



# 一种用户均衡分配不确定性的计算方法

## 摘要

为解决目前交通分配中存在的不确定性问题,基于 Wardrop 用户平衡原理,利用起讫点(OD, Origin Destination)估计方法和 Beckman 交通分配模型,建立了一种交通分配不确定性计算方法.该方法分别以不同置信水平下的 OD 估计结果的上下限为输入量,然后利用 Frank-Wolf 算法求解交通分配模型,得到不同置信水平下的路段流量区间,以此量化交通分配问题中的不确定性.以南京市区域路网为研究对象进行案例分析,并采用宽度流量比  $R$  和无效覆盖率(Kickoff Percentage, KP)对模型结果进行评价,结果表明该方法可以得到路段流量的置信区间,量化交通分配的不确定性.

## 关键词

不确定性;动态交通分配模型;OD 区间估计;Frank-Wolf 算法

中图分类号 O429

文献标志码 A

收稿日期 2019-06-29

资助项目 国家自然科学基金(61573106)

作者简介

程小洋,女,博士生,研究方向为交通信息工程与控制.2226347808@qq.com

郭建华(通信作者),男,博士,教授,博士生导师,研究方向为交通信息工程与控制.seugh@163.com

## 0 引言

交通分配问题是实现交通规划和交通控制的基础,因此许多学者都致力于研究交通分配问题.最早的理论研究是 1953 年由 Wardrop<sup>[1]</sup>提出的 UE(User Equilibrium)和 SO(System Optimum)理论.但是出行者的主观性和天气、环境等因素导致交通系统具有不确定性,而传统的四阶段法,工作量大,而且无法考虑交通分配中的不确定性<sup>[2]</sup>,因此,如何量化交通分配中的不确定性是当前研究的瓶颈问题.针对该问题,目前的研究方法主要集中在随机规划领域和模糊数学领域.

在随机规划领域,2005 年,Clark 等<sup>[3]</sup>指出量化交通不确定性的方法主要分为 5 种:第 1 类是联通可靠性方法,第 2 类是旅行时间可靠性方法,第 3 类是容量可靠性方法,第 4 类是行为可靠性方法,第 5 类是检查网络潜在可靠性方法.2006 年,Lo 等<sup>[4]</sup>认为旅行时间可靠性在旅行者的路径选择行为中起着重要作用.该研究联系由随机网络路径容量变化引起的旅行时间变化与旅行者的风险规避路线选择行为,提出了多类别混合均衡分配模型.在此基础上,Shao 等<sup>[5]</sup>提出了一种基于行程时间可靠性的用户均衡模型,该模型考虑了需求变动所带来的随机旅行时间,同时也考虑了出行者对旅行时间的感知误差.2011 年,Zhang 等<sup>[6]</sup>提出了随机环境下的期望残差最小化模型,该方法具有较强的鲁棒性.2018 年,Han 等<sup>[7]</sup>提出了一种随机交通分配模型来考虑随机交通需求,将出行需求分为具有固定交通需求的通勤者和具有离散随机需求的不定期旅行者,实验结果表明,不定期旅行者和通勤者对最短路径的感知误差对于随机模型的稳定分布具有重要影响.

另一种方法是模糊数学方法,包括基于模糊控制规则的方法和模糊分配模型研究.其中对模糊分配的研究较多,主要集中于模糊出行费用条件下的路径选择问题.2000 年,Chang 等<sup>[8]</sup>提出了基于路段用户最优的路径选择问题,他们假定行程时间是一个模糊数,并使用加权平均的方法将行程时间模糊化,在此基础上,定义了模糊用户均衡分配的概念和模型,并提出了相应的模糊分配算法.2001 年,Chen 等<sup>[9]</sup>试图在很多方面构建一个与 Wardrop<sup>[1]</sup>不同的交通分配模型.首先,考虑路径之间的交叉影响;其次,基于可能性概念建立模糊旅行成本函数,而不是精确计算交通量;然后,应用模糊测度和模糊积分

1 东南大学 智能运输系统研究中心,210018

技术计算交通分配期间的主观感知旅行成本.2003年,Liu等<sup>[10]</sup>使用模糊最短路径算法找到模糊最短路径组,并使用 C-logit 方法为每个路径分配流量.2009年,代存杰等<sup>[11]</sup>指出出行者不能完全精确地预测每天路径的出行时间,而且每个人的预测能力存在差异,同时出行者的出行行为会相互影响,因此不是所有的出行者都会选择最短路径出行,所以作者提出了基于模糊路段行程时间的交通分配方法.2011年,Ramazani等<sup>[12]</sup>认为驾驶员对行程时间的感知因特定路线而异,开发了模糊增量交通分配算法,利用路线感知行程时间(Perceived Travel Time, PTT)来达到模糊平衡.实验结果表明,模糊增量交通分配算法的精度高于传统的交通分配算法.

上述随机规划和模糊数学两种方法都考虑了不确定性,但是在构造随机规划模型的过程中或确定模糊隶属度函数时,都存在模型本身的不确定性因素,且结果仍然是单一值,而对交通分配区间的研究甚少<sup>[13-15]</sup>.基于此,本文将利用起讫点(Origin Destination, OD)矩阵估计的结果来实现交通分配不确定性的计算.

## 1 交通分配不确定性计算方法

### 1.1 用户均衡分配不确定性的方法流程

用户均衡分配不确定性的计算方法流程如图1所示.首先建立状态空间模型并利用卡尔曼滤波预测历史 OD 矩阵,然后利用广义自回归条件异方差(Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, GARCH)模型进行残差预测,得出 OD 出行需求的置信区间上下限.然后,将得出的上下限作为用户均衡模型的输入量,并采用 Frank-Wolf 分配算法进行求解,进而得到路段流量的区间估计结果<sup>[16]</sup>.最后采用宽度流量比( $R$ )和无效覆盖率(Kickoff Percentage, KP)两个性能指标对获得的路段流量的置信区间进行评价.

### 1.2 路阻函数

道路交通阻抗函数(简称路阻函数)是指路段行驶时间(交叉口延误)与路段(交叉口)交通负荷之间的函数关系,是交通分配的关键.每个国家采用的路阻函数模型并不完全相同,我国主要采用美国联邦公路局(Federal Highway Administration, FHWA)的路段行程时间函数模型,但是该模型主要是利用城际公路网得出的,未考虑城市交叉口的影响,因此出现了很多改进 BPR(Bureau of Public Roads)函

程小洋,等.一种用户均衡分配不确定性的计算方法.

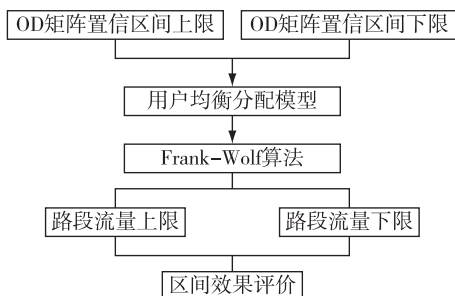


图1 用户均衡分配不确定性计算流程

Fig. 1 The flowchart of computing uncertainty in traffic assignment

数<sup>[17-19]</sup>.为了降低计算复杂度,本文采用 FHWA 的道路阻抗函数如下:

$$t_l(y_l) = t_l^0 \left[ 1 + \alpha \left( \frac{y_l}{C_l} \right)^\beta \right], \quad (1)$$

式中:  $t_l$  表示路段  $l$  的行程时间;  $t_l^0$  为零流阻抗,表示路段  $l$  上流量为零时车辆行驶所需要的时间;  $C_l$  表示路段  $l$  的通行能力;  $\alpha, \beta$  为阻滞系数,通常取  $\alpha = 0.15, \beta = 4$ .

### 1.3 用户均衡分配模型

基于 Wardrop 的用户均衡分配理论,应用 Beckmann 提出的用户均衡分配模型,选择路阻函数为传统的 BPR 函数,建立了一种准动态用户均衡分配模型,对每个时段估计的 OD 出行需求进行用户均衡分配如下:

$$\min z(x) = \sum_l \int_0^{y_l} t_{li}(y) dy, \quad (2)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_k f_{ki}^r = d_{ri}, \quad \forall r, \quad (3)$$

$$f_{ki}^r \geq 0, \quad \forall k, r, \quad (4)$$

$$y_{li} = \sum_r \sum_k f_{ki}^r \delta_{l,k}^r, \quad \forall l, \quad (5)$$

$$t_{li}(y_{li}) = t_l^0 \left[ 1 + 0.15 \left( \frac{y_{li}}{C_l} \right)^4 \right], \quad (6)$$

式中:  $y_{li}$  表示第  $i$  个时段路段  $l$  上的路段流量;  $t_{li}$  表示第  $i$  个时段路段  $l$  的行程时间;  $f_{ki}^r$  表示第  $i$  个时段 OD 对  $r$  之间第  $k$  条路径的流量;  $d_{ri}$  表示第  $i$  个时段 OD 对  $r$  之间的流量;  $\delta_{l,k}^r$  表示连接关系变量,在 OD 对  $r$  之间,当路径  $k$  包含路段  $l$  时,  $\delta_{l,k}^r = 1$ , 否则,  $\delta_{l,k}^r = 0$ ;  $t_l^0$  为零流阻抗,表示路段  $l$  上流量为零时车辆行驶所需要的时间;  $C_l$  为路段  $l$  的通行能力.

### 1.4 Frank-Wolf 算法

Frank-Wolf 算法是 1985 年首先由 Leblanc 等<sup>[20]</sup>

对传统梯度下降算法进行改造后提出的一种用于求解 Beckman 模型的一维搜索算法,是目前最常用的用户均衡分配问题求解算法.计算目标函数  $Z(y)$  即式(7)对路段流量的梯度  $\frac{\partial Z(y^n)}{\partial y_i} = t_i^n$ ,交通分配模型可以被转化为如下形式:

$$\min Z^n(y) = [\nabla Z(y^n)]^T \cdot s = \sum_l [\partial Z(y^n) / \partial y_{li}] \cdot s_{li} = \sum_l t_{li}^n s_{li}, \quad (7)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_k f_{ki}^r = d_{ri}, \quad \forall r, \quad (8)$$

$$f_{ki}^r \geq 0, \quad \forall k, r, \quad (9)$$

$$y_l = \sum_r \sum_k f_{ki}^r \delta_{l,k}^r, \quad \forall l, \quad (10)$$

$$t_{li}(y_{li}) = t_{li}^0 [1 + \alpha (\frac{y_{li}}{C_{li}})^\beta], \quad (11)$$

式中:  $s_{li}$  表示第  $i$  个时段路段  $l$  的辅助路段流量.

初始可行下降方向是通过全由全无方法将路网流量分配在每个 OD 对之间的最短路径上来获取的,得到的路段流量称为辅助路段流量  $s_{li}$ . 根据 Frank-Wolf 算法原理可以得到可行下降方向为  $(s^n - y^n)$ .

通过求解以下最小化问题,可得到最优移动步长  $\lambda$ :

$$\min_{0 \leq \lambda \leq 1} Z[y^n + \lambda(s^n - y^n)] = \sum_l \int_0^{y_{li}^n + \lambda(s_{li}^n - y_{li}^n)} t_{li}(\omega) d\omega. \quad (12)$$

在式(12)中,最优移动步长  $\lambda$  的取值范围是  $[0, 1]$ . 因此,该函数的极值可在其驻点或者边界点 0 和 1 处获得,因此可令  $\partial Z / \partial \lambda = 0$ , 即可得到式(13), 进而可求得最优移动步长  $\lambda$ .

$$\frac{\partial Z[y^n + \lambda(s^n - y^n)]}{\partial \lambda} = \sum_l (s_{li}^n - y_{li}^n) t_{li}[y_{li}^n + \lambda(s_{li}^n - y_{li}^n)] = 0. \quad (13)$$

Frank-Wolf 算法求解用户均衡分配模型流程如图 2 所示.

Step0: 求解初始值. 假设初始路段流量为 0, 计算每个路段的初始行程时间  $t_{li}^0 = t_{li}(0)$ , 寻找每个 OD 对之间行程时间最短的路径, 按照全有全无方法加载路网流量. 由此得到的路段流量可以表示为  $\{y_{li}^1\}$ , 令  $n = 1$ .

Step1: 更新路段行程时间. 由 Step0 中得到的路段流量  $\{y_{li}^1\}$  计算新的路段行程时间,  $t_{li}^n = t_{li}(y_{li}^n)$ .

Step2: 确定下降方向. 根据上一步中求得的路段

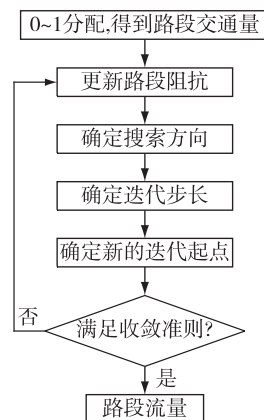


图 2 求解用户均衡分配的 Frank-Wolf 算法流程

Fig. 2 The Frank-Wolf algorithm flowchart to solve user equilibrium traffic assignment

行程时间  $\{t_{li}^n\}$ , 重新计算路段行程时间, 并寻找每个 OD 对之间的最短路径, 再次进行全有全无分配, 得到新的路段流量, 记为  $\{s_{li}^n\}$ .

Step3: 计算最优迭代步长. 求解式(13) 计算得到最优迭代步长  $\lambda$ .

Step4: 确定新的迭代起点. 令  $y_{li}^{n+1} = y_{li}^n + \lambda(s_{li}^n - y_{li}^n)$ .

Step5: 判断是否收敛. 若满足收敛条件, 则停止迭代, 得到最优解  $\{y_{li}^{n+1}\}$ , 若不满足, 则令  $n = n + 1$ , 进入 Step1 再次进行迭代.

## 2 评价指标

### 1) 无效覆盖率

无效覆盖率简称 KP (量值记为  $P_k$ ), 指实际测量值落入相应置信区间之外的样本量占样本总数的百分比<sup>[21]</sup>, 其计算公式为

$$P_k = \frac{N_{kf}}{N} \times 100\%, \quad (14)$$

式中:  $N_{kf}$  表示路段流量实际值落在相应置信区间之外的数量;  $N$  为实际观测值的总数.

### 2) 宽度流量比

该指标的定义为路段流量置信区间的宽度与对应的路段流量真实值之比. 在此定义下, 每一个置信区间都可以求得一个比值, 以揭示路段流量的区间波动特征. 宽度流量比的计算公式为

$$R = \frac{d_{Cl}}{d}, \quad (15)$$

式中:  $d_{Cl}$  表示置信区间宽度;  $d$  为路段流量真实值.

### 3 案例研究

本文选择南京市某一区域的路网为研究对象进行实例研究,如图3所示.首先对BPR函数进行参数标定,然后采用Liu等<sup>[16]</sup>提出的方法,估计得到动态OD出行需求的置信区间,并以区间的上下限为输入量,建立并求解交通分配的不确定性.最后对结果进行评价.

#### 3.1 模型参数确定

本案例路网中路段的道路等级水平如表1所示.其中珠江路、中山东路、明故宫路、北安门街以及御道街为主干道,其余道路均为次干道.根据《城市道路工程设计规范》<sup>[22]</sup>,各级城市道路的设计车速和设计通行能力如表2所示.经过折减,各级城市道路实际通行能力和各路段的自由行程时间,即分别为BPR函数中 $C_i$ 及 $t_i^0$ 的取值,如表3所示.

表1 路网中路段的道路等级状况

Table 1 Road classification of selected road network

道路名称	道路等级	道路名称	道路等级
珠江路	主干道	北安门街	主干道
中山东路	主干道	御道街	主干道
瑞金路	次干道	解放路	次干道
明故宫路	主干道	黄埔路	次干道
后宰门街	次干道	清溪路	次干道
解放路南	次干道	后标营路	次干道

表2 城市各级道路的设计车速及设计通行能力

Table 2 The design speed and design capacity of urban roads

道路等级	设计车速/ (km/h)	设计通行能力/ (标准车/(h·车道))
主干道	50	1 350
次干道	40	1 300
支路	30	1 300

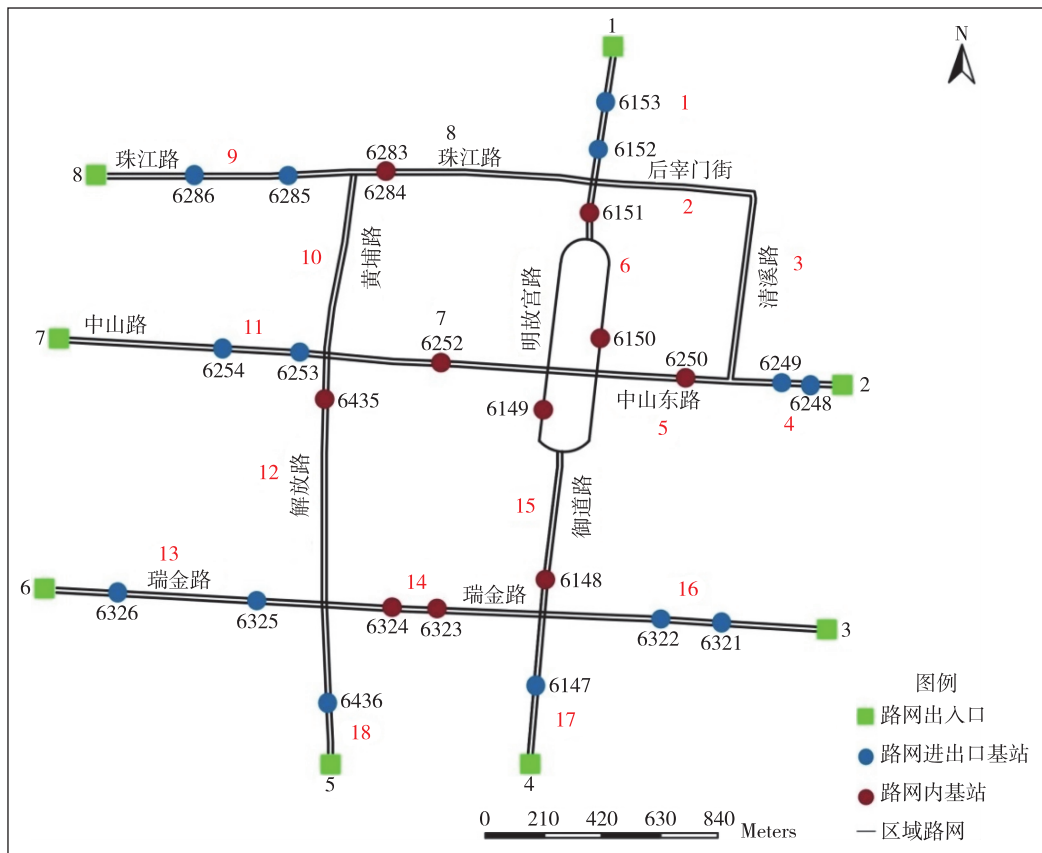


图3 选取的南京市区域路网

Fig. 3 The selected road network in Nanjing

表3 路段出行自由行程时间及实际通行能力

Table 3 Road link freeflow travel time and actual capacity

路段编号	$t_i^0/\text{min}$	$C_i/(\text{辆}/\text{h})$
1	0.43	2 240
2	0.68	1 560
3	0.98	3 300
4	0.35	1 900
5	0.45	2 640
6	0.45	2 640
7	0.84	4 370
8	0.83	3 440
9	0.57	3 440
10	0.96	3 000
11	0.65	3 000
12	1.32	3 420
13	1.06	3 900
14	0.94	3 670
15	1.08	3 200
16	1.36	3 420
17	1.13	3 200
18	1.28	3 420

### 3.2 用户均衡分配结果评价

在95%、90%和85%置信水平下,采用Liu等<sup>[16]</sup>提出的方法,获得动态OD置信区间上下限,分别作为用户均衡分配模型的输入量,然后利用Frank-Wolf算法求解,得到对应的路段流量置信区间.路网中共有18条路段,随机选取路段8、9、11、13和15,在前述95%、90%和85%置信水平下,求解式(14)和式(15),得出路段流量区间的评价结果R和KP的值,结果分别如图4以及图5所示.

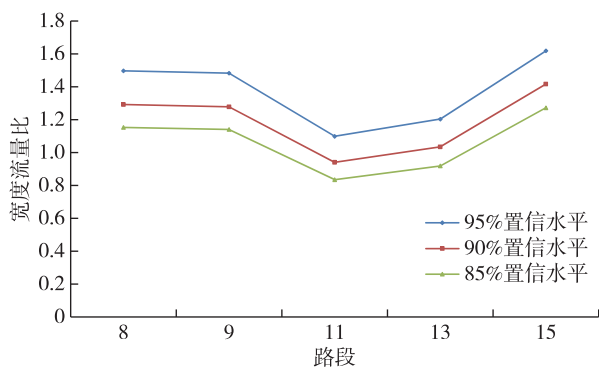


图4 3种置信水平下用户均衡分配区间宽度流量比

Fig. 4 R of user equilibrium traffic assignment intervals under three confidence levels

如图4所示,用户均衡分配区间的宽度流量比R随着置信水平的增加而变大,这意味着路段流量区间对路段流量真实值的覆盖程度提高,即KP值变小.但在3种置信水平下,一半以上路段的R均大于1,并且所有路段的KP值均小于其理想水平,相差较大.由此可以看出,使用该方法能够获取路段流量的置信区间,但是区间宽度相对较宽,表明该方法仍然有进一步的改进空间.

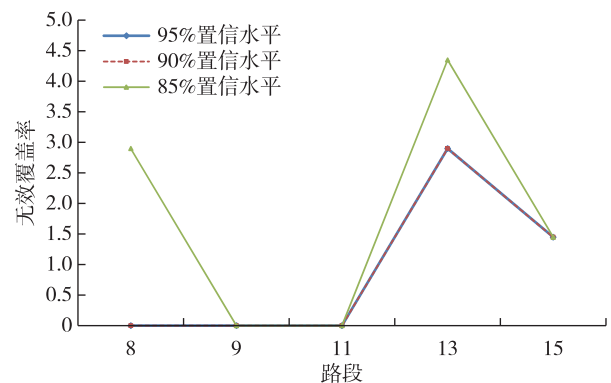


图5 3种置信水平下用户均衡分配区间无效覆盖率

Fig. 5 KP of user equilibrium traffic assignment intervals under three confidence levels

为直观展示3种置信水平下获得的路段流量区间结果,以2014年6月9日路段13的分配结果为例说明,如图6—8所示.可以看出,95%置信水平下的路段流量区间宽度最大,并且3个置信水平下的路段流量区间均100%覆盖路段流量真实值,即KP值较小,与上述结论相一致.

### 4 结论

本文在OD区间估计基础上,将各时段的OD出行量的上下限分别作为用户均衡分配模型的输入量,并使用Frank-Wolf算法求解,得到路网各路段流量的置信区间.采用实际路网进行实例分析,计算得到了交通分配后路段流量的上下限,并选用宽度流量比(R)以及无效覆盖率(KP)两个指标进行评价,发现置信区间在不同的置信水平下得到的KP值均小于其理想水平,表明该方法能够获取路网中路段流量的置信区间,且具有改进空间.后续研究可继续深入分析交通分配计算步骤中的不确定性传播机制,并实现实时的交通分配不确定性计算,以满足实时交通管理的需求.

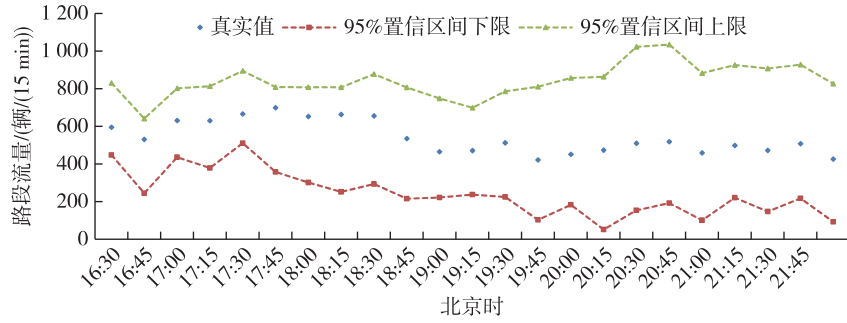


图6 2014年6月9日路段13的95%置信区间

Fig. 6 95% confidence interval for road link 13 on June 9, 2014

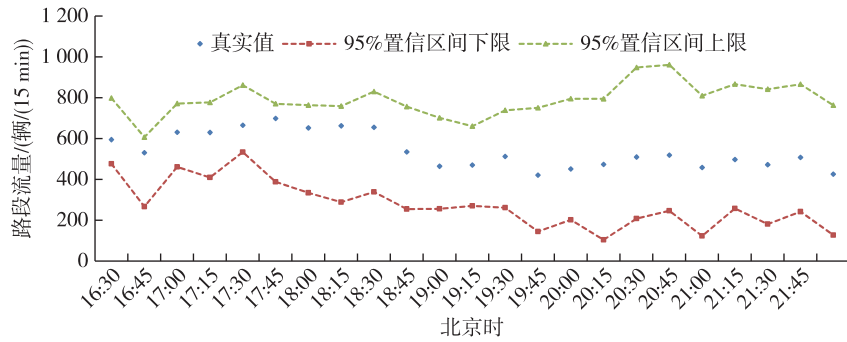


图7 2014年6月9日路段13的90%置信区间

Fig. 7 90% confidence interval for road link 13 on June 9, 2014

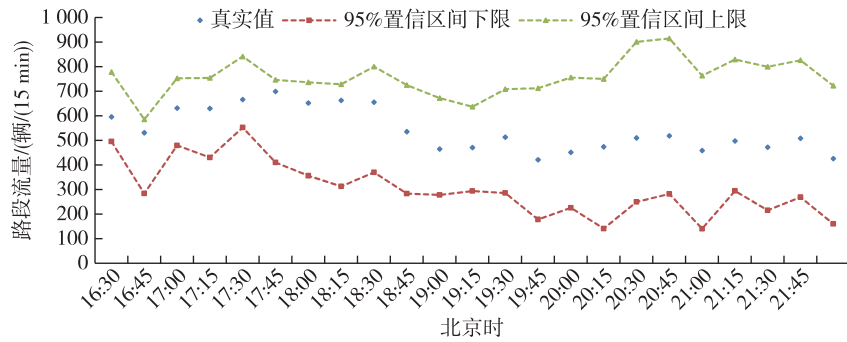


图8 2014年6月9日路段13的85%置信区间

Fig. 8 85% confidence interval for road link 13 on June 9, 2014

参考文献

References

[ 1 ] Wardrop J G. Some theoretical aspects of road traffic research [ J ]. Operation Research, 1953, 4 ( 4 ) : 72-73

[ 2 ] 周和平, 全维杰, 杨启福, 等. 基于区间情景的不确定性 OD 反推模型与算法 [ J ]. 系统工程, 2013, 31 ( 10 ) : 75-80  
ZHOU Heping, QUAN Weijie, YANG Qifu, et al. Uncertain optimization model and algorithm of estimating origin-destination matrices based on interval scenarios [ J ]. Systems Engineering, 2013, 31 ( 10 ) : 75-80

[ 3 ] Clark S, Watling D. Modelling network travel time reliability under stochastic demand [ J ]. Transportation Research Part B ( Methodological ), 2005, 39 ( 2 ) : 119-140

[ 4 ] Lo H K, Luo X W, Siu B W Y. Degradable transport network; Travel time budget of travelers with heterogeneous risk aversion [ J ]. Transportation Research Part B ( Methodological ), 2006, 40 ( 9 ) : 792-806

[ 5 ] Shao H, Lam W H K, Tam M L. A reliability-based stochastic traffic assignment model for network with multiple user classes under uncertainty in demand [ J ]. Networks and Spatial Economics, 2006, 6 ( 3/4 ) : 173-204

[ 6 ] Zhang C, Chen X J, Sumalee A. Robust Wardrop's user equilibrium assignment under stochastic demand and supply: expected residual minimization approach [ J ]. Transportation Research Part B ( Methodological ), 2011,

- 45(3):534-552
- [ 7 ] Han L H, Sun H J, Wang D Z W, et al. A stochastic process traffic assignment model considering stochastic traffic demand[J]. *Transportmetrica B(Transport Dynamics)*, 2018, 6(3):169-189
- [ 8 ] Chang M S, Chen H K. A fuzzy user-optimal route choice problem using a link-based fuzzy variational inequality formulation[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 114(2):339-345
- [ 9 ] Chen Y W, Tzeng G H. Using fuzzy integral for evaluating subjectively perceived travel costs in a traffic assignment model[J]. *European Journal of Operational Research*, 2001, 130(3):653-664
- [ 10 ] Liu H X, Ban X G, Ran B, et al. Formulation and solution algorithm for fuzzy dynamic traffic assignment model[J]. *Transportation Research Record(Journal of the Transportation Research Board)*, 2003, 1854(1):114-123
- [ 11 ] 代存杰, 李秦渝, 孙亮. 动态交通配流中的模糊路径选择模型研究[J]. *交通科技与经济*, 2009, 11(1):96-97  
DAI Cunjie, LI Qinyu, SUN Liang. The study on fuzzy Route choice model in dynamic traffic assignment[J]. *Technology & Economy in Areas of Communications*, 2009, 11(1):96-97
- [ 12 ] Ramazani H, Shafahi Y, Seyedabrishami S E. A fuzzy traffic assignment algorithm based on driver perceived travel time of network links[J]. *Scientia Iranica*, 2011, 18(2):190-197
- [ 13 ] 纪魁, 曹国华. 基于 OD 反推的交通需求分析方法研究[J]. *交通信息与安全*, 2014, 32(3):83-86, 93  
JI Kui, CAO Guohua. Travel demand analysis method based on OD estimation[J]. *Journal of Transport Information and Safety*, 2014, 32(3):83-86, 93
- [ 14 ] Moore R E. Interval arithmetic and automatic error analysis in digital computing[D]. San Francisco: Stanford University, 1962
- [ 15 ] 钟璧樯. 区间不确定下的交通需求预测[D]. 长沙: 长沙理工大学, 2011  
ZHONG Biqiang. Travel demand forecasting under interval uncertainty[D]. Changsha: Changsha University of Science & Technology, 2011
- [ 16 ] Liu Y, Liu Z, Li X G, et al. Dynamic traffic demand uncertainty prediction using radio-frequency identification data and link volume data [J]. *IET Intelligent Transport Systems*, 2019(Accepted)
- [ 17 ] Mori U, Mendiburu A, Álvarez M, et al. A review of travel time estimation and forecasting for advanced traveller information systems [J]. *Transportmetrica A (Transport Science)*, 2015, 11(2):119-157
- [ 18 ] Irawan M Z, Sumi T, Munawar A. Implementation of the 1997 Indonesian highway capacity manual (MKJI) volume delay function[J]. *Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies*, 2010, 8:350-360
- [ 19 ] He N, Zhao S C. Discussion on influencing factors of free-flow travel time in road traffic impedance function[J]. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 2013, 96:90-97
- [ 20 ] Leblanc L J, Helgason R V, Boyce D E. Improved efficiency of the Frank-Wolfe algorithm for convex network programs [J]. *Transportation Science*, 1985, 19(4):445-462
- [ 21 ] Guo J H, Huang W, Williams B M. Adaptive Kalman filter approach for stochastic short-term traffic flow rate prediction and uncertainty quantification[J]. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2014, 43:50-64
- [ 22 ] 中华人民共和国住房和城乡建设部. CJJ 37—2012 城市道路工程设计规范[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2016  
Ministry of Housing and Urban-Rural Development of the People's Republic of China. CJJ 37—2012 Code for design of urban road engineering [S]. Beijing: China Building Industry Press, 2016

## Method of quantifying uncertainty in user equilibrium traffic assignment

CHENG Xiaoyang<sup>1</sup> LIU Yu<sup>1</sup> GUO Jianhua<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Intelligent Transportation Research Center, Southeast University, Nanjing 210018

**Abstract** To solve the uncertainty problems in traffic assignment, this paper established a method of quantifying the uncertainty in traffic assignment model based on Wardrop user equilibrium principle and Beckman traffic assignment model. The model uses the upper and lower limits of OD estimation results under different confidence levels as inputs, and subsequently uses the Frank-Wolfe algorithm to solve the model to obtain link traffic flow intervals under different confidence levels to quantify uncertainty in traffic assignment. A case study utilizing a regional road network in Nanjing is performed, and the results were evaluated using the width flow ratio  $R$  and the kickoff percentage (KP) as the performance measures. The evaluation results show that the proposed method can effectively compute the confidence intervals of the road link flow, thereby quantifying the uncertainty in traffic assignment.

**Key words** uncertainty; dynamic traffic assignment model; OD interval estimation; Frank-Wolfe algorithm