

卢凯文<sup>1</sup> 杨忠<sup>1</sup> 许昌亮<sup>1</sup> 徐浩<sup>1</sup> 陆可<sup>2,3</sup>

# 基于非线性分离的可倾转四旋翼 LQR 飞行控制研究

## 摘要

本文研究了一种能够独立控制位置和姿态的可倾转四旋翼飞行器,在建立了系统动力学模型的基础上,针对可倾转四旋翼飞行器系统存在的强输入非线性问题,采用了非线性分离策略,构造中间控制量,将该强非线性系统分离为线性动态环节和非线性静态环节,并仅针对线性动态环节设计了计算量小、易于硬件实现的线性二次型调节器(LQR),然后再通过反解输入非线性环节将中间控制量分配到实际的控制量——旋翼倾转角和电机转速。仿真实验结果表明,基于非线性分离策略设计的 LQR 飞行控制器能够实现对可倾转四旋翼稳定控制,很好地独立追踪位置和姿态期望。

## 关键词

四旋翼飞行器;可倾转旋翼;非线性分离;线性二次型调节器

中图分类号 TP242

文献标志码 A

收稿日期 2019-06-20

资助项目 国家自然科学基金(61473144);中国南方电网有限责任公司科技项目(066600K K52170074)

## 作者简介

卢凯文,男,硕士生,研究方向为飞行器建模与控制.lkw\_nuaa@163.com

杨忠(通信作者),男,博士,教授,博士生导师,研究方向为智能机器人及飞行器控制.yangzhong@nuaa.edu.cn

1 南京航空航天大学 自动化学院,南京,211106

2 东南大学 自动化学院,南京,210096;

3 安徽工业大学 管理科学与工程学院,马鞍山,243000

## 0 引言

多旋翼飞行器由于其机械结构简单、体积小、质量轻、稳定性高等特点,在军事及民用领域有着非常广泛的应用,引起了研究人员极大的兴趣<sup>[1]</sup>.在多旋翼无人机成功应用在航拍、测绘、植保和室内导航等场景的同时,许多研究机构也在探索新的应用方向——空中作业<sup>[2-3]</sup>,尝试无人机与环境进行物理接触的任务,包括抓取空中或地面目标<sup>[4]</sup>、采集树木标本<sup>[5]</sup>和安装传感器<sup>[6]</sup>等.新的应用场景也推动了无人机机械结构和驱动方式上的创新,涌现出很多新的构型,如涵道式无人机<sup>[7]</sup>、倾转旋翼-固定翼无人机<sup>[8]</sup>和可倾转多旋翼无人机<sup>[9]</sup>.

本文研究的可倾转四旋翼无人机即是上述新构型中的一种,与常规四旋翼区别在于其4个旋翼均可绕机臂轴相对机身旋转,从而由欠驱动系统转变为过驱动系统.相较于常规四旋翼仅能够同时控制4个独立的输出(位置和偏航角或姿态和高度),可倾转四旋翼可以实现位置和姿态全独立控制,这得益于通过旋翼的倾转能够形成任意方向的控制力和控制力矩<sup>[10]</sup>.但是同时,可倾转四旋翼系统的输入也由旋翼转速转变为旋翼转速和倾转角的耦合,最终形成的控制力和控制力矩是转速和倾转角的非线性组合,相比于常规四旋翼系统,其非线性更强、耦合程度更高,给控制器的设计带来更大困难<sup>[11]</sup>.

对于多旋翼飞行器的非线性问题,主要有两类解决办法:一种是将模型线性化处理设计控制器,如在平衡点线性化<sup>[12]</sup>和反馈线性化<sup>[13]</sup>;一种是直接针对非线性模型设计控制器,如非线性预测控制<sup>[14]</sup>.但是可倾转四旋翼系统主要是输入非线性,难以在平衡点线性化或进行反馈线性化.同时,非线性预测控制又存在计算量大、硬件实现难等特点<sup>[15]</sup>.对此,本文通过构造中间控制量,将可倾转四旋翼系统分离为线性动态环节和非线性静态环节,针对分离后的线性动态环节设计线性二次型调节器(Linear Quadratic Regulator, LQR),并通过解算非线性静态环节将中间控制量分配到实际的系统控制输入,即旋翼倾转角和电机转速.最后通过仿真实验,验证所设计控制器的有效性和控制性能.

## 1 可倾转四旋翼数学模型

### 1.1 坐标系定义与符号

本文研究的可倾转四旋翼飞行器(图1)可视为5部分刚体组成,

分别是机身和4个包含舵机与电机的倾转旋翼组件.倾转旋翼组件可相对机身转动,由与电机固连的舵机控制.

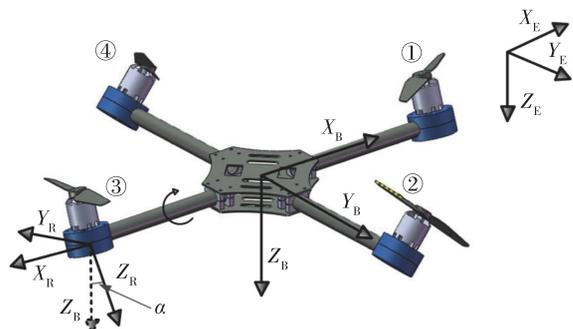


图1 可倾转四旋翼飞行器坐标系定义  
Fig. 1 Frames of quadrotor with titable-rotors

定义固连于地面的惯性坐标系(earth frame)  $E: \{O_E; X_E, Y_E, Z_E\}$ , 其Z轴指向下, X轴指向北;定义机体坐标系(body frame)固定于可倾转四旋翼质心处的  $B: \{O_B; X_B, Y_B, Z_B\}$ , 其Z轴同样指向下, X轴指向机体前方.同时定义  $R_i: \{O_{R_i}; X_{R_i}, Y_{R_i}, Z_{R_i}\}$  作为第*i*个旋翼坐标系(rotor frame), 其原点固定于倾转旋翼组件的质心, X轴由机体质心指向旋翼组件质心, 旋翼坐标系  $R_i$  可绕其X轴旋转, 旋转角为  $\alpha_i$ .

如无特殊说明,本文使用的符号遵循下述规则:以右上标表示引用符号所在的坐标系,如  $P^E$  表示飞行器质心位置在惯性坐标系下的描述;以  ${}^{(\cdot)}R_{(\cdot)} \in SO(3)$  表示不同坐标系间的旋转矩阵;以  $s_{(\cdot)}, c_{(\cdot)}, t_{(\cdot)}$  分别作为  $\sin(\cdot), \cos(\cdot), \tan(\cdot)$  的缩写;以  $R_X(\cdot), R_Y(\cdot), R_Z(\cdot)$  分别表示绕三轴的基本旋转.

$$R_X(\cdot) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\cdot) & -\sin(\cdot) \\ 0 & \sin(\cdot) & \cos(\cdot) \end{pmatrix},$$

$$R_Y(\cdot) = \begin{pmatrix} \cos(\cdot) & 0 & \sin(\cdot) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\cdot) & 0 & \cos(\cdot) \end{pmatrix},$$

$$R_Z(\cdot) = \begin{pmatrix} \cos(\cdot) & -\sin(\cdot) & 0 \\ \sin(\cdot) & \cos(\cdot) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

本文欧拉角采用Z-Y-X顺序,所以机体坐标系到惯性系的旋转矩阵为

$${}^E R_B = R_Z(\psi) R_Y(\theta) R_X(\phi).$$

${}^B R_{R_i}$  表示从旋翼坐标系到机体坐标系的旋转矩阵:

$${}^B R_{R_i} = R_Z\left((i-1)\frac{\pi}{2}\right) R_X(\alpha_i),$$

旋翼坐标系原点  $O_{R_i}$  在机体系中的坐标为

$$O_{R_i}^B = R_Z\left((i-1)\frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 4.$$

## 1.2 动力学建模

按照惯例,本文研究的可倾转四旋翼飞行器在惯性坐标系的质心位置和平动速度分别为  $P^E = [x \ y \ z]^T, V^E = [u \ v \ w]^T$ . 欧拉角为  $\Theta = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ , 机体系下的机体角速度为  $\Omega^B = [p \ q \ r]^T$ , 且有

$$\dot{\Theta} = \begin{bmatrix} 1 & t_\theta s_\phi & t_\theta c_\phi \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi/c_\theta & c_\phi/c_\theta \end{bmatrix} \dot{\Omega}^B,$$

特殊地,在平衡点处,即  $\Theta = [0 \ 0 \ 0]^T$  时,有

$$\dot{\Theta} = \dot{\Omega}^B.$$

为便于建立系统动力学模型,作如下假设:

- 1) 飞行器机体和倾转旋翼组件都是刚体无弹性形变;
- 2) 各旋翼旋转轴过旋翼、电机和舵机质心;
- 3) 无风条件下,旋翼产生的升力和反扭矩与旋翼转速平方成正比;
- 4) 机体运动过程中欧拉角、平动速度和角速度均较小;
- 5) 舵机的动态过程与旋翼的转速无关.

系统的刚体动力学模型可由牛顿-欧拉方程<sup>[16]</sup>得出,平动方程在惯性坐标系下描述,转动方程在机体系下描述:

$$\begin{bmatrix} m \dot{V}^E \\ I_B \dot{\Omega}^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega^B \times (I_B \Omega^B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ext}^E \\ M_{ext}^B \end{bmatrix}, \quad (1)$$

式中,  $m$  表示飞行器系统总质量,  $I_B = \text{diag}\{I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}\}$  是飞行器系统的惯性矩阵.

忽略空气阻力,对可倾转双旋翼飞行器进行受力分析,系统合外力由重力  $F_g^E$  和旋翼产生的推力  $F_i^E$  组成,即:

$$F_{ext}^E = m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + {}^E R_B \sum_{i=1}^4 {}^B R_{R_i} T_i, \quad T_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_i \end{bmatrix},$$

$$T_i = -k_f n_i^2, \quad k_f > 0, \quad (2)$$

式中,  $k_f$  是旋翼推力系数,  $n_i$  是 *i*-th 旋翼的转速.

合外力矩由4部分组成,包括旋翼推力产生的力矩  $M_l$ 、旋翼旋转反扭矩  $M_{anti}$ 、舵机反扭矩  $M_{\alpha, \beta}$  和

系统陀螺效应项  $M_{\text{gyro}}$ , 即:

$$\mathbf{M}^B = \mathbf{M}_1^B + \mathbf{M}_{\text{anti}}^B + \mathbf{M}_\alpha^B + \mathbf{M}_{\text{gyro}}^B. \quad (3)$$

以下对各部分力矩进行逐一分析.

旋翼推力产生的力矩在机体系下为

$$\mathbf{M}_1^B = \sum_{i=1}^4 (\mathbf{O}_{R_i}^B \times {}^B \mathbf{R}_{R_i} \mathbf{T}_i). \quad (4)$$

旋翼 1 顺时针旋转, 旋翼 2 逆时针旋转, 旋翼旋转变成的反扭力矩在旋翼坐标系的表示下为  $\mathbf{Q}_i$ , 则有:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{anti}}^B &= \sum_{i=1}^4 ({}^B \mathbf{R}_{R_i} \mathbf{Q}_i), \\ \mathbf{Q}_i &= [0 \quad 0 \quad Q_i]^T, \\ Q_i &= (-1)^{i-1} k_m n_i^2, \quad k_m > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

舵机反扭矩与倾转角加速度负相关:

$$\mathbf{M}_\alpha^B = \sum_{i=1}^4 \left( {}^B \mathbf{R}_{R_i} \begin{bmatrix} -J_\alpha \ddot{\alpha}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right). \quad (6)$$

系统的陀螺效应力矩可根据电机的角速度和旋翼的转速计算:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{gyro}}^B &= J_p \sum_{i=1}^4 \left( \left( \mathbf{O}^B + {}^B \mathbf{R}_{P_i} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \times (-1)^{f(i)} {}^B \mathbf{R}_{P_i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n_i \end{bmatrix} \right), \\ f(i) &= \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \\ 1, & i = 3, 4. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

联合式(1)—(7), 可倾转四旋翼刚体动力学模型为

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{m} \{ (s_\phi s_\varphi + c_\phi c_\varphi s_\theta) (T_1 c_{\alpha_1} + T_2 c_{\alpha_2} + T_3 c_{\alpha_3} + T_4 c_{\alpha_4}) + \\ & (c_\phi s_\varphi - c_\varphi s_\phi s_\theta) (T_1 s_{\alpha_1} - T_3 s_{\alpha_3}) + \\ & c_\varphi c_\theta (T_2 s_{\alpha_2} - T_4 s_{\alpha_4}) \}, \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{1}{m} \{ -(c_\varphi s_\phi - c_\phi s_\varphi s_\theta) (T_1 c_{\alpha_1} + T_2 c_{\alpha_2} + T_3 c_{\alpha_3} + T_4 c_{\alpha_4}) - \\ & (c_\phi c_\varphi + s_\varphi s_\phi s_\theta) (T_1 s_{\alpha_1} - T_3 s_{\alpha_3}) + \\ & c_\theta s_\varphi (T_2 s_{\alpha_2} - T_4 s_{\alpha_4}) \}, \end{aligned} \quad (8b)$$

$$\begin{aligned} \dot{w} &= g + \frac{1}{m} \{ c_\phi c_\theta (T_1 c_{\alpha_1} + T_2 c_{\alpha_2} + T_3 c_{\alpha_3} + T_4 c_{\alpha_4}) - \\ & c_\theta s_\phi (T_1 s_{\alpha_1} - T_3 s_{\alpha_3}) - s_\theta (T_2 s_{\alpha_2} - T_4 s_{\alpha_4}) \}, \end{aligned} \quad (8c)$$

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{1}{I_{xx}} \{ (I_{yy} - I_{zz}) qr + l (T_2 c_{\alpha_2} - T_4 c_{\alpha_4}) + \\ & Q_2 s_{\alpha_2} - Q_4 s_{\alpha_4} + J_\alpha (\ddot{\alpha}_3 - \ddot{\alpha}_1) + \\ & J_p [q (n_1 c_{\alpha_1} - n_3 c_{\alpha_3}) + r (n_1 s_{\alpha_1} + n_3 s_{\alpha_3}) + \\ & \omega_2 c_{\alpha_2} (\dot{\alpha}_2 + q) + \omega_4 c_{\alpha_4} (\dot{\alpha}_4 - q)] \}, \end{aligned} \quad (8d)$$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{1}{I_{yy}} \{ (I_{zz} - I_{xx}) pr + l (-T_1 c_{\alpha_1} + T_3 c_{\alpha_3}) - \\ & Q_1 s_{\alpha_1} + Q_3 s_{\alpha_3} + J_\alpha (\ddot{\alpha}_4 - \ddot{\alpha}_2) + \\ & J_p [p (n_4 c_{\alpha_4} - n_2 c_{\alpha_2}) + r (n_2 s_{\alpha_2} + \omega_4 s_{\alpha_4}) - \\ & n_1 c_{\alpha_1} (\dot{\alpha}_1 + p) - n_3 c_{\alpha_3} (\dot{\alpha}_3 - p)] \}, \end{aligned} \quad (8e)$$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{1}{I_{zz}} \{ (I_{xx} - I_{yy}) pq + l (-T_1 s_{\alpha_1} - T_2 s_{\alpha_2} - T_3 s_{\alpha_3} - T_4 s_{\alpha_4}) + \\ & Q_1 c_{\alpha_1} + Q_2 c_{\alpha_2} + Q_3 c_{\alpha_3} + Q_4 c_{\alpha_4} + \\ & J_p [-n_1 s_{\alpha_1} (\dot{\alpha}_1 + p) - n_2 s_{\alpha_2} (\dot{\alpha}_2 + q) + \\ & n_3 s_{\alpha_3} (\dot{\alpha}_3 - p) + n_4 s_{\alpha_4} (\dot{\alpha}_4 - q)] \}. \end{aligned} \quad (8f)$$

## 2 LQR 位姿控制器设计

### 2.1 系统非线性分离

常规四旋翼系统只有 4 个控制输入, 即 4 个旋翼转速  $n_i$ , 因而其仅能够追踪 4 个独立的输出, 所以目前研究者将四旋翼的飞行控制分为位置模式和姿态模式. 位置模式追踪三轴位置和偏航角, 姿态模式追踪三轴姿态角和高度. 可倾转四旋翼系统具有 8 个控制输入, 即 4 个旋翼转速  $n_i$  和 4 个旋翼倾转角  $\alpha_i$ , 属于输入冗余系统. 通过 4 个旋翼的倾转可以形成任意方向的控制力和控制力矩, 可以同时追踪位置期望和姿态期望.

但是旋翼倾转在改变推力方向的同时, 也致使系统的耦合性和非线性大幅度增强, 控制器的设计更为困难, 因而对式(8)所表征的系统动力学模型做简化解耦和线性化, 以使其便于控制器设计是非常必要的.

首先, 在简化的模型中忽略系统内部的陀螺效应和倾转反扭矩, 作为二阶扰动项处理. 简化后的动力学模型为

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{P}}^E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + \frac{1}{m} {}^E \mathbf{R}_B \sum_{i=1}^4 {}^B \mathbf{R}_{R_i} \mathbf{T}_i, \\ \ddot{\boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{I}_B^{-1} \left( \sum_{i=1}^4 (\mathbf{O}_{R_i}^B \times {}^B \mathbf{R}_{R_i} \mathbf{T}_i) + \sum_{i=1}^4 ({}^B \mathbf{R}_{R_i} \mathbf{Q}_i) \right). \end{cases} \quad (9)$$

其次, 假设舵机和电机内部实现了快速高增益控制器追踪期望旋转角度  $\alpha_i$  和转速  $n_i$ , 因而可以忽略舵机和电机的动态过程. 分析式(9)就可以发现该系统的非线性主要为输入非线性, 符合哈默斯坦模型的特征<sup>[17]</sup>, 可以通过构造中间控制量  $\mathbf{U}_F^E = [F_x \quad F_y \quad F_z]^T$  和  $\mathbf{U}_M^E = [M_x \quad M_y \quad M_z]^T$  将系统分解为线性的动态环节和非线性的静态环节. 针对动态环节设计控制器, 将控制器输出的中间控制量经非线性

性的静态环节映射到电机转速  $n_i$  和舵机倾转角  $\alpha_i$  .

线性的动态环节:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{V}}^E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \mathbf{U}_F^E, \\ \dot{\mathbf{Q}}^B = \mathbf{I}_B^{-1} \mathbf{U}_M^E. \end{cases} \quad (10)$$

非线性的静态环节:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{R}_B^E)^T \mathbf{U}_F^E \\ \mathbf{U}_M^B \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\alpha) \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \\ n_4^2 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & -k_f s_{\alpha_2} & 0 & -k_f s_{\alpha_4} \\ k_f s_{\alpha_1} & 0 & -k_f s_{\alpha_3} & 0 \\ -k_f c_{\alpha_1} & -k_f c_{\alpha_2} & -k_f c_{\alpha_3} & -k_f c_{\alpha_4} \\ 0 & N_{c,2} & 0 & N_{c,4} \\ N_{c,1} & 0 & N_{c,3} & 0 \\ N_{s,1} & N_{s,2} & N_{s,3} & N_{s,4} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

其中,  $N_{c,1} = lk_f c_{\alpha_1} + k_m s_{\alpha_1}, N_{s,1} = lk_f s_{\alpha_1} - k_m c_{\alpha_1}, N_{c,2} = -lk_f c_{\alpha_2} - k_m s_{\alpha_2}, N_{s,2} = lk_f s_{\alpha_2} - k_m c_{\alpha_2}, N_{c,3} = -lk_f c_{\alpha_3} + k_m s_{\alpha_3}, N_{s,3} = lk_f s_{\alpha_3} + k_m c_{\alpha_3}, N_{c,4} = lk_f c_{\alpha_4} + k_m s_{\alpha_4}, N_{s,4} = lk_f s_{\alpha_4} + k_m c_{\alpha_4}$ .

从中间控制量到电机转速和舵机倾转角的映射在飞行控制器的设计中,常被称为控制分配问题,  $\mathbf{A}(\alpha)$  即是控制分配矩阵.对于常规四旋翼而言,控制分配矩阵是常矩阵,但是在本文研究的可倾转四旋翼系统中,它是  $\alpha$  的函数.针对非线性控制分配问题,研究者们提出了非线性规划法和动态寻优法等<sup>[18]</sup>,但是这类方法都需要较多的计算时间和计算资源.文献<sup>[15]</sup>针对倾转旋翼提出一种构造虚拟量线性化的控制分配矩阵的方法,本文将该方法拓展到可倾转四旋翼飞行器.

在式(11)中引入  $N_{l,i} = n_i^2 s_{\alpha_i}, N_{v,i} = n_i^2 c_{\alpha_i}$ ,则有

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{R}_B^E)^T \mathbf{U}_F^E \\ \mathbf{U}_M^B \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = [N_{l,1}, N_{v,1}, \dots, N_{l,4}, N_{v,4}]^T. \quad (13)$$

不难发现,式(13)中的控制分配矩阵  $\mathbf{A}$  为常矩阵,与倾转角无关,且  $\mathbf{A}$  是行满秩矩阵,可通过求  $\mathbf{A}$  的 Moore-Penrose 伪逆计算虚拟量  $\mathbf{N}$ , 即:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^+ \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_B^E)^T \mathbf{U}_F^E \\ \mathbf{U}_M^B \end{bmatrix}, \quad (14)$$

从而可直接计算旋翼转速和倾转角:

$$n_i^2 = \sqrt{(N_{v,i}^2 + N_{l,i}^2)}, \quad \alpha_i = \text{atan } 2(N_{l,i}, N_{v,i}). \quad (15)$$

## 2.2 LQR 位姿控制设计

LQR 即线性二次型调节器,是一类具有广泛应用的最优调节器,其性能指标为对象状态和控制输入的二次型函数,最优解具有统一的解析表达式,容易求得闭环形式的最优控制,且易于工程实现<sup>[19]</sup>.分析式(10)对应的线性动态过程,易见位置和姿态的动态过程是解耦的,可以分别设计位置控制器和姿态控制器.

假设可倾转四旋翼稳定在某个设定的状态,给定位置期望  $\mathbf{P}_d^E = [x_d \ y_d \ z_d]^T$ ,期望输入  $(\mathbf{U}_F^E)_d = [0 \ 0 \ mg]^T$ ,定义如下状态量、输入量和输出量:

$$\begin{cases} \mathbf{X}_p(t) = [x - x_d, (x - x_d)', y - y_d, (y - y_d)', \\ z - z_d, (z - z_d)']^T, \\ \Delta \mathbf{U}_F^E(t) = \mathbf{U}_F^E - (\mathbf{U}_F^E)_d = [F_x \ F_y \ F_z - mg]^T, \\ \Delta \mathbf{P}^E(t) = [x - x_d \ y - y_d \ z - z_d]^T, \end{cases} \quad (16)$$

由此可得位置控制模型的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_p(t) = \mathbf{A}_p \mathbf{X}_p(t) + \mathbf{B}_p \Delta \mathbf{U}_F^E(t), \\ \Delta \mathbf{P}(t) = \mathbf{C}_p \mathbf{X}_p(t), \end{cases} \quad (17)$$

其中,

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/m \end{bmatrix}. \quad (18)$$

同样地,给定姿态期望  $\boldsymbol{\Theta}_d = [\phi_d \ \theta_d \ \psi_d]^T$ ,期望输入  $(\mathbf{U}_M^B)_d = \mathbf{O}_{3 \times 1}$ ,定义如下状态量、输入量和输出量:

$$\begin{cases} \mathbf{X}_\theta(t) = [\phi - \phi_d, (\phi - \phi_d)', \theta - \theta_d, (\theta - \theta_d)', \\ \psi - \psi_d, (\psi - \psi_d)']^T, \\ \Delta \mathbf{U}_M^B(t) = \mathbf{U}_M^B - (\mathbf{U}_M^B)_d = [M_x \ M_y \ M_z]^T, \\ \Delta \boldsymbol{\Theta}(t) = [\phi - \phi_d \ \theta - \theta_d \ \psi - \psi_d]^T, \end{cases} \quad (19)$$

由此可得位置控制模型的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_{\theta}(t) = \mathbf{A}_{\theta}\mathbf{X}_{\theta}(t) + \mathbf{B}_{\theta}\Delta\mathbf{U}_M^B(t), \\ \Delta\boldsymbol{\Theta}(t) = \mathbf{C}_{\theta}\mathbf{X}_{\theta}(t), \end{cases} \quad (20)$$

其中,

$$\mathbf{A}_{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

### 2.3 最优控制律求解

定义 LQR 的性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \int [X^T(t)QX(t) + \Delta U^T(t)R\Delta U(t)] dt, \quad (22)$$

其中,  $Q$  是状态变量的加权矩阵,为实对称半正定矩阵,  $R$  是输入量的加权矩阵,为实对称正定矩阵.求解二次型最优控制即是寻找状态反馈控制律  $\Delta U(t)$  使得  $J$  取得极小值.最常用的解法是利用 Riccati 方程<sup>[20]</sup>:

$$\dot{\mathbf{K}} + \mathbf{Q} - \mathbf{K}^T\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}^T + \mathbf{K}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{K}^T = 0. \quad (23)$$

LQR 最优控制律为

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{U}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}\mathbf{X}(t), \\ \mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_d + \Delta\mathbf{U}(t). \end{cases} \quad (24)$$

经过多次尝试后,得到使系统性能良好的位置

控制器和姿态控制器  $Q$  和  $R$  分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_p &= \text{diag}\{81.7, 12.4, 81.7, 12.4, 81.7, 12.4\}, \\ \mathbf{R}_p &= \text{diag}\{1, 1, 1\}, \\ \mathbf{Q}_{\theta} &= \text{diag}\{15, 2.8, 15, 2.8, 15, 2.8\}, \\ \mathbf{R}_{\theta} &= \text{diag}\{1, 1, 1\}. \end{aligned} \quad (25)$$

### 3 仿真实验

在 MATLAB 的 Simulink 模块中搭建仿真实验环境(图 2),验证所设计的位置姿态控制器的性能,可倾转四旋翼的物理参数如表 1 所示.仿真实验中,位置的单位为 m,姿态的单位为( $^{\circ}$ ).

表 1 系统物理参数

符号	物理含义	数值	单位
$m$	可倾转四旋翼质量	1.38	mg
$g$	重力加速度	9.81	$m \cdot s^{-2}$
$I_{xx}$	$x$ 轴惯性张量	0.029 8	$kg \cdot m^2$
$I_{yy}$	$y$ 轴惯性张量	0.029 8	$kg \cdot m^2$
$I_{zz}$	$z$ 轴惯性张量	0.571	$kg \cdot m^2$
$k_f$	升力系数	$3.10 \times 10^{-5}$	
$k_m$	阻力系数	$5.61 \times 10^{-7}$	
$J_{\alpha}$	倾转轴转动惯量	$1.50 \times 10^{-5}$	$kg \cdot m^2$
$J_p$	陀螺力矩系数	$6.00 \times 10^{-5}$	

#### 3.1 稳定控制实验

首先验证 LQR 控制器对可倾转四旋翼飞行器的稳定控制效果.设定飞行器初始位置为  $\mathbf{P}_0^E = [0 \ 0 \ 0]^T$ ,初始姿态为  $\boldsymbol{\Theta}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ ,控制目标是让飞行器稳定在  $\mathbf{P}_d^E = [3 \ 2 \ -4]^T$ ,  $\boldsymbol{\Theta}_d = [10 \ 15 \ 20]^T$ ,仿真结果如图 3 所示.

从图 3 中可以看出,位置和姿态角很平稳地达到了期望值.调节过程中,没有任何震荡,也几乎没

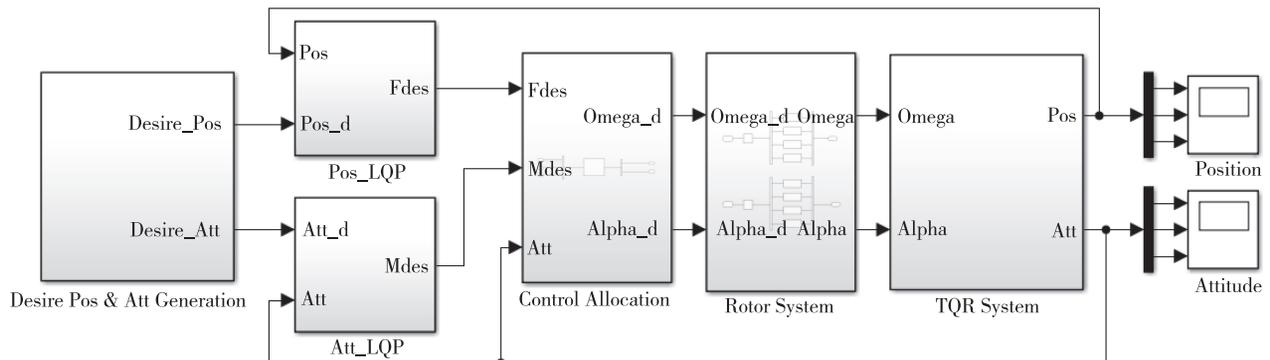


图 2 LQR 最优控制系统仿真结构

Fig. 2 Structure diagram of linear quadratic regulator simulation

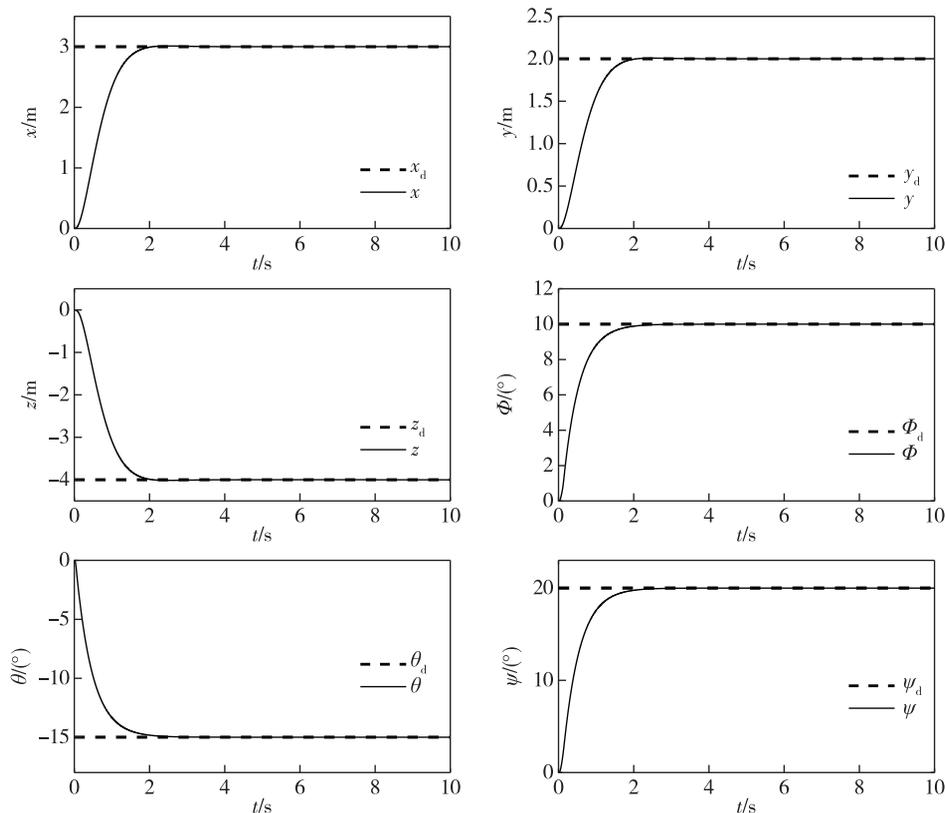


图3 稳定控制实验位置和姿态响应曲线

Fig. 3 Response curves of position and attitude in stability experiment

有超调,可以看出 LQR 控制器对于可倾转四旋翼飞行器的稳定控制效果非常理想,能够在 2 s 左右达到目标位置且达到目标姿态,并在目标位置以目标姿态悬停.

值得注意的是,常规四旋翼仅能够在无滚转无俯仰的情况下保持悬停,当存在滚转角或俯仰角时,旋翼的推力合力在水平方向上产生分力,使得旋翼水平运动.可倾转四旋翼飞行器能够以非零滚转角非零姿态角悬停,得益于旋翼的倾转可以形成任意方向的控制力和控制力矩,即使存在滚转角和俯仰角,仍可以控制旋翼推力合力垂直向上,与重力平衡.

### 3.2 位置姿态独立追踪实验

不同于常规四旋翼,可倾转四旋翼飞行器能够实现对于飞行器位置和姿态的独立控制.本文分别设计固定姿态的位置追踪实验和定点悬停的姿态追踪实验,验证 LQR 控制器独立控制可倾转四旋翼飞行器位置和姿态的能力.

1) 设定飞行器初始状态,  $\mathbf{P}_0^E = [0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\Theta_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ , 在 5 s 内达到 3 m 高度,并控制

$\phi = 10^\circ, \theta = 5^\circ$ . 5 s 开始,追踪如式(26)的位置期望,位置响应如图 4a 所示,图 4b 为同步的姿态响应曲线.

$$\mathbf{P}_d^E = \left[ 5\sin\left(\frac{\pi}{10}(t-5)\right), 5\cos\left(\frac{\pi}{10}(t-5)\right) - 5, -3 \right]^T. \quad (26)$$

2) 设定飞行器初始状态,  $\mathbf{P}_0^E = [0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\Theta_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ , 追踪方波姿态期望,同时定点悬停在  $\mathbf{P}_d^E = [1 \ 2 \ -3]^T$ , 系统的输出曲线如图 5 所示.

从图 4 和图 5 所示的实验结果不难看出,在本文设计的 LQR 控制器的调节下,可倾转四旋翼能够很好地跟踪三角函数形式的位置期望和方波形式的姿态期望,跟踪迅速、控制稳定,且没有振荡.此外在做位置追踪时,飞行器能够保持姿态稳定在给定姿态,同样,在定点悬停时,依然能够追踪给定姿态,可见,LQR 控制器具有很好地控制可倾转四旋翼飞行器位置和姿态的能力.

## 4 结束语

本文研究了具有可倾转旋翼的四旋翼飞行器,

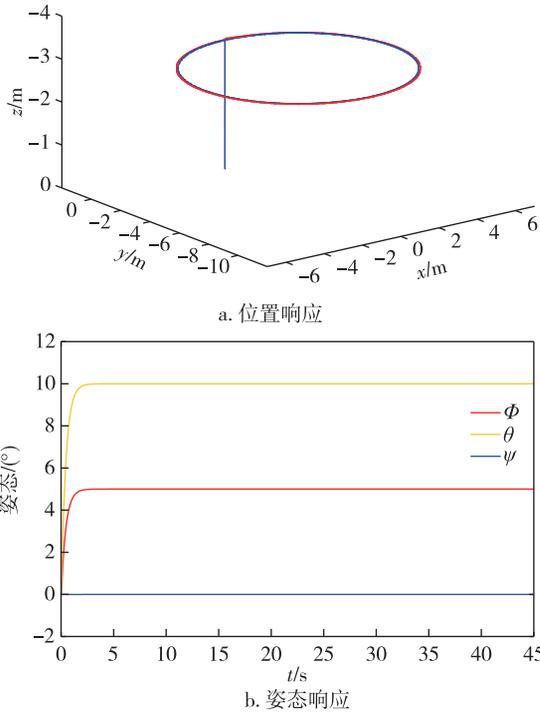


图 4 固定姿态的位置追踪实验响应曲线

Fig. 4 Response curves of position tracking under static attitude

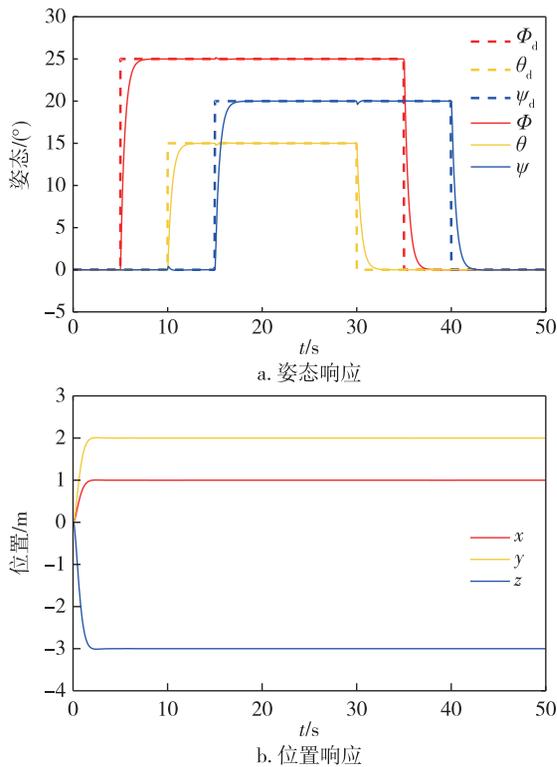


图 5 定点悬停的姿态追踪实验响应曲线

Fig. 5 Response curves of attitude tracking without position change

建立了系统的动力学模型.针对由于系统模型存在强非线性和耦合性而难以设计控制器的问题,在合理简化的基础上,通过构造中间控制量将系统分离为线性动态环节和非线性静态环节,并设计 LQR 最优控制器控制分离后的线性动态环节,通过解算非线性静态过程将中间控制量映射到实际控制量.仿真结果表明,基于分离后的线性动态环节设计的 LQR 控制器具有很好地控制可倾转飞行器位置和姿态的效果.

参考文献

References

[ 1 ] 刘一莎,杨晟萱,王伟.四旋翼飞行器的自抗扰飞行控制方法[J].控制理论与应用,2015,32(10):1351-1360  
LIU Yisha, YANG Shengxuan, WANG Wei. An active disturbance rejection flight control method for quad-rotor unmanned aerial vehicles [ J ]. Control Theory & Applications, 2015, 32( 10 ) : 1351-1360

[ 2 ] Bonyan K H, Janabi-Sharifi F, Abdessameud A. Aerial manipulation: a literature survey[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2018, 107: 221-235

[ 3 ] 杨斌,何玉庆,韩建达,等.作业型飞行机器人研究现状与展望[J].机器人,2015,37(5):628-640  
YANG Bin, HE Yuqing, HAN Jianda, et al. Survey on aerial manipulator systems [ J ]. Robot, 2015, 37 ( 5 ) : 628-640

[ 4 ] Gawel A, Kamel M, Novkovic T, et al. Aerial picking and delivery of magnetic objects with MAVs [ C ] // International Conference on Robotics and Automation, 2017: 5746-5752

[ 5 ] Kutia J R, Stol K A, Xu W L. Aerial manipulator interactions with trees for canopy sampling [ J ]. ASME Transactions on Mechatronics, 2018, 23 ( 4 ) : 1740-1749

[ 6 ] Orsag M, Korpela C M, Bogdan S, et al. Hybrid adaptive control for aerial manipulation [ J ]. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 2014, 73 ( 1/2/3/4 ) : 693-707

[ 7 ] Muehlebach M, D'Andrea R. The flying platform: a testbed for ducted fan actuation and control design [ J ]. Mechatronics, 2017, 42: 52-68

[ 8 ] Chowdhury A B, Kulhare A, Raina G. Back-stepping control strategy for stabilization of a tilt-rotor UAV [ C ] // Control & Decision Conference. IEEE, 2012

[ 9 ] Ryll M, Heinrich H B, Giordano P R. First flight tests for a quadrotor UAV with tilting propellers [ C ] // IEEE International Conference on Robotics & Automation. IEEE, 2013: 295-302

[ 10 ] Ryll M, Bulthoff H H, Giordano P R. Modeling and control of a quadrotor UAV with tilting propellers [ C ] // IEEE International Conference on Robotics & Automation. IEEE, 2012: 4606-4613

[ 11 ] Scholz G, Trommer G F. Model based control of a quadrotor with tiltable rotors [ J ]. Gyroscopy and Navigation, 2016, 7 ( 1 ) : 72-81

[ 12 ] Hua M D, Hamel T, Morin P, et al. Introduction to

- feedback control of underactuated VTOLvehicles: a review of basic control design ideas and principles [J]. IEEE Control Systems,2013,33(1):61-75
- [13] Voos H . Nonlinear control of a quadrotor micro-UAV using feedback-linearization [ C ] // IEEE International Conference on Mechatronics.IEEE,2009
- [14] Kamel M, Alexis K, Achtelik M, et al. Fast nonlinear model predictive control for multicopter attitude tracking on SO(3) [ C ] //2015 IEEE Conference on Control Applications(CCA).IEEE,2015
- [15] Kamel M, Verling S, Elkhatib O, et al.The voliro omniorientational hexacopter;an agile and maneuverable tilttable-rotor aerial vehicle [ J ]. IEEE Robotics & Automation Magazine,2018,25(4):34-44
- [16] Ryll M, Bicego D, Franchi A . Modeling and control of FAST-Hex;a fully-actuated by synchronized-tilting hexarotor[ C ] //2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems ( IROS ).IEEE,2016
- [17] 席裕庚.预测控制[ M ].北京:国防工业出版社,2013
- XI Yugeng.Predictive control [ M ]. Beijing: National Defence Industry Press,2013
- [18] Johansen T A, Fossen T I. Control allocation: a survey [ J ]. Automatica,2013,49(5):1087-1103
- [19] 曾小勇,彭辉,吴军.四旋翼飞行器的建模与姿态控制 [ J ].中南大学学报(自然科学版),2013,44(9):3693-3700
- ZENG Xiaoyong,PENG Hui,WU Jun.Modeling and attitude control for a quad-rotor aircraft [ J ]. Journal of Central South University ( Science and Technology ), 2013,44(9):3693-3700
- [20] Bouabdallah S, André N, Siegwart R .PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor[ C ] // IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots & Systems.IEEE,2004

## LQR control of quadrotor with tilttable-rotors based on nonlinear separation strategy

LU Kaiwen<sup>1</sup> YANG Zhong<sup>1</sup> XU Changliang<sup>1</sup> XU Hao<sup>1</sup> LU Ke<sup>2,3</sup>

1 College of Automation Engineering,Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,Nanjing,Jiangsu 211106

2 School of Automation,Southeast University,Nanjing 210096

3 School of Management Science and Engineering, Anhui University of Technology, Maanshan 243000

**Abstract** We performed research on a quadrotor with tilttable-rotors, which has full controllability over the position and orientation, and established its dynamics system. To handle the system's strong nonlinearity problem, a nonlinear separation strategy was utilized to decompose the nonlinear system into a linear dynamic subsystem and a nonlinear static system by constructing intermediate control. Subsequently, linear quadratic regulator with small calculation and easy hardware implementation was designed only for linear dynamic subsystem while real control including tilting angle and motor speed was mapped from intermediate control by calculating the input nonlinear static subsystem. Simulation results illustrate that LQR flight controller based on nonlinear separation strategy not only performs well under a stable control, but also in independently tracking control of position and orientation.

**Key words** quadrotor; tilttable-rotors; nonlinear separation; linear quadratic regulator