



复杂网络的固定时间混合外部同步

摘要

本文研究了两个复杂动态网络间的固定时间混合外部同步问题.基于固定时间稳定性理论,采用合适的控制器,实现了两个复杂网络之间的固定时间混合外部同步.最后,通过数值模拟验证了该控制方法的有效性和可行性.

关键词

固定时间;混合外部同步;复杂网络

中图分类号 O193

文献标志码 A

0 引言

复杂网络广泛存在于自然界、生物界、人类社会界,如互联网、万维网、食物网、生物神经网络等.从20世纪末开始,复杂网络研究正渗透到数理学科、生命学科和工程学科等众多不同的领域.网络是对实际系统的一种简化表示,它能将系统简化成一种只具有基本特征的抽象结构.对于网络中的节点和边还可以赋予更多的信息.与复杂网络如计算机网络、生物网络、社会网络等相关的科学研究,是典型的交叉学科领域,涉及到数学、物理学、生物学、计算机科学、社会学及很多其他学科.相关领域的科学家们对网络进行深入研究,并取得了大量的研究成果.

同步是自然界中许多相互连接的系统同步演化的基本运动之一.同步是指耦合系统的动力行为达到相同的时间空间状态,如鱼群的运动、鸟类的成群结队、萤火虫的同步发光等.同步作为复杂网络一种重要的集体行为,因其广泛的应用而成为近年来的研究热点.同步的种类有很多,包括内部同步^[1]、外部同步^[2]、有限时间同步^[3]、固定时间同步^[4]、自适应同步^[5]、混合同步^[6]等.

混合外部同步,当选择了合适的度量矩阵时,其中对应节点的不同状态变量可以同时演化为完全同步、反同步甚至幅度死亡.Wang等^[7]提出了一种新的非脆弱线性状态反馈控制器,用于实现具有时变耦合延迟的耦合复杂网络的混合外部同步.He等^[8]研究了耦合时变时滞复杂网络的有限时间混合外部同步问题.Zheng等^[9]采用脉冲混合控制方法研究了具有不同节点和输出耦合的复杂动态网络之间的混合外同步问题.

关于固定时间的混合外部同步问题,目前还未见相关报道,所以本文主要是设计了合适的控制器,使得两个网络在固定时间内达到混合同步状态.

1 网络模型及预备知识

考虑以下具有 N 个节点的复杂动态网络:

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) + \sum_{j=1}^N c_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{x}_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x}_i(t) = (x_{i1}, \dots, x_{in})^T \in \mathbf{R}^n$ 表示第 i 个节点的状态向量; $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是一个连续可微的非线性向量函数; $\mathbf{\Gamma}$ 表示内部耦合矩阵; $\mathbf{C} =$

收稿日期 2019-06-10

资助项目 国家自然科学基金(61873271,11771443);中央高校基本科研业务费资助项目(2019XKQYMS93)

作者简介

聂平平,女,硕士生,研究方向为复杂网络同步.ppnecumt@163.com

侍红军(通信作者),男,博士,讲师,研究方向为运筹学与控制论.hjshi79@cumt.edu.cn

1 中国矿业大学 数学学院,徐州,221008

$(c_{ij})_{N \times N}$ 表示网络的外部耦合结构.关于 c_{ij} 的定义如下:如果第 j 个节点和第 $i(i \neq j)$ 个节点间存在连接,则令 $c_{ij} > 0$, 否则 $c_{ij} = 0$. 矩阵 C 的对角元素定义如下:

$$c_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

为了实现两个复杂网络之间的固定时间混合同步,本文将网络模型(1)作为驱动网络,响应网络如下式所示:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_i(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{y}_i(t)) + \sum_{j=1}^N c_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{y}_j(t) + \mathbf{u}_i(t), \\ i &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{y}_i(t) = (y_{i1}, \dots, y_{in})^T \in \mathbf{R}^n$ 是第 i 个节点的状态向量; $\mathbf{\Gamma}$ 与式(1)中的含义相同; $\mathbf{u}_i(t) (i = 1, 2, \dots, N)$ 是设计的控制器.

度量矩阵 \mathbf{H} 定义为 $\mathbf{H} = \text{diag}\{h_1, h_2, \dots, h_n\} (h_i \in \{-1, 0, 1\})$, 则混合外部同步误差为 $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{y}_i(t) - \mathbf{H}\mathbf{x}_i(t)$.

注1 很容易得出,混合外部同步包含完全外部同步 ($h_i = 1$) 和外部反同步 ($h_i = -1$) 这两种特殊情况.

定义1 称驱动网络(1)和响应网络(2)实现了固定时间混合外部同步,如果对于任意的初始状态 $\mathbf{x}_i(0), \mathbf{y}_i(0)$, 都存在一个和初始状态无关的固定设定时间 T_0 , 使得

$$\|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{H}\mathbf{x}_i(t)\| = 0, \quad \forall t \geq T_0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

为了实现固定时间的混合外部同步,本文设计的控制器为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= -k\mathbf{e}_i(t) - c_1 \text{sign}(\mathbf{e}_i(t)) |\mathbf{e}_i(t)|^{\theta_1} - \\ & c_2 \text{sign}(\mathbf{e}_i(t)) |\mathbf{e}_i(t)|^{\theta_2}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\text{sign}(\mathbf{e}_i(t)) = \text{diag}\{\text{sign}(e_{i1}(t)), \dots, \text{sign}(e_{in}(t))\}$, k, c_1, c_2 是正的常量, 控制参数满足 $0 < \theta_1 < 1, \theta_2 > 1$, 且有 $|\mathbf{e}_i(t)|^\theta = (|e_{i1}(t)|^\theta, \dots, |e_{in}(t)|^\theta)^T$.

假设1 对于函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, 存在正常数 l , 满足:

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)]^T [\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{y}(t))] &\leq \\ [\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)]^T l [\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)], \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

假设2 对于非线性函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, 满足:

$$\mathbf{H}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{H}\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n,$$

其中 $\mathbf{H} = \text{diag}\{h_1, h_2, \dots, h_n\} (h_i \in \{-1, 0, 1\})$.

引理1 如果 $x_1, x_2, \dots, x_N > 0$, 那么

$$\sum_{i=1}^N x_i^\eta \geq \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^\eta, \quad 0 < \eta \leq 1,$$

$$\sum_{i=1}^N x_i^\eta \geq N^{1-\eta} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^\eta, \quad \eta > 1.$$

引理2 假设存在非负函数 $V(x)$ 满足:

$$\frac{dV(x)}{dx} \leq -\alpha V^p(x(t)) - \beta V^q(x(t)),$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0, 0 < p < 1, q > 1$. 对于任意的

$$T(x_0) \leq T_{\max} \triangleq \frac{1}{\alpha(1-p)} + \frac{1}{\beta(1-q)},$$

有 $V(t) = 0$.

2 混合外部同步的充分条件

本文主要研究了网络(1)和(2)之间的混合同步问题,主要的结论在下面的定理和推论中给出.

定理1 若假设1和2成立.在控制器(3)下,如果 $k > l + \lambda_{\max}(\mathbf{D}^s)$, 其中 $\mathbf{D} = \mathbf{C} \otimes \mathbf{\Gamma}, \mathbf{D}^s = \frac{\mathbf{D}^T + \mathbf{D}}{2}$, 则驱动网络(1)与响应网络(2)可以实现固定时间的混合外部同步.固定的设定时间 T_0 可以估计为

$$T_0 \leq T_{\max} \triangleq \frac{1}{c_1(1-\theta_1)} + \frac{N^{\theta_2-1}}{c_2(1-\theta_2)}. \quad (4)$$

证明 由网络(1)和(2),可以得到误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_i(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{y}_i(t)) - \mathbf{H}\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) - k\mathbf{e}_i(t) + \\ & \sum_{j=1}^N c_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{e}_j(t) - c_1 \text{sign}(\mathbf{e}_i(t)) |\mathbf{e}_i(t)|^{\theta_1} - \\ & c_2 \text{sign}(\mathbf{e}_i(t)) |\mathbf{e}_i(t)|^{\theta_2}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (5)$$

定义一个 Lyapunov 函数:

$$V(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t) = \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t),$$

对函数 $V(t)$ 沿着误差轨迹(5)求导可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2 \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) [\mathbf{f}(\mathbf{y}_i(t)) - \mathbf{H}\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t)) - \\ & k\mathbf{e}_i(t) + \sum_{j=1}^N c_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{e}_j(t) - c_1 \text{sign}(\mathbf{e}_i(t)) |\mathbf{e}_i(t)|^{\theta_1} - \\ & c_2 \text{sign}(\mathbf{e}_i(t)) |\mathbf{e}_i(t)|^{\theta_2}]. \end{aligned} \quad (6)$$

根据假设1和2有以下估计:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) [\mathbf{f}(\mathbf{y}_i(t)) - \mathbf{H}\mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t))] &= \\ \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) [\mathbf{f}(\mathbf{y}_i(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{H}\mathbf{x}_i(t))] &\leq \\ \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) l (\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{H}\mathbf{x}_i(t)) &= \\ l \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t). \end{aligned} \quad (7)$$

注意到

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \sum_{j=1}^N c_{ij} \Gamma \mathbf{e}_j(t) = \mathbf{e}^T(t) (\mathbf{C} \otimes \Gamma) \mathbf{e}(t) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{D}^s) \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t), \quad (8)$$

$$\text{其中 } \mathbf{D} = \mathbf{C} \otimes \Gamma, \mathbf{D}^s = \frac{\mathbf{D}^T + \mathbf{D}}{2}.$$

更进一步,有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \text{sign}(\mathbf{e}_i(t)) |\mathbf{e}_i(t)|^{\theta} &= \sum_{i=1}^N (|\mathbf{e}_i(t)|^{\theta})^T \text{sign}(\mathbf{e}_i(t)) \mathbf{e}_i(t) = \\ &= \sum_{i=1}^N (|\mathbf{e}_i(t)|^{\theta})^T |\mathbf{e}_i(t)| = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |e_{ij}(t)|^{\theta+1}. \end{aligned}$$

根据引理 1 以及 $0 < \theta_1 < 1, \theta_2 > 1$, 可得:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \text{sign}(\mathbf{e}_i(t)) |\mathbf{e}_i(t)|^{\theta_1} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |e_{ij}(t)|^{\theta_1+1} = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (e_{ij}^2(t))^{\frac{\theta_1+1}{2}} \geq \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_{ij}^2(t) \right)^{\frac{\theta_1+1}{2}} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t) \right)^{\frac{\theta_1+1}{2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

同样有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \text{sign}(\mathbf{e}_i(t)) |\mathbf{e}_i(t)|^{\theta_2} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |e_{ij}(t)|^{\theta_2+1} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (e_{ij}^2(t))^{\frac{\theta_2+1}{2}} \geq \\ &= (N^2)^{1-\frac{\theta_2+1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_{ij}^2(t) \right)^{\frac{\theta_2+1}{2}} = \\ &= N^{1-\theta_2} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t) \right)^{\frac{\theta_2+1}{2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

根据式(6)–(10),有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -2(k-l-\lambda_{\max}(\mathbf{D}^s)) \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t) - \\ &= 2c_1 V^{\frac{\theta_1+1}{2}}(t) - 2c_2 N^{1-\theta_2} V^{\frac{\theta_2+1}{2}}(t). \end{aligned}$$

如果有

$$k > l + \lambda_{\max}(\mathbf{D}^s),$$

则可以得到

$$\dot{V}(t) \leq -2c_1 V^{\frac{\theta_1+1}{2}}(t) - 2c_2 N^{1-\theta_2} V^{\frac{\theta_2+1}{2}}(t).$$

$$\text{令 } \alpha = 2c_1, \beta = 2c_2 N^{1-\theta_2}, p = \frac{\theta_1+1}{2} \text{ 以及 } q = \frac{\theta_2+1}{2},$$

则有

$$\dot{V}(t) \leq -\alpha V^p(t) - \beta V^q(t).$$

根据引理 2 可知,网络(1)和(2)可以实现固定时间的混合外部同步.固定的设定时间 T_0 如式(4)所估计.证明结束.

推论 1 若假设 1 和 2 成立.如果网络(1)和(2)有不同的拓扑结构,也即 \mathbf{C} 和 \mathbf{D} 分别表示网络(1)和(2)的外部耦合结构,若存在一个足够大的数 $k > l + \lambda_{\max}(\mathbf{B}^s)$,其中 $\mathbf{B}^s = \frac{\mathbf{B} + \mathbf{B}^T}{2}$,则这两个网络在下面的控制器:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= -k \mathbf{e}_i(t) - c_1 \text{sign}(\mathbf{e}_i(t)) |\mathbf{e}_i(t)|^{\theta_1} - \\ &= c_2 \text{sign}(\mathbf{e}_i(t)) |\mathbf{e}_i(t)|^{\theta_2} + \sum_{j=1}^N (c_{ij} - d_{ij}) \Gamma \mathbf{H} \mathbf{x}_j(t) \end{aligned}$$

作用下可以实现复杂网络间的广义混合外部同步.

推论 2 若假设 1 和 2 成立.如果度量矩阵 $\mathbf{H} \equiv \text{diag}\{1, 1, \dots, 1\} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ (或 $\mathbf{H} \equiv \text{diag}\{-1, -1, \dots, -1\} \in \mathbf{R}^{n \times n}$),则网络(1)和(2)在控制器(3)的作用下可以实现固定时间的外部同步(反外部同步).

3 数值模拟

本节给出了数值模拟来验证前一节定理的有效性.为简便起见,令内部耦合矩阵 $\Gamma = \mathbf{I}$.不失一般性,本文用 Rssler-like 系统作为节点动力学.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) =$$

$$\delta \begin{pmatrix} -\omega & -\gamma & -\lambda \\ 1 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta \mu \varphi(x_1) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbf{R}^3$ 是状态向量,

$$\varphi(x_1) = \begin{cases} 0, & x_1 < 2.56; \\ \xi(x_1 - 2.56), & x_1 \geq 2.56. \end{cases}$$

在数值模拟中,令参数 $\delta = 0.03, \gamma = 1.5, \eta = 0.2, \mu = 1.5, \lambda = 0.75, \xi = 21.43$ 以及 $\omega = 0.075$.如图 1 所示, Rssler-like 系统存在混沌吸引子.取参数 $k = 0.2, c_1 = 0.1, c_2 = 0.2, \theta_1 = 0.3, \theta_2 = 1.5$ 来模拟网络(1)和(2)的演化过程.图 2a 和图 2b 分别展现了同步误差 $e_{ij} (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, 3)$ 和总同步误差 $E(t) = \|\mathbf{e}(t)\|$ 的运动轨迹.从图 2 可以看出,两个网络间实现了混合外部同步,并且仿真结果与理论结果吻合较好.

为了研究平均度对同步收敛速度的影响,我们取度的不同值 $\langle k \rangle = 4, 8, 16$.图 3a 显示了取不同 $\langle k \rangle$ 值时总同步误差的变化情况.可以看出,网络的平均度越大,收敛速度越快.如文献[10-11]所述,控制律和能量消耗 $U(t) = \int_0^t |u(t)| dt$ 的状态轨迹如图 3b 所示.从图 3b 可以看出,网络的平均度越大,同步所需的能量成本越高,初期的能量消耗急剧增加,这与固定时间控制特性相吻合;另外,当同步完成时,

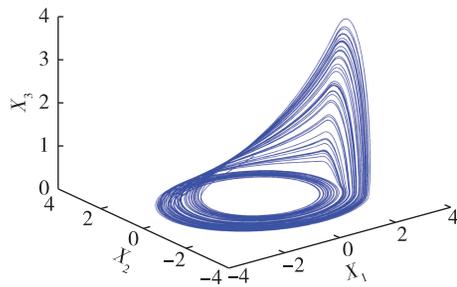


图1 当参数 $\delta = 0.03, \gamma = 1.5, \eta = 0.2, \mu = 1.5, \lambda = 0.75, \xi = 21.43$ 和 $\omega = 0.075$ 时,系统(11)产生的混沌吸引子

Fig.1 Chaotic attractor generated by the system (11) when $\delta = 0.03, \gamma = 1.5, \eta = 0.2, \mu = 1.5, \lambda = 0.75, \xi = 21.43$ and $\omega = 0.075$

响应网络不需要任何能量控制.这是渐近同步和有限时间同步的主要区别.

4 结束语

本文主要研究了两个网络间的混合同步问题.基于 Lyapunov 定理,给出了合适的控制器和充足的条件使得两个网络在固定的时间内达到同步状态.仿真模拟的结果证实了结论的有效性和准确性,并在数值模拟中计算了达到同步状态所需能量的变化.对于更大规模的复杂网络来说,系统会不可避免地受到时间延迟和噪声扰动影响,这将是我们要进行的工作.

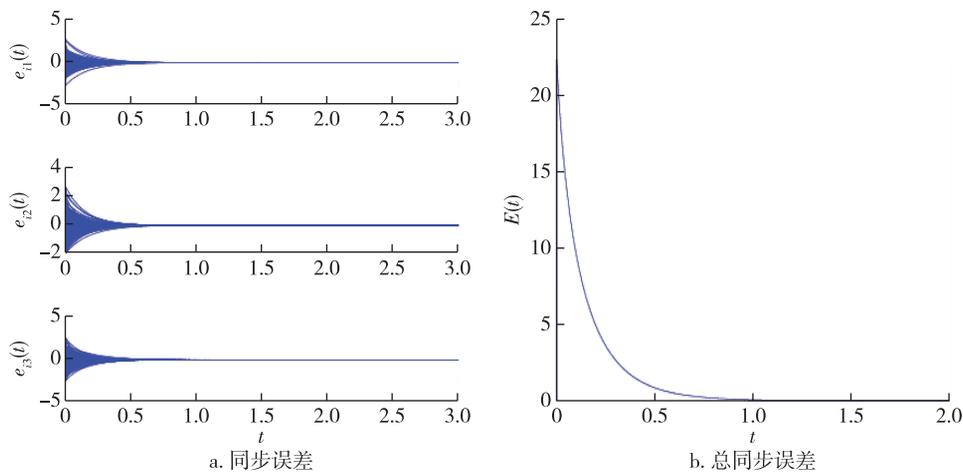


图2 当 $N = 100, k = 0.2, c_1 = 0.1, c_2 = 0.2, \theta_1 = 0.3, \theta_2 = 1.5$ 时网络(1)和(2)之间的同步误差和总同步误差的轨迹

Fig.2 Trajectories of the synchronization error (a) and the total synchronization error(b) between networks (1) and (2) with $N = 100, k = 0.2, c_1 = 0.1, c_2 = 0.2, \theta_1 = 0.3, \theta_2 = 1.5$

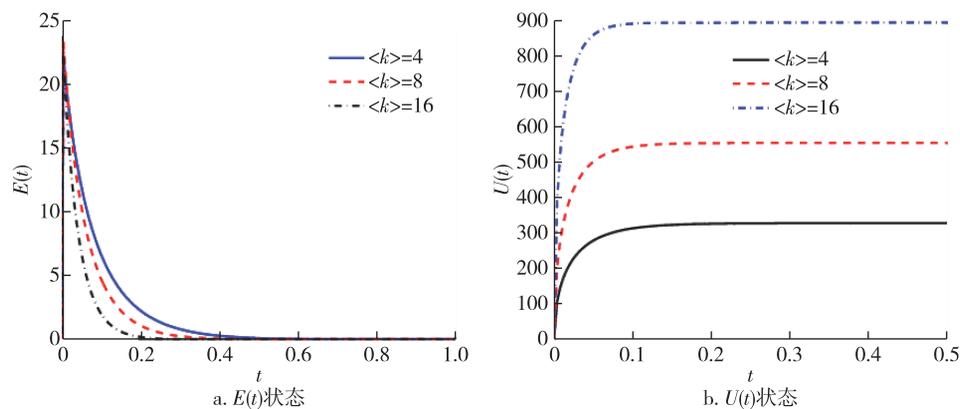


图3 当 $c_1 = 0.1, c_2 = 0.2, \theta_1 = 0.3, \theta_2 = 1.5$ 以及 $\langle k \rangle = 4, 8, 16$ 时总同步误差 $E(t)$ 和仿真能量消耗 $U(t)$ 的状态变化

Fig.3 (a) displays the state variations of the total synchronization error $E(t)$ and (b) shows the variance of energy cost $U(t)$ in simulation when $c_1 = 0.1, c_2 = 0.2, \theta_1 = 0.3, \theta_2 = 1.5$, and $\langle k \rangle = 4, 8, 16$ respectively

参考文献

References

- [1] Liu X Y, Yu W W, Cao J D, et al. Finite-time synchronization control of complex networks via non-smooth analysis [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2015, 9(8): 1245-1253
- [2] Zhou G Y, Li C R, Li T T, et al. Outer synchronization investigation between WS and NW small-world networks with different node numbers [J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2016, 457: 506-513
- [3] Ma Z C, Sun Y Z, Shi H J. Finite-time outer synchronization between two complex dynamical network with time delay and noise perturbation [J]. *Kybernetika*, 2016, 52(4): 607-628
- [4] Yang X S, Lam J, Ho D W C, et al. Fixed-time synchronization of complex networks with impulsive effects via nonchattering control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(11): 5511-5521
- [5] Cheng Y Y, Yang C, Wen G H, et al. Adaptive saturated finite-time control algorithm for buck-type DC-DC converter systems [J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2017, 31(10): 1428-1436
- [6] Jing T Y, Chen F Q, Li Q H. Finite-time mixed outer synchronization of complex networks with time-varying delay and unknown parameters [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, 39(23/24): 7734-7743
- [7] Wang J W, Ma Q H, Zeng L, et al. Mixed outer synchronization of coupled complex networks with time-varying coupling delay [J]. *Chaos: an Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2011, 21(1): 013121
- [8] He P, Ma S H, Fan T. Finite-time mixed outer synchronization of complex networks with coupling time-varying delay [J]. *Chaos: an Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2012, 22(4): 043151
- [9] Zheng S, Shao W. Mixed outer synchronization of dynamical networks with nonidentical nodes and output coupling [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 73(4): 2343-2352
- [10] Sun Y Z, Leng S Y, Lai Y C, et al. Closed-loop control of complex networks: a trade-off between time and energy [J]. *Physical Review Letters*, 2017, 119(19): 198301
- [11] Wei X Y, Yu W W, Wang H, et al. An observer-based fixed-time consensus control for second-order multi-agent systems with disturbances [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2019, 66(2): 247-251

Fixed-time mixed outer synchronization of complex networks

NIE Pingping¹ LI Wang¹ SHI Hongjun¹

¹ School of Mathematics, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221008

Abstract In this paper, the fixed-time mixed outer synchronization between two complex dynamical networks are studied. By using suitable controllers, we achieve the fixed-time mixed outer synchronization between two complex networks based on the fixed-time stability theory. Finally, the numerical simulations are performed to illustrate the effectiveness and feasibility of our proposed control approach.

Key words fixed-time; mixed outer synchronization; complex network