigma}^t \mathbf{e}(s) ds \right]^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} (\mathbf{B}_1 - \mathbf{K}\mathbf{B}_2) \mathbf{w}(t). \quad (7)
\end{aligned}$$

结合 Jensen's 不等式,对  $V_2(t)$  求导可得:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(t) &= \sigma^2 \mathbf{e}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{e}(t) - \sigma \int_{t-\sigma}^t \mathbf{e}^T(s) \mathbf{Q} \mathbf{e}(s) ds \leq \\
&\sigma^2 \mathbf{e}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{e}(t) - \left[ \int_{t-\sigma}^t \mathbf{e}(s) ds \right]^T \mathbf{Q} \left[ \int_{t-\sigma}^t \mathbf{e}(s) ds \right]. \quad (8)
\end{aligned}$$

计算  $V_3(t)$  和  $V_4(t)$  沿误差系统(3)的轨迹对时间的  $t$  导数,可得:

$$\dot{V}_3(t) = \tau^2 \dot{\mathbf{e}}^T(t) \mathbf{R} \dot{\mathbf{e}}(t) - \tau \int_{t-\tau}^t \dot{\mathbf{e}}^T(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{e}}(s) ds, \quad (9)$$

$$\dot{V}_4(t) = \mathbf{e}^T(t) \mathbf{S} \mathbf{e}(t) - \mathbf{e}^T(t-\sigma) \mathbf{S} \mathbf{e}(t-\sigma). \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\Omega}}_{11} + \mathbf{D}^T \mathbf{D} & \mathbf{R} - \mathbf{H} & \mathbf{H} & 0 & \mathbf{P} & \bar{\boldsymbol{\Omega}}_{16} & \bar{\boldsymbol{\Omega}}_{17} \\ * & \boldsymbol{\Omega}_{22} & \mathbf{R} - \mathbf{H} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\mathbf{R} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\mathbf{S} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\boldsymbol{\alpha} \mathbf{I} & -\mathbf{P}\mathbf{A} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\mathbf{Q} & \bar{\boldsymbol{\Omega}}_{67} \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

吴淑晨,等.具有遗忘时滞的静态神经网络的  $H_\infty$  状态估计.

WU Shuchen, et al.  $H_\infty$  state estimation of static neural networks with leakage delay.

由下界引理<sup>[12]</sup>,可得:

$$\begin{aligned}
& -\tau \int_{t-\tau}^t \dot{\mathbf{e}}^T(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{e}}(s) ds = -\tau \int_{t-\tau(t)}^t \dot{\mathbf{e}}^T(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{e}}(s) ds - \\
& \tau \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} \dot{\mathbf{e}}^T(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{e}}(s) ds \leq \\
& -\frac{\tau}{\tau(t)} \left[ \int_{t-\tau(t)}^t \dot{\mathbf{e}}(s) ds \right]^T \mathbf{R} \left[ \int_{t-\tau(t)}^t \dot{\mathbf{e}}(s) ds \right] - \\
& \frac{\tau}{\tau - \tau(t)} \left[ \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} \dot{\mathbf{e}}(s) ds \right]^T \mathbf{R} \left[ \int_{t-\tau}^{t-\tau(t)} \dot{\mathbf{e}}(s) ds \right] \leq \\
& -\frac{\tau}{\tau(t)} [\mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t-\tau(t))]^T \mathbf{R} [\mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t-\tau(t))] - \\
& \frac{\tau}{\tau - \tau(t)} [\mathbf{e}(t-\tau(t)) - \mathbf{e}(t-\tau)]^T \cdot \\
& \mathbf{R} [\mathbf{e}(t-\tau(t)) - \mathbf{e}(t-\tau)] \leq \\
& - \begin{bmatrix} \mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t-\tau(t)) \\ \mathbf{e}(t-\tau(t)) - \mathbf{e}(t-\tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{H} \\ * & \mathbf{R} \end{bmatrix} \cdot \\
& \begin{bmatrix} \mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t-\tau(t)) \\ \mathbf{e}(t-\tau(t)) - \mathbf{e}(t-\tau) \end{bmatrix} = \\
& \boldsymbol{\zeta}^T(t) \begin{bmatrix} -\mathbf{R} & \mathbf{R} - \mathbf{H} & \mathbf{H} \\ * & -2\mathbf{R} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T & \mathbf{R} - \mathbf{H} \\ * & * & -\mathbf{R} \end{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}(t), \quad (11)
\end{aligned}$$

其中,  $\boldsymbol{\zeta}(t) = [\mathbf{e}^T(t), \mathbf{e}^T(t-\tau(t)), \mathbf{e}^T(t-\tau)]^T$ .

基于假设  $(H_1)$ ,可得:

$$\begin{aligned}
& \boldsymbol{\psi}^T(\mathbf{W}\mathbf{e}(\cdot), \hat{\mathbf{x}}(\cdot)) \boldsymbol{\psi}(\mathbf{W}\mathbf{e}(\cdot), \hat{\mathbf{x}}(\cdot)) = \\
& |\mathbf{f}(\mathbf{W}\mathbf{x}(\cdot) + \mathbf{J}) - \mathbf{f}(\mathbf{W}\hat{\mathbf{x}}(\cdot) + \mathbf{J})|^2 \leq \\
& |\mathbf{L}\mathbf{W}\mathbf{e}(\cdot)|^2 = \mathbf{e}^T(\cdot) \mathbf{W}^T \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{W} \mathbf{e}(\cdot).
\end{aligned}$$

那么对于正实数  $\alpha > 0$ ,下面不等式成立:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \alpha (\boldsymbol{\psi}^T(\mathbf{W}\mathbf{e}(t-\tau(t)), \\
& \hat{\mathbf{x}}(t-\tau(t))) \boldsymbol{\psi}(\mathbf{W}\mathbf{e}(t-\tau(t)), \hat{\mathbf{x}}(t-\tau(t))) - \\
& \mathbf{e}^T(t-\tau(t)) \mathbf{W}^T \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{W} \mathbf{e}(t-\tau(t))). \quad (12)
\end{aligned}$$

根据上述等式和不等式(7)–(12),做一些简单的处理,可得:

$$\begin{aligned}
& \bar{\mathbf{z}}^T(t) \bar{\mathbf{z}}(t) - \gamma^2 \mathbf{w}^T(t) \mathbf{w}(t) + \dot{V}(t) \leq \\
& \boldsymbol{\xi}_1^T(t) [\boldsymbol{\Omega}_1 + \tau^2 \boldsymbol{\Omega}_2^T \mathbf{R} \boldsymbol{\Omega}_2] \boldsymbol{\xi}_1(t), \quad (13)
\end{aligned}$$

其中,

$$\Omega_2 = [-KC, 0, 0, -A, I, 0, (B_1 - KB_2)],$$

$$\bar{\Omega}_{11} = -PA - A^T P - PKC - C^T K^T P + \sigma^2 Q - R + S,$$

$$\bar{\Omega}_{16} = A^T P A + C^T K^T P A, \quad \bar{\Omega}_{17} = P B_1 - P K B_2,$$

$$\bar{\Omega}_{67} = -A^T P B_1 + A^T P K B_2,$$

$$\xi_1(t) = [e^T(t), e^T(t - \tau(t)), e^T(t - \tau), e^T(t - \sigma),$$

$$\psi^T(We(t - \tau(t)), \hat{x}(t - \tau(t))),$$

$$\left[ \int_{t-\sigma}^t e(s) ds \right]^T, w^T(t) ]^T.$$

令  $\bar{\Omega}_1 = \Omega_1 + \tau^2 \Omega_2^T R \Omega_2$ , 利用 Shcur 补引理, 可得:

$$\bar{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{11} & R-H & H & 0 & P & \bar{\Omega}_{16} & \bar{\Omega}_{17} & \bar{\Omega}_{18} & D^T \\ * & \Omega_{22} & R-H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -S & 0 & 0 & 0 & -\tau A^T R & 0 \\ * & * & * & * & -\alpha I & -PA & 0 & \tau R & 0 \\ * & * & * & * & * & -Q & \bar{\Omega}_{67} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & \bar{\Omega}_{78} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -R & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix},$$

其中,  $\bar{\Omega}_{18} = -\tau C^T K^T R, \bar{\Omega}_{78} = \tau B_1^T R - \tau B_2^T K^T R.$

$K^T P$  和  $K^T R$  同时存在于矩阵(15)中. 因此, 对矩阵  $\bar{\Omega}_1$  分别左乘矩阵  $\text{diag}\{I, I, I, I, I, I, I, PR^{-1}, I\}$  右乘矩阵  $\text{diag}\{I, I, I, I, I, I, I, R^{-1}P, I\}$ ,  $\bar{\Omega}_1$  可转化为

$$\begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{11} & R-H & H & 0 & P & \bar{\Omega}_{16} & \bar{\Omega}_{17} & \hat{\Omega}_{18} & D^T \\ * & \Omega_{22} & R-H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -S & 0 & 0 & 0 & -\tau A^T P & 0 \\ * & * & * & * & -\alpha I & -PA & 0 & \tau P & 0 \\ * & * & * & * & * & -Q & \bar{\Omega}_{67} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & \hat{\Omega}_{78} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -PR^{-1}P & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix}, \quad (14)$$

其中,  $\hat{\Omega}_{18} = -\tau C^T K^T P, \hat{\Omega}_{78} = \tau B_1^T P - \tau B_2^T K^T P.$

由于矩阵  $P, R$  的正定性, 显然下式成立:

$$0 \leq (P - R)R^{-1}(P - R) = PR^{-1}P - 2P + R.$$

因此, 用  $-2P + R$  替换  $-PR^{-1}P$ . 令  $K = P^{-1}G$ , 即可得到: 在 LMI 条件(5) 成立的前提下, 矩阵(14) 是负定的, 即  $\bar{\Omega}_1 = \Omega_1 + \tau^2 \Omega_2^T R \Omega_2 < 0.$

那么存在一个充分小的数  $\varepsilon > 0$ , 使得下式成立:

$$[\Omega_1 + \tau^2 \Omega_2^T R \Omega_2] + \text{diag}\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \varepsilon I\} \leq 0.$$

进而可得:

$$\bar{z}^T(t) \bar{z}(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t) + \dot{V}(t) \leq$$

$$\xi_1^T(t) [\Omega_1 + \tau^2 \Omega_2^T R \Omega_2] \xi_1(t) \leq -\varepsilon w^T(t) w(t) < 0.$$

因此, 对  $\forall t > 0$  有  $J_\infty < 0$ , 即式(4) 成立.

步骤 2. 当  $w(t) \equiv 0$  时, 误差系统(3) 转化为

$$\dot{e}(t) = -Ae(t - \sigma) - KCe(t) + \psi(We(t - \tau(t)), \hat{x}(t - \tau(t))). \quad (15)$$

本文仍然考虑 Lyapunov-Krasovskii 泛函(6), 并计算沿误差系统(15) 的轨迹对时间  $t$  的导数, 类似上述推导过程, 可得:

$$\dot{V}(t) \leq \hat{\xi}_1^T(t) [\hat{\Omega}_1 + \tau^2 \hat{\Omega}_2^T R \hat{\Omega}_2] \hat{\xi}_1(t),$$

其中,

$$\hat{\Omega}_2 = [-KC, 0, 0, -A, I, 0],$$

$$\hat{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{11} & R-H & H & 0 & P & \bar{\Omega}_{16} \\ * & \Omega_{22} & R-H & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -R & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -S & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\alpha I & -PA \\ * & * & * & * & * & -Q \end{bmatrix},$$

$$\hat{\xi}_1(t) = \left[ e^T(t), e^T(t-\tau(t)), e^T(t-\tau), e^T(t-\sigma), \psi^T(We(t-\tau(t)), \hat{x}(t-\tau(t))), \left[ \int_{t-\sigma}^t e(s) ds \right]^T \right]^T.$$

类似的,借助矩阵替换和 Schur 补引理,可得:

$$\hat{\Omega}_1 + \tau^2 \hat{\Omega}_2^T R \hat{\Omega}_2 = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & R-H & H & 0 & P & \Omega_{16} & \Omega_{18} \\ * & \Omega_{22} & R-H & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -S & 0 & 0 & -\tau A^T P \\ * & * & * & * & -\alpha I & -PA & \tau P \\ * & * & * & * & * & -Q & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -2P+R \end{bmatrix}.$$

由 LMI 条件(5)  $\Omega < 0$  可得:  $\hat{\Omega}_1 + \tau^2 \hat{\Omega}_2^T R \hat{\Omega}_2 < 0$ . 因此,当  $w(t) \equiv 0$  时,误差系统(15) 是全局渐近稳定的.证毕.

### 3 数值仿真

本文通过一组仿真实例验证上述结论的有效性.

考虑具有如下参数的二维静态神经网络(1):

$$A = \begin{bmatrix} 0.56 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} -0.5 & 1.1 \\ 0.1 & 1.4 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.2 \\ -0.5 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

遗忘时滞  $\sigma = 0.1$ , 激励函数  $f_1(s) = f_2(s) = \tanh(s)$ , 时变时滞  $\tau(t) = 0.1 |\sin 2t| + 0.2$ , 噪声输入信号  $w_1(t) = \sin t, w_2(t) = \cos t$ . 显然,在本例中  $L = I, \tau = 0.3$  和  $\eta = 0.3$ . 如果给定干扰抑制度  $\gamma = 1.03$ , 基于上述定理,借助 Matlab 线性矩阵不等式工具箱,得到一组可行解为:  $\alpha = 0.3943$ ,

$$P = \begin{bmatrix} 1.8600 & -0.2368 \\ -0.2368 & 1.6942 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 9.2482 & -0.9617 \\ -0.9617 & 24.8388 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.8170 & -0.2891 \\ -0.2891 & 1.7358 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 4.0255 & -0.4041 \\ -0.4041 & 1.6602 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} -9.0036 & 16.9627 \\ 1.8602 & 7.3192 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.1219 & -0.0302 \\ -0.0155 & 0.0237 \end{bmatrix}.$$

因此,状态估计器的增益矩阵  $K$  可以被设计为

$$K = \begin{bmatrix} -4.7861 & 9.8449 \\ 0.4291 & 5.6959 \end{bmatrix}.$$

图 1 给出了随机选取 10 个初值时,误差系统的处理值  $|e_1| + |e_2|$  随时间的变化. 由图 1 可知,随着时间的变化  $|e_1| + |e_2| \rightarrow 0$ , 即  $|e_1| \rightarrow 0, |e_2| \rightarrow 0$ . 图 1 表明,对于上述具有遗忘时滞的静态神经网络,应用上述结论,能够良好地实现保  $H_\infty$  性能的状态估计.

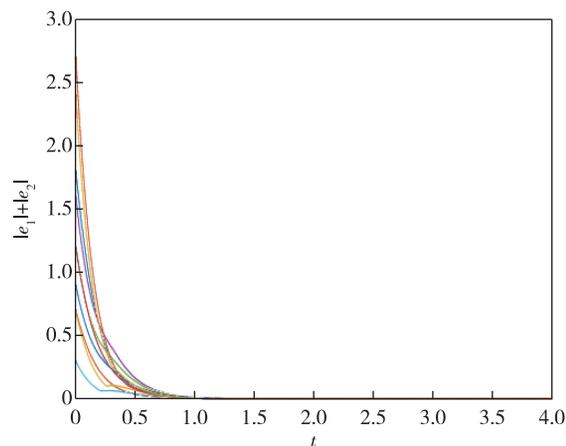


图 1 10 个随机初值的误差系统  
Fig. 1 The error system for 10 randomly initial values

特别地,当给定初值  $x_0 = (1.6, 0.2)^T$ , 仿真结果,如图 2 所示. 图 2 给出了二维的具有遗忘时滞的静态神经网络状态随时间的变化. 由图 2 可知: 当时间  $t < 1$  时,估计值和实际值存在一定的误差; 当  $t \geq 1$  时,估计值与实际值几乎吻合. 这表明,通过上述理论,设计增益矩阵为  $K$  的估计器具有良好的估计效果.

### 4 结束语

本文研究了具有遗忘时滞的静态神经网络  $H_\infty$  状态估计问题. 通过构造合适的 Lyapunov-Krasovskii

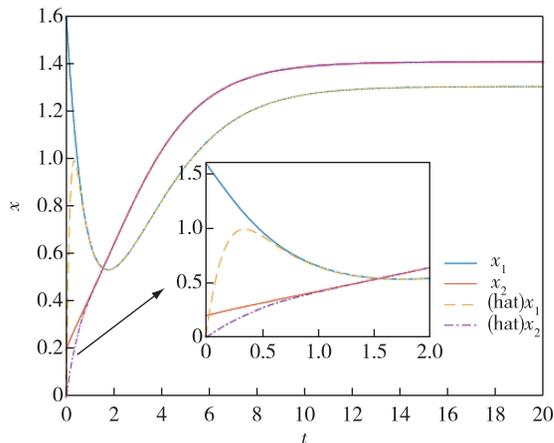


图2 实际状态与估计状态

Fig. 2 The true states and the estimated states

泛函,利用线性矩阵不等式处理技术,设计了保  $H_\infty$  性能的状态估计器.数值仿真表明,本文设计的估计器具有良好的估计效果.

### 参考文献

#### References

[ 1 ] Lee W I, Lee S Y, Park P. A combined reciprocal convexity approach for stability analysis of static neural networks with interval time-varying delays [ J ]. Neurocomputing, 2017, 221: 168-177

[ 2 ] Huang B N, Zhang H G, Gong D W, et al. Synchronization analysis for static neural networks with hybrid couplings and time delays [ J ]. Neurocomputing, 2015, 148: 288-293

[ 3 ] Zeng H B, Park J H, Zhang C F, et al. Stability and dissipativity analysis of static neural networks with interval time-varying delay [ J ]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352(3): 1284-1295

[ 4 ] Liu Y C, Wang T, Chen M S, et al. Dissipativity-based state estimation of delayed static neural networks [ J ]. Neurocomputing, 2017, 247: 137-143

[ 5 ] Huang Z K, Li X Z, Mohamad S, et al. Robust stability analysis of static neural network with S-type distributed delays [ J ]. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33(2): 760-769

[ 6 ] Hu M F, Cao J D, Hu A H. Mean square exponential stability for discrete-time stochastic switched static neural networks with randomly occurring nonlinearities and stochastic delay [ J ]. Neurocomputing, 2014, 129: 476-481

[ 7 ] Senthilraj S, Raja R, Zhu Q X, et al. New delay-interval-dependent stability criteria for static neural networks with time-varying delays [ J ]. Neurocomputing, 2016, 186: 1-7

[ 8 ] Manivannan R, Panda S, Chong K T, et al. An arcak-type state estimation design for time-delayed static neural networks with leakage term based on unified criteria [ J ]. Neural Networks, 2018, 106: 110-126

[ 9 ] Huang H, Feng G, Cao J D. Guaranteed performance state estimation of static neural networks with time-varying delay [ J ]. Neurocomputing, 2011, 74(4): 606-616

[ 10 ] Duan Q H, Su H Y, Wu Z G.  $H_\infty$  state estimation of static neural networks with time-varying delay [ J ]. Neurocomputing, 2012, 97: 16-21

[ 11 ] Gu K Q, Kharitonov V L, Chen J. Stability of time-delay systems [ M ]. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2003. DOI: 10.1007/978-1-4612-0039-0

[ 12 ] Park P, Ko J W, Jeong C. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays [ J ]. Automatica, 2011, 47(1): 235-238

## $H_\infty$ state estimation of static neural networks with leakage delay

WU Shuchen<sup>1</sup> LI Xiaodi<sup>1,2</sup>

1 School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Ji'nan 250014

2 Center for Control and Engineering Computation, Shandong Normal University, Ji'nan 250014

**Abstract** This paper focuses on the study of  $H_\infty$  state estimation of static neural networks having leakage delay. With the skills to construct Lyapunov-Krasovskii functionals, a state estimator is designed for the estimation of  $H_\infty$  performance, and the results are derived without applying differentiability on time-varying delays. Finally, a numerical example is provided to demonstrate the effectiveness and advantages of the obtained results.

**Key words** static neural networks;  $H_\infty$  state estimation; leakage delay; linear matrix inequality