



多智能体系统的有限时间与固定时间一致性

摘要

本文利用非连续的控制协议,研究了多智能体系统的有限时间一致性与固定时间一致性问题.基于集值映射、微分包含以及 Lyapunov 稳定性理论,在统一的框架下,给出了多智能体系统达到有限时间一致性和固定时间一致性的判别准则.通过数值仿真,验证了所给协议的有效性.

关键词

多智能体系统; 固定时间; 有限时间; 平均一致性

中图分类号 O193

文献标志码 A

收稿日期 2019-06-16

资助项目 江苏省研究生科研与实践创新计划(SJKY19_1940); 国家自然科学基金(61773185, 61877030); 2017年及2019年江苏省高校青蓝工程项目

作者简介

邵劭,男,硕士生,研究方向为复杂网络同步.70435485@qq.com

胡元发(通信作者),男,硕士生,研究方向为多智能体系统.hu_yuan_fa@163.com

¹ 江苏师范大学 计算机科学与技术学院,徐州,221116

0 引言

自然界存在着大量有趣的生物集群现象,如鱼群的集聚、鸟类的蜂拥、鬣狗群集捕食、蚁群迁徙等,它们是如何进行信息交互与协作来实现共同目标的问题,引起了生物学、数学、控制科学、人工智能等各个领域众多学者的思考,并由此产生了关于多智能体的研究热点.智能体是一个抽象的个体,可以通过传感器感知外部环境,并进行信息交互和相应的行动.多智能体系统是指由各个智能体组成,按照一定的控制协议,通过局部信息交互实现共同目标的系统.近年来,随着多机器人协同编队^[1-2]、无人机群体控制^[3-5]等问题的研究深入,多智能体系统的一致性问题成为重要研究方向.多智能体的一致性问题,是指通过设计合适的控制协议使得多智能体的状态趋于相同.当前,关于一致性的问题研究可分为分组一致^[6]、均方一致性^[7]、平均一致性^[8]、有限时间一致性^[9]、固定时间一致性^[10]等.

另一方面,在实际生活中,人们总是希望多智能体系统能在有限时间内达到一致.Li等^[11]研究了具有约束的不确定非线性多智能体系统的有限时间跟踪问题.Zhang等^[12]研究了事件驱动的多智能体系统的有限时间一致性.Wang等^[13]则提出一种包含线性项和非线性项的新协议,使得切换拓扑下的多智能体系统在有限时间达到平均一致.

上述文献中,系统的一致性时间的大小严重依赖于系统初值,但是对于大型的现实网络系统而言,系统的初值很难获得,这使得研究与初值无关的固定时间一致性问题显得尤为重要.Huang等^[10]提出一种具有输出反馈的一致性控制协议,解决了二阶非线性多智能体系统固定时间一致性跟踪问题.Zhang等^[14]研究了具有饱和输入的二阶有领导者的多智能体系统固定时间一致性问题.Zhao等^[15]提出一种终端滑模协议,解决了具有未知外部干扰的二阶多智能体系统的固定时间一致跟踪问题.

目前,能够同时考虑有限时间一致性和固定时间一致性的文献相对较少.为了能在统一的框架下解决有限时间一致性和固定时间一致性问题,本文提出了一种简洁的非连续控制协议,只通过调节控制协议的幂参数,便能使多智能体系统分别达到有限时间一致性和固定时间一致性.

1 预备知识

1.1 图论及数学符号

假设多智能体系统中包含 n 个智能体, 无向图 $G = (V, E, A)$ 表示各个智能体之间进行信息交换的网络拓扑, 顶点集 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为有限的非空集合, 其中 v_i 代表第 i 个智能体, 顶点的下标集为 $I = \{1, 2, \dots, n\}$, 边集 $E = V \times V$. 如果顶点 v_i 和顶点 v_j 有信息传递, 则它们之间有一条边, 表示为 $e_{ij} = (v_i, v_j) \in E$. 顶点 v_i 的邻居为 $N_i = \{j: (v_i, v_j) \in E\}$. 图 G 的邻接矩阵表示为 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ($a_{ij} \geq 0$). 顶点 v_i 的度 d_i 定义为与第 i 个顶点相连的顶点的数目, 即 $d_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}$, 度矩阵定义为 $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$. 图 G 的 Laplacian 矩阵定义为 $L = D - A$. 在无向图 G 中, L 是一个半正定矩阵, 其所有特征值按照从小到大排序定义为 $0 = \lambda_1(L) < \lambda_2(L) \leq \lambda_3(L) \leq \dots \leq \lambda_n(L)$, 其中 0 是 Laplacian 矩阵的最小特征值, 对应的特征向量 $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T \in \mathbf{R}^n$.

1.2 相关定义及引理

定义 1^[16] 设 $E \subset \mathbf{R}^n$, 如果对于集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ 中的每个点 x , 对应一个非空集 $F(x) \subset \mathbf{R}^n$, 则称 $x \rightarrow F(x)$ 是 $E \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的集值映射. 设 $x_0 \in E \subseteq \mathbf{R}^n$, 如果对任意包含 $F(x_0)$ 的开集 N , 总存在一个 x_0 邻域 M , 使得 $F(M) \subset N$, 则称具有非空值的集值映射 F 在点 x_0 上是半连续的, 如果对 E 中任意一点 x , $F(x)$ 总是闭的(凸的、紧的), 则称 $x \rightarrow F(x)$ 是 E 的闭的(凸的、紧的)映射.

考虑下面的向量值非线性微分方程:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), f: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad (1)$$

其中 $f(t, x)$ 关于 x 是非连续的.

定义 2^[17] 针对上述右端非连续的非线性微分系统, 其集值映射定义为

$$F(t, x) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu(N)=0} \text{co}[f(B(x, \delta) \setminus N)], \quad (2)$$

其中 $B(x, \delta) = \{y: \|y - x\| \leq \delta\}$ 是以 x 为中心, 以 δ 为半径的球, $\text{co}[\cdot]$ 表示凸闭包, $\mu(N)$ 表示集合 N 的 Lebesgue 测度. 若向量函数 $\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ 在任意的子区间 $[l_1, l_2]$ 上是绝对连续的, 并且满足以下微分包含:

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x), \quad (3)$$

则称向量值函数 $\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ 为非线性系统(1)的定义在非退化区间 $I \subset \mathbf{R}$ 上的

Filippov 解.

引理 1^[18] 对于给定的无向拓扑图 G , 如果存在一个函数 $\varphi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ 满足 $\varphi(x_i, x_j) = -\varphi(x_j, x_i)$, $\forall i, j \in I, i \neq j$, 那么存在数列 y_1, y_2, \dots, y_n 使得:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} a_{ij} y_i \varphi(x_i, x_j) = -\frac{1}{2} \sum_{(v_i, v_j) \in E} a_{ij} (y_j - y_i) \varphi(x_j, x_i).$$

引理 2^[19] 假设 $w_1, w_2, \dots, w_N \geq 0, 0 < p \leq 1, q > 1$, 则:

$$1) \sum_{i=1}^N w_i^p \geq \left(\sum_{i=1}^N w_i \right)^p;$$

$$2) \sum_{i=1}^N w_i^q \geq N^{1-q} \left(\sum_{i=1}^N w_i \right)^q.$$

引理 3^[20-21] 对于无向拓扑图 $G, L(A) = [l_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 表示该无向图的 Laplacian 矩阵, 则 $L(A)$ 具有以下性质:

$$1) \mathbf{x}^T L(A) \mathbf{x} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (x_j - x_i)^2;$$

2) 如果 G 连通, 则 $L(A)$ 半正定, 并且 $L(A)$ 的特征根满足 $0 = \lambda_1(L) \leq \lambda_2(L) \leq \dots \leq \lambda_n(L)$, 图的代数连通度等于 $\min_{x \neq 0, \mathbf{1}_n^T x = 0} \frac{\mathbf{x}^T L(A) \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$, 即当 $\mathbf{1}_n^T \mathbf{x} = 0$, 有

$$\frac{\mathbf{x}^T L(A) \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \geq \lambda_2(L(A)).$$

引理 4^[22-23] 如果 $V(\mathbf{x}(t)): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是连续函数, $\mathbf{x}(t): [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}^n$ 在 $[0, +\infty)$ 是 C -正则的, $\mathbf{x}(t): [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}^n$ 在 $[0, +\infty)$ 的任意紧区间是完全连续的. 如果存在一个连续函数 $K: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), \sigma \in (0, +\infty)$ 时, $K(\sigma) > 0$, 使得右导数 $DV(t) \leq -K(V(t))$.

若令 $K(V) = k_1 V^\alpha + k_2 V^\beta$:

1) 如果 $0 \leq \alpha, \beta < 1, V(t)$ 将会在有限时间内达到 0 , 该时间估计为 $T \leq \min \left\{ \frac{V^{1-\alpha}(0)}{k_1(1-\alpha)}, \frac{V^{1-\beta}(0)}{k_2(1-\beta)} \right\}$;

2) 如果 $\alpha > 1, 0 \leq \beta < 1, V(t)$ 将会在固定时间达到 0 , 该时间估计为 $T \leq \frac{1}{k_1} \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{k_2} \frac{1}{1-\beta}$.

1.3 模型介绍

考虑一个具有 n 个智能体的动态系统, 其动力学描述为

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

其中, $x_i(t) \in \mathbf{R}$ 表示第 i 个智能体在 t 时刻的位置状态, $u_i(t) \in \mathbf{R}$ 表示系统的控制输入. 为了使多智能体

系统(4)达到有限时间平均一致性与固定时间平均一致性,设计以下控制协议:

$$u_i(t) = k_1 \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}^\alpha(x_j - x_i) + k_2 \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sign}(x_j - x_i), \quad (5)$$

其中 $k_1 > 0, k_2 > 0$ 为控制增益, 幂参数 $\alpha > 0$, $\text{sig}^\alpha(s) = |s|^\alpha \text{sign}(s)$, sign 为符号函数,

$$\text{sign}(s) = \begin{cases} 1, & s > 0, \\ 0, & s = 0, \\ -1, & s < 0. \end{cases}$$

注1 该控制协议 $u_i(t)$ 分为连续项和不连续项两个部分,除控制增益 k_1 和 k_2 外,存在一个幂参数 α ,本文通过调节该幂参数 α 便可以使系统(4)分别达到有限时间一致和固定时间一致.

2 一致性分析

定理1 在非连续控制协议(5)下,如果幂参数 $0 < \alpha < 1$,则多智能体系统(4)将在有限时间内达到平均一致性;如果幂参数 $\alpha > 1$,则多智能体系统(4)将在固定时间内达到平均一致性.

证明

由于 $\dot{x}_i(t) = k_1 \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}^\alpha(x_j - x_i) + k_2 \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sign}(x_j - x_i)$ 是右端非连续的,我们需考虑 Filippov 意义下的解.基于集值映射和微分包含理论,可得:

$$x_i(t) \in k_1 \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}^\alpha(x_j - x_i) + k_2 \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{SIGN}(x_j - x_i), \quad (6)$$

$$\text{其中 } \text{SIGN}(s) = \begin{cases} -1, & s < 0, \\ [-1, 1], & s = 0, \\ 1, & s > 0. \end{cases}$$

令系统(4)的平均状态轨道为

$$x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t), \quad (7)$$

则状态误差为

$$\bar{x}_i(t) = x_i(t) - x^*. \quad (8)$$

由式(6)–(8)可以得到:

$$\dot{\bar{x}}_i(t) \in k_1 \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}^\alpha(\bar{x}_j - \bar{x}_i) + k_2 \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{SIGN}(\bar{x}_j - \bar{x}_i). \quad (9)$$

构造如下 Lyapunov 函数:

$$V(t) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^2, \quad (10)$$

并对(10)沿着误差系统(9)求导,结合引理1可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2 \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \dot{\bar{x}}_i \in 2 \sum_{i=1}^n \bar{x}_i [k_1 \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}^\alpha(\bar{x}_j - \bar{x}_i) + \\ &k_2 \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{SIGN}(\bar{x}_j - \bar{x}_i)] \in 2k_1 \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{sig}^\alpha(\bar{x}_j - \bar{x}_i) + \\ &2k_2 \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{SIGN}(\bar{x}_j - \bar{x}_i) \in \\ &-k_1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (\bar{x}_j - \bar{x}_i) \text{sig}^\alpha(\bar{x}_j - \bar{x}_i) - \\ &k_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (\bar{x}_j - \bar{x}_i) \text{SIGN}(\bar{x}_j - \bar{x}_i) = \\ &-k_1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} |\bar{x}_j - \bar{x}_i|^{1+\alpha} - k_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} |\bar{x}_j - \bar{x}_i| = \\ &-k_1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [a_{ij}^{1+\alpha} (\bar{x}_j - \bar{x}_i)^2]^{\frac{1+\alpha}{2}} - \\ &k_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [a_{ij}^2 (\bar{x}_j - \bar{x}_i)^2]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

记 $\bar{A} = [a_{ij}^{1+\alpha}]_{n \times n}, \hat{A} = [a_{ij}^2]_{n \times n}$,下面对 α 的取值进行讨论.

1) 当 $0 < \alpha < 1$ 时, $0 < \frac{1+\alpha}{2} < 1$,由引理2

可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -k_1 [\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{1+\alpha} (\bar{x}_j - \bar{x}_i)^2]^{\frac{1+\alpha}{2}} - \\ &k_2 [\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 (\bar{x}_j - \bar{x}_i)^2]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

记 $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]^T$,由引理3可得:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{1+\alpha} (\bar{x}_j - \bar{x}_i)^2}{V(t)} + \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 (\bar{x}_j - \bar{x}_i)^2}{V(t)} &= \\ \frac{2\bar{x}^T L(\bar{A}) \bar{x}}{\bar{x}^T \bar{x}} + \frac{2\bar{x}^T L(\hat{A}) \bar{x}}{\bar{x}^T \bar{x}} &\geq \\ 2\lambda_2(L(\bar{A})) + 2\lambda_2(L(\hat{A})). \end{aligned} \quad (13)$$

联合式(12)、(13)得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -k_1 [2\lambda_2(L(\bar{A}))]^{\frac{1+\alpha}{2}} [V(t)]^{\frac{1+\alpha}{2}} - \\ &k_2 [2\lambda_2(L(\hat{A}))]^{\frac{1}{2}} [V(t)]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

从而,根据引理4中式(1),可以确保系统(4)达到有限时间一致性,且一致性时间估计为

$$T_1 \leq \min \left\{ \frac{2V^{\frac{1-\alpha}{2}}(0)}{((1-\alpha)k_1 [2\lambda_2(L(\bar{A}))])^{\frac{1+\alpha}{2}}}, \frac{\sqrt{2}V^{\frac{1}{2}}(0)}{k_2 [\lambda_2(L(\hat{A}))]^{\frac{1}{2}}} \right\}. \quad (15)$$

2) 当 $\alpha > 1$ 时, $\frac{1+\alpha}{2} > 1$,由引理2可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -n^{1-\alpha}k_1 \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{1+\alpha} (\bar{x}_j - \bar{x}_i)^2 \right]^{\frac{1+\alpha}{2}} - \\ & k_2 \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [a_{ij}^2 (\bar{x}_j - \bar{x}_i)^2] \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

联合式(13)、(16)得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -n^{1-\alpha}k_1 [2\lambda_2(\mathbf{L}(\bar{\mathbf{A}}))]^{\frac{1+\alpha}{2}} [V(t)]^{\frac{1+\alpha}{2}} - \\ & k_2 [2\lambda_2(\mathbf{L}(\hat{\mathbf{A}}))]^{\frac{1}{2}} [V(t)]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

从而,借助引理4中式(2),可以确保系统(4)达到固定时间一致性,且一致性时间估计为

$$\begin{aligned} T_2 \leq & \frac{2}{(\alpha - 1)n^{1-\alpha}k_1 [2\lambda_2(\mathbf{L}(\bar{\mathbf{A}}))]^{\frac{1+\alpha}{2}}} + \\ & \frac{\sqrt{2}}{k_2 [\lambda_2(\mathbf{L}(\hat{\mathbf{A}}))]^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (17)$$

证毕.

注2 虽然在证明过程中使用了集值映射、微分包含与 Filippov 解的理论,但是通过计算,可以看出式(11)是一个数值,并非集合.

注3 从定理1可以看出,多智能体系统(4)的有限时间一致性与固定时间一致性可以通过一个统一的控制器(5)来获得,而且式(5)中幂参数 α 的取值范围将决定一致性时间的类型.当 $0 < \alpha < 1$ 时,系统(4)达到有限时间一致性,当 $\alpha > 1$ 时,系统(4)达到固定时间一致性.

3 仿真实验

本节将通过数值仿真来验证本文结论的有效性.

考虑8个多智能体的网络系统,该系统的所有非零连接权值均为1,拓扑结构如图1所示.假设智能体的初始状态分别为 $[-1.2, 1.5, 0.2, -0.2, 1, -0.3, 0.5, -0.8]$,控制增益 $k_1=0.3, k_2=1$.

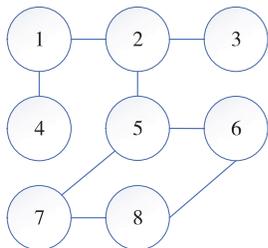


图1 多智能体通信拓扑结构

Fig. 1 Topologies of multi-agent system communication

当 $\alpha=0.5$ 时,满足式(15)成立条件.根据定理1的结论,多智能体系统将在有限时间内达到一致性,

各个多智能体的状态误差曲线如图2所示.

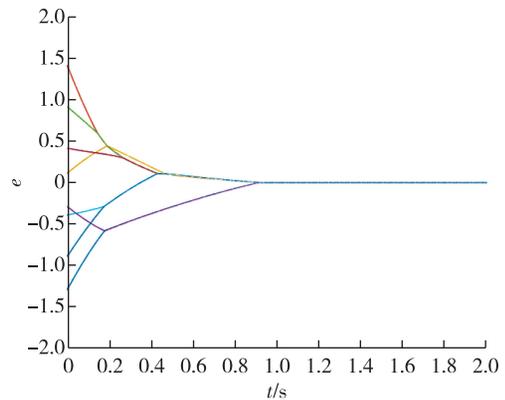


图2 $\alpha=0.5$ 时的多智能体系统的有限时间一致性误差

Fig. 2 Finite-time consensus errors for system (4) with $\alpha=0.5$

当 $\alpha=3$ 时,满足式(17)成立条件,多智能体系统将达到固定时间一致,各个多智能体的误差曲线如图3所示.

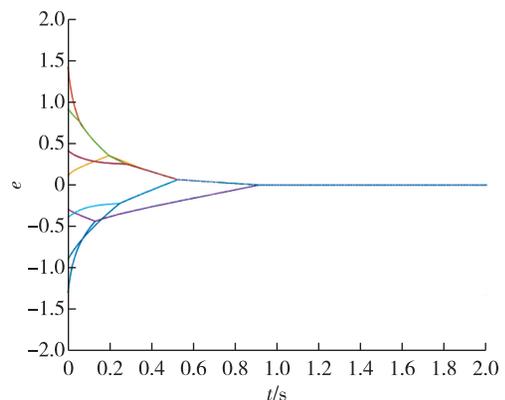


图3 $\alpha=3$ 时的多智能体系统(4)的固定时间一致性误差

Fig. 3 Fixed-time consensus errors for system (4) with $\alpha=3$

4 结论

本文在统一的框架下研究了多智能体的有限时间和固定时间平均一致性问题,提出了一种非连续的一致性控制协议.运用 Lyapunov 函数方法分析了多智能体系统在无向连通网络中的有限时间稳定性.通过调节控制器的幂参数,使得多智能体系统能够达到有限时间平均一致和固定时间平均一致.在未来的工作中,将进一步讨论有关高阶和存在噪声干扰的多智能体有限时间和固定时间一致性问题.

参考文献

References

[1] Alonso-Mora J, Montijano E, Năgeli T, et al. Distributed

- multi-robot formation control in dynamic environments [J]. *Autonomous Robots*, 2019, 43(5): 1079-1100
- [2] Peng L, Guan F, Perneel L, et al. Decentralized multi-robot formation control with communication delay and asynchronous clock [J]. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2018, 89(3/4): 465-484
- [3] Zou Y, Zhou Z, Dong X, et al. Distributed formation control for multiple vertical takeoff and landing UAVs with switching topologies [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2018, 23(4): 1750-1761
- [4] Liu Y, Montenbruck J M, Zelazo D, et al. A distributed control approach to formation balancing and maneuvering of multiple multirotor UAVs [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2018, 34(4): 870-882
- [5] Wang D, Zong Q, Tian B, et al. Finite-time fully distributed formation reconfiguration control for UAV helicopters [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, 28(18): 5943-5961
- [6] Zhao H, Park J H. Group consensus of discrete-time multi-agent systems with fixed and stochastic switching topologies [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 77(4): 1297-1307
- [7] Song L, Huang D, Nguang S K, et al. Mean square consensus of multi-agent systems with multiplicative noises and time delays under directed fixed topologies [J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2016, 14(1): 69-77
- [8] Zhang T, Yu H. Average consensus for directed networks of multi-agent with time-varying delay [M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010
- [9] Yu L, Tu L, Huang Y. Finite-time consensus of a leader-following multi-agent network with non-identical nonlinear dynamics and time-varying topologies [J]. *Wuhan University Journal of Natural Sciences*, 2016, 21(5): 438-444
- [10] Huang Y, Jia Y. Fixed-time consensus tracking control of second-order multi-agent systems with inherent nonlinear dynamics via output feedback [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 91(2): 1289-1306
- [11] Li X, Luo X, Wang J, et al. Finite-time consensus of nonlinear multi-agent system with prescribed performance [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 91(4): 2397-2409
- [12] Zhang H, Yue D, Yin X, et al. Finite-time distributed event-triggered consensus control for multi-agent systems [J]. *Information Sciences*, 2016, 339: 132-142
- [13] Wang X, Li J, Xing J, et al. A novel finite-time average consensus protocol for multi-agent systems with switching topology [J]. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2018, 40(2): 606-614
- [14] Zhang D, Duan G. Leader-following fixed-time output feedback consensus for second-order multi-agent systems with input saturation [J]. *International Journal of Systems Science*, 2018, 49(14): 2873-2887
- [15] Zhao L, Yu J, Lin C, et al. Distributed adaptive fixed-time consensus tracking for second-order multi-agent systems using modified terminal sliding mode [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, 312: 23-35
- [16] Aubin J P, Frankowska H. *Set-valued analysis* [M]. Springer Science & Business Media, 2009
- [17] Filippov A F. *Differential equations with discontinuous right-hand side* [J]. *Matematicheskii Sbornik*, 1960, 93(1): 99-128
- [18] Shang Y. Finite-time consensus for multi-agent systems with fixed topologies [J]. *International Journal of Systems Science*, 2012, 43(3): 499-506
- [19] Hardy G H, Littlewood J E, Pólya G. *Inequalities* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1988
- [20] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520-1533
- [21] Wang L, Xiao F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents [J]. *Transactions on Automatic Control*, 2010(4): 950-955
- [22] Forti M, Grazzini M, Nistri P, et al. Generalized Lyapunov approach for convergence of neural networks with discontinuous or non-Lipschitz activations [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2006, 214(1): 88-99
- [23] Liu X, Ho D W C, Song Q, et al. Finite-/fixed-time robust stabilization of switched discontinuous systems with disturbances [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 90(3): 2057-2068

Finite-time/fixed-time consensus of multi-agent systems

SHAO Shao¹ HU Yuanfa¹ LIU Xiaoyang¹ HUANG Junwei¹

¹ School of Computer Science and Technology, Jiangsu Normal University, Xuzhou 221116

Abstract By utilizing discontinuous protocols, this paper considers the finite-time and fixed-time consensus of multi-agent systems. Based on differential inclusion, set-value map and Lyapunov stability method, finite-time and fixed-time consensus criteria of multi-agent systems are given under a unified framework. Simulation experiments are given to verify the effectiveness of the protocols.

Key words multi-agent system; fixed-time; finite-time; average consensus