



# 具有异步控制器的离散马尔可夫跳变 Lur'e 系统的稳定性和 $\ell_2$ 增益性能分析

## 摘要

本文研究了一类具有异步控制器的离散马尔可夫 Lur'e 跳变系统的稳定性及  $\ell_2$  增益性能.通过引入隐马尔可夫模型(HMM)来描述所设计的控制器和原始系统之间出现的异步现象.利用线性矩阵不等式(LMI)方法分析了闭环系统的稳定性和  $\ell_2$  增益性能.然后提出了一个充分条件使得闭环系统随机稳定,并使得从扰动到系统输出的  $\ell_2$  增益达到最小.同时,通过求解给定条件来设计一个由线性状态反馈和扇形有界非线性输出反馈组成的异步控制器.最后,给出了一个数值仿真例子来验证所提方法的有效性.

## 关键词

马尔可夫跳变系统;Lur'e 系统; $\ell_2$  增益;随机稳定性;异步控制器

中图分类号 TP273

文献标志码 A

收稿日期 2018-09-25

作者简介

陶跃跃,男,硕士生,研究方向为马尔可夫跳变系统.taoyueyue54@zju.edu.cn

## 0 引言

作为一类重要的随机切换系统,马尔可夫跳跃系统(MJSs)因其对有参数或系统结构突然变化的系统建模中的强大能力而备受关注,例如,环境干扰、执行器故障和子系统中的互连变化等.在过去的几十年中,大量用于稳定性分析和控制器/滤波器设计的工作已经发表,如文献[1-6].

在大多数现有工作中,通常假设控制器/滤波器能够获得全部的系统模态信息,因此控制器/滤波器模态可以与系统模态同步运行.不幸的是,在实际应用中,由于一些意想不到的因素,例如时间延迟、网络控制系统中的丢包及量化等,上述理想假设很难被满足.为了克服这个严格的限制,学者们提出了两种研究方法,分别被称为模态非依赖方法和异步方法.在模态非依赖方法<sup>[6-7]</sup>中,控制器的模态是与系统模态相互独立的,也就是说,系统模态不会影响到控制器的模态.但是这样也使得系统模态信息未被有效利用,可能会导致一些保守性.因此,利用异步方法来研究马尔可夫跳变系统的控制/滤波问题在近几年得到了更多的关注.文献[8]针对一类具有随机出现传感器非线性的离散马尔可夫跳变系统,使用一个分段齐次马尔可夫链设计了一个异步  $\ell_2$ - $\ell_\infty$  滤波器,使得系统随机稳定.文献[9]又采用一种新的隐马尔可夫模型设计了一个异步控制器,来确保系统的被动性能;同时,文中提出的方法覆盖了同步的情况.近年来,借助这种隐马尔可夫模型,许多学者针对异步控制器/滤波器设计问题进行了大量的研究.例如,文献[10]设计了一个针对网络控制系统的异步滤波器.文献[11]和[12]分别对离散、连续马尔可夫跳变系统的异步滤波器设计问题进行了讨论.文献[13]则针对一类系统信息部分已知的离散马尔可夫跳变系统,设计了一个异步控制器,并保证系统是随机稳定的.

非线性是一种在实际控制系统中普遍存在的现象.在众多非线性系统模型中,Lur'e 系统<sup>[14]</sup>在近年来受到了许多关注.该系统由一个线性部分和一个扇形有界的非线性组成.针对 Lur'e 系统的稳定性及控制器/滤波器设计问题,学者们已经进行了大量的研究.文献[15]和[16]分别在离散时域和连续时域讨论了具有饱和和扇形有界的非线性 Lur'e 系统的绝对稳定性问题.他们采用了一种由线性状态反馈和

<sup>1</sup> 浙江大学 智能控制研究所,杭州,310027

扇形有界的非线性输出反馈组成的控制器,大大提高了系统设计的灵活性,同时降低了结论的保守性,这一控制器结构被其他研究者大量采用.文献[17]针对一类系统模态转移矩阵部分已知且具有控制器饱和的离散时域非线性马尔可夫跳变系统,采用随机二次型李雅普诺夫泛函研究了系统稳定性和 $\ell_2$ 增益问题.随后,文献[18]采用了一种新型的李雅普诺夫泛函,即Lur'e型李雅普诺夫泛函,该泛函包含了文献[17]中的随机二次型部分,同时增加了随机扇形有界的非线性部分,使得所得结果的保守性更低.文献[19]采用了随机Lur'e型李雅普诺夫泛函研究了离散系统的随机稳定性问题.迄今为止,离散马尔可夫Lur'e跳变系统的异步控制器设计问题仍然未见相关报道,这促使我们进行现在的工作.

本文研究了一类具有异步控制器的离散马尔可夫Lur'e跳变系统的随机稳定性及 $\ell_2$ 增益最优化问题.本文的主要贡献如下:1)根据隐马尔可夫模型,设计了一个包含线性状态反馈和扇形有界的非线性输出反馈的控制器;2)给出了一个LMI形式的且使得系统具有最小 $\ell_2$ 增益性能的充分条件.本文以下面的方式组织:第一部分介绍了系统模型,并给出了一些需要的预备知识;第二部分首先分析了待分析系统的随机稳定性问题,然后设计了一个控制器来确保系统的随机稳定性且使得系统具有最小 $\ell_2$ 增益;第三部分提供了一个数值仿真例子来阐述本文所提方法的有效性;第四部分为总结.

## 1 预备知识

在一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ,考虑如下非线性离散马尔可夫跳变系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_{r(k)}\mathbf{x}_k + \mathbf{F}_{r(k)}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}_k) + \mathbf{B}_{r(k)}\mathbf{u}_k + \mathbf{E}_{r(k)}^x\mathbf{w}_k, \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}_{r(k)}\mathbf{x}_k, \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{C}_{r(k)}^z\mathbf{x}_k + \mathbf{G}_{r(k)}^z\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}_k) + \mathbf{D}_{r(k)}^z\mathbf{u}_k + \mathbf{E}_{r(k)}^z\mathbf{w}_k, \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^{n_x}$ 代表系统状态向量, $\mathbf{u}_k \in \mathbf{R}^{n_u}$ 代表控制输入向量, $\mathbf{y}_k \in \mathbf{R}^{n_y}$ 是一个涉及非线性的系统输出向量, $\mathbf{z}_k \in \mathbf{R}^{n_z}$ 表示控制输出向量, $\mathbf{w}_k \in \mathbf{R}^{n_w}$ 代表外部扰动向量. $\mathbf{A}_{r(k)}, \mathbf{F}_{r(k)}, \mathbf{B}_{r(k)}, \mathbf{E}_{r(k)}^x, \mathbf{C}_{r(k)}^z, \mathbf{G}_{r(k)}^z, \mathbf{D}_{r(k)}^z$ 及 $\mathbf{E}_{r(k)}^z$ 是适当维度且已知的时变系统矩阵. $\{r(k), k \geq 0\}$ 是一个马尔可夫链,在正整数集 $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ 中取值,具有如下模态转移概率(TPs):

$$\Pr\{r(k+1)=j \mid r(k)=i\} = \pi_{ij}, \quad (2)$$

其中,对于所有 $i, j \in \mathcal{N}, \pi_{ij} \in [0, 1]$ ,并且对于每个

模式 $i, \sum_{j=1}^N \pi_{ij} = 1$ .在时刻 $i$ ,系统(1)中的系统矩阵可以表示为 $\mathbf{A}_i, \mathbf{F}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{E}_i^x, \mathbf{C}_i^z, \mathbf{G}_i^z, \mathbf{D}_i^z$ 和 $\mathbf{E}_i^z$ ,并且相关的转移概率矩阵被描述为 $\boldsymbol{\Pi} = \{\pi_{ij}\}$ .

**假设1** 非线性 $\boldsymbol{\varphi}(\cdot): \mathbf{R}^{n_y} \rightarrow \mathbf{R}^{n_y}$ 满足一个扇形有界条件,如果

1)  $\boldsymbol{\varphi}(0) = 0$ 且

2) 存在对角正定矩阵 $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbf{R}^{n_y \times n_y}$ 使得

$$\boldsymbol{\varphi}_{(v)}(\mathbf{y})[\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{y}]_{(v)} \leq 0. \quad (3)$$

根据式(3),可以得到

$$\text{SC}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\Lambda}) := \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{y})\boldsymbol{\Lambda}[\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{y}] \leq 0, \quad (4)$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是任何对角半正定矩阵, $\boldsymbol{\Omega}$ 由系统设计者预先给定,可以认为是已知的.所以

$$[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{y}]_{(v)}[\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{y}]_{(v)} \leq 0, \quad (5)$$

进一步可以得到

$$0 \leq \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{y})\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) \leq \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{y})\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{y} \leq \mathbf{y}^T\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{y}. \quad (6)$$

**定义1** 当 $\mathbf{w}(k) \equiv 0$ 时,如果对任意初始条件 $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}_0$ ,下面的公式成立,则系统(1)被认为是局部随机稳定的:

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\|\mathbf{x}_k\|_2^2] < \infty, \quad (7)$$

其中,集合 $\mathcal{D}_0$ 称为原始系统的随机稳定域.

接下来,定义 $\ell_2$ 诱导的范数及一类具有有界能量的外部扰动.

**定义2** 对于一个正标量 $\zeta$ ,集合 $\mathcal{W}_\zeta$ 定义如下:

$$\mathcal{W}_\zeta := \{\mathbf{w} = \{\mathbf{w}_k\}; \|\mathbf{w}\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\|\mathbf{w}_k\|_2^2] < \zeta\}. \quad (8)$$

对任意的 $\mathbf{w} \in \mathcal{W}_\zeta$ ,如果下面的公式成立:

$$\|\mathbf{z}\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\|\mathbf{z}_k\|_2^2] \leq \gamma^2 \|\mathbf{w}\|_2^2, \quad (9)$$

则称在零初始状态下,外部扰动 $\mathbf{w} = \{\mathbf{w}_k\}$ 与控制输出 $\mathbf{z} = \{\mathbf{z}_k\}$ 之间的有限 $\ell_2$ 推导增益小于等于 $\gamma$ .

本文考虑如下形式的异步控制器:

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{K}_{\sigma(k)}\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\Gamma}_{\sigma(k)}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}_k), \quad (10)$$

其中, $\mathbf{K}_{\sigma(k)} \in \mathbf{N}^{n_u \times n_x}$ 是一个时变控制器增益矩阵, $\boldsymbol{\Gamma}_{\sigma(k)} \in \mathbf{N}^{n_u \times n_y}$ 是一个时变非线性输出反馈增益矩阵.参数 $\sigma(k)$ 用来表示控制器模态. $\{\sigma(k), k \geq 0\}$ 是一个随机跳变过程,在一个有限集合 $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, M\}$ 中取值,且满足条件概率矩阵 $\boldsymbol{\Phi} = \{\mu_{i\phi}\}$ ,该矩阵的模态转移矩阵如下:

$$\Pr\{\sigma(k) = \phi \mid r(k) = i\} = \mu_{i\phi}, \quad (11)$$

其中,对任意的 $i \in \mathcal{N}, \phi \in \mathcal{M}$ ,有 $\mu_{i\phi} \in [0, 1]$ ,且对

任意的模态 $i$ 有 $\sum_{\phi=1}^M \mu_{i\phi} = 1$ .

**注 1** 与文献[9]类似,本文引入隐马尔可夫模型来描述在设计控制器和原始系统之间出现的异步现象.不难发现,这里设计的控制器由线性状态反馈和非线性输出反馈组成,这个非线性满足假设 1 中描述的扇形有界条件.与文献[17]和[19]中采用的同步控制器不同,本文设计的控制器是一个异步控制器,这意味着控制器模态和系统模态在某些时刻可能是不同的.显然,当条件概率矩阵  $\Phi$  是单位矩阵时,控制器模态将与系统模态一样,即异步控制器成为同步控制器,这意味着本文考虑的异步控制器将同步控制器作为一种特殊情况.

结合系统(1)和异步控制器(10),有以下闭环系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \bar{\mathbf{A}}_{i\theta} \mathbf{x}_k + \bar{\mathbf{F}}_{i\theta} \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{C}_i \mathbf{x}_k) + \mathbf{E}_i^x \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{z}_k = \bar{\mathbf{C}}_{i\theta}^z \mathbf{x}_k + \bar{\mathbf{G}}_{i\theta}^z \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{C}_i \mathbf{x}_k) + \mathbf{E}_i^z \mathbf{w}_k, \end{cases} \quad (12)$$

其中,对任意的  $i \in \mathcal{N}, \phi \in \mathcal{M}$ ,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}_{i\phi} &= \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_\phi, & \bar{\mathbf{F}}_{i\phi} &= \mathbf{F}_i + \mathbf{B}_i \boldsymbol{\Gamma}_\phi, \\ \bar{\mathbf{C}}_{i\phi}^z &= \mathbf{C}_i^z + \mathbf{D}_i^z \mathbf{K}_\phi, & \bar{\mathbf{G}}_{i\phi}^z &= \mathbf{G}_i^z + \mathbf{D}_i^z \boldsymbol{\Gamma}_\phi. \end{aligned}$$

## 2 主要成果

### 2.1 随机稳定性分析

本小节重点关注闭环系统(12)的随机稳定性分析,将给出一个 LMI 形式的充分条件,以保证所考虑的 Lur'e 系统是随机稳定的.

**定理 1** 考虑闭环控制系统(12),对于任意的  $i \in \mathcal{N}$  及  $\phi \in \mathcal{M}$ ,如果存在一个正定矩阵  $\bar{\mathbf{P}}_i \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}, \mathbf{R}_{i\phi} \in \mathbf{R}^{(n_x+n_y) \times (n_x+n_y)}$ ,矩阵  $\mathbf{K}_\phi \in \mathbf{R}^{n_u \times n_x}, \boldsymbol{\Gamma}_\phi \in \mathbf{R}^{n_u \times n_y}$ ,及半正定矩阵  $\mathbf{T}_i \in \mathbf{R}^{n_y}$  使得下面的不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{i\theta} & \mathcal{H}_{i\phi} \\ * & \mathcal{P}_i \end{bmatrix} < 0, \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{i\phi} & \mathcal{N}_{i\phi} \\ * & \mathcal{L}_{i\phi} \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{i\phi} &= [\sqrt{u_{i1}} \mathbf{W}_{i1}, \sqrt{u_{i2}} \mathbf{W}_{i2}, \dots, \sqrt{u_{iM}} \mathbf{W}_{iM}], \\ \mathcal{P}_i &= \text{diag}\{\bar{\mathbf{P}}_1, -\bar{\mathbf{P}}_2, \dots, -\bar{\mathbf{P}}_N\}, \\ \mathcal{L}_{i\phi} &= \text{diag}\{-\mathbf{L}_{i1}, -\mathbf{L}_{i2}, \dots, -\mathbf{L}_{iM}\}, \\ \mathcal{H}_{i\phi} &= \begin{bmatrix} \sqrt{\pi_{i1}} \hat{\mathbf{A}}_{i\phi} \\ \sqrt{\pi_{i2}} \hat{\mathbf{A}}_{i\phi} \\ \vdots \\ \sqrt{\pi_{iN}} \hat{\mathbf{A}}_{i\phi} \end{bmatrix}, & \hat{\mathbf{A}}_{i\theta} &= [\bar{\mathbf{A}}_{i\theta}, \bar{\mathbf{F}}_{i\theta}], \end{aligned}$$

$$\mathbf{W}_{i\phi} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_i & 0 \\ * & \mathbf{R}_{i1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_{i\phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x} & 0 \\ * & \mathbf{R}_{i1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{i\theta} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{n_x} & \mathbf{C}_i^T \boldsymbol{\Omega}_i \mathbf{T}_i \\ * & -2\mathbf{T}_i \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{L}_{i\phi} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{P}}_i & 0 \\ * & \mathbf{H}_{i\phi} \end{bmatrix},$$

那么,闭环控制系统(12)是随机稳定的.

**证明** 首先选择如下李雅普诺夫函数:

$$V(k, r(k), \mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_k^T \mathbf{P}_{r(k)} \mathbf{x}_k, \quad (15)$$

其中  $\mathbf{P}_{r(k)} = \bar{\mathbf{P}}_{r(k)}^{-1}$ .

$$\begin{aligned} \text{令 } \mathbb{E}\{\Delta V(k)\} &= \mathbb{E}\{V(k+1, r(k+1) = j, \mathbf{x}_{k+1}) | \\ r(k) = i, \mathbf{x}_k\} &- V(k, i, \mathbf{x}_k), \end{aligned}$$

不难发现

$$\mathbb{E}\{\Delta V(k)\} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{X}_i \mathbf{x}_{k+1}\} - V(k, \mathbf{x}_k, i), \quad (16)$$

其中  $\mathbf{X}_i = \sum_{j=1}^N \pi_{ij} \mathbf{P}_j$ .由系统方程(12)可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{X}_i \mathbf{x}_{k+1}\} &= \sum_{\phi=1}^M \mathbf{u}_{i\phi} \hat{\mathbf{x}}_k^T \hat{\mathbf{A}}_{i\phi}^T \mathbf{X}_i \hat{\mathbf{A}}_{i\phi} \hat{\mathbf{x}}_k = \\ &\hat{\mathbf{x}}_k^T \left( \sum_{\phi=1}^M \mathbf{u}_{i\phi} \hat{\mathbf{A}}_{i\phi}^T \mathbf{X}_i \hat{\mathbf{A}}_{i\phi} \right) \hat{\mathbf{x}}_k, \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $\hat{\mathbf{x}}_k = (\mathbf{x}_k^T, \boldsymbol{\varphi}_i^T(\mathbf{C}_i \mathbf{x}_k))^T$ .这意味着

$$\mathbb{E}\{\Delta V(k)\} = \hat{\mathbf{x}}_k^T \left( \sum_{\phi=1}^M \mathbf{u}_{i\phi} \hat{\mathbf{A}}_{i\phi}^T \mathbf{X}_i \hat{\mathbf{A}}_{i\phi} \right) \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_k. \quad (18)$$

记  $\mathbf{h}_{i\phi} = \text{diag}\{\mathbf{P}_i, \mathbf{I}_{n_x+n_y}, \{\text{diag}(\mathbf{I}_{n_x}, \mathbf{R}_{i\phi}^{-1})_{\phi=1}^M\}\}$ ,用  $\mathbf{h}_{i\phi}$  分别左乘右乘不等式(14),可以得到

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathcal{L}}_{i\phi} & \sqrt{u_{i1}} \mathbf{I} & \dots & \sqrt{u_{iM}} \mathbf{I} \\ \sqrt{u_{i1}} \mathbf{I} & -\hat{\mathbf{L}}_{i1} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \sqrt{u_{iM}} \mathbf{I} & 0 & 0 & -\hat{\mathbf{L}}_{iM} \end{bmatrix} < 0, \quad (19)$$

其中,

$$\hat{\mathcal{L}}_{i\phi} = \begin{bmatrix} -\mathbf{P}_i & 0 \\ * & \mathbf{H}_{i\phi} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{L}}_{i\phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x} & 0 \\ * & \mathbf{R}_{i\phi}^{-1} \end{bmatrix}.$$

对式(19)应用舒尔补引理,可以进一步得到

$$\sum_{\phi=1}^M \mathbf{u}_{i\phi} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ * & \mathbf{R}_{i\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{P}_i & 0 \\ * & \mathbf{H}_{i\phi} \end{bmatrix} < 0. \quad (20)$$

对式(20)左右分别乘向量  $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \hat{\mathbf{x}}_k \end{bmatrix}$  可以得到

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^T \sum_{\phi=1}^M \mathbf{u}_{i\phi} \mathbf{R}_{i\phi} \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{x}_k^T \left( \sum_{\phi=1}^M \mathbf{u}_{i\phi} \mathbf{I}_{n_x} \right) \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^T \mathbf{I}_{n_x} \mathbf{x}_k - \\ \mathbf{x}_k^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_k - 2\text{SC}(i, \mathbf{x}_k, \mathbf{T}_i) < 0. \end{aligned} \quad (21)$$

注意到  $\sum_{\phi=0}^M u_{i\phi} = 1$ , 则  $\sum_{\phi=0}^M u_{i\phi} \mathbf{I}_{n_x} = \mathbf{I}_{n_x}$ , 因此式(21)跟下面的不等式是等价的:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^T \sum_{\phi=1}^M u_{i\phi} \mathbf{R}_{i\phi} \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_k - 2\text{SC}(i, \mathbf{x}_k, \mathbf{T}_i) < 0. \quad (22)$$

对不等式(13)应用舒尔补引理,可以得到

$$\hat{\mathbf{A}}_{i\phi}^T \mathbf{X}_i \hat{\mathbf{A}}_{i\phi} < \mathbf{R}_{i\phi}, \quad (23)$$

结合不等式(22)及(23),可以得到

$$\hat{\mathbf{x}}_k^T \sum_{\phi=1}^M u_{i\phi} (\hat{\mathbf{A}}_{i\phi}^T \mathbf{X}_i \hat{\mathbf{A}}_{i\phi}) \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_k - 2\text{SC}(i, \mathbf{x}_k, \mathbf{T}_i) < 0. \quad (24)$$

注意到式(18)中的条件,可以得到

$$\mathbb{E}\{\Delta V(k)\} - 2\text{SC}(i, \mathbf{x}_k, \mathbf{T}_i) < 0. \quad (25)$$

根据式(4)中给出的条件,有  $\mathbb{E}\{\Delta V(k)\} < 0$ ,

这意味着闭环控制是随机稳定的.定理1得证.

**注2** 如前面章节所描述的,本文考虑的闭环系统包含两个马尔可夫链,  $r(k)$  用于描述系统模态,  $\sigma(k)$  用于描述控制器模态.受到文献[8]中采用的处理方法的启发,本文引入矩阵  $\mathbf{R}_{i\phi}$  来分离系统的马尔可夫链和控制器的马尔可夫链,

**注3** 注意到不等式(21)和不等式(22)跟下面的不等式是等价的:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^T \left[ \sum_{\phi=1}^M u_{i\phi} \mathbf{R}_{i\phi} + \Xi_i \right] \hat{\mathbf{x}}_k < 0, \quad (26)$$

其中

$$\Xi_i = \begin{bmatrix} -\mathbf{P}_i & \mathbf{C}_i^T \Delta_i \mathbf{T}_i \\ * & -2\mathbf{T}_i \end{bmatrix}.$$

之所以采用不等式(21)和不等式(22)中的等价变换形式,是因为通过这种方式可以更灵活地处理矩阵中的参数.很明显,在不等式(19)中的矩阵中含有的  $\mathbf{P}_i$  很容易跟矩阵  $\mathbf{H}_{i\phi}$  和  $\mathbf{R}_{i\phi}$  分离,使之转变成  $\bar{\mathbf{P}}_i$ , 但是,对不等式(26)中的  $\sum_{\phi=1}^M u_{i\phi} \mathbf{R}_{i\phi} + \Xi_i$  想完成这一变换是非常困难的.

## 2.2 $\ell_2$ 增益最小化

本小节将讨论闭环控制系统(12)的  $\ell_2$  增益最小化问题.可以通过求解  $\ell_2$ -增益最优化问题来设计异步控制器(10),并且定理2将提供一个充分条件以确保闭环系统是随机稳定的并且  $\ell_2$  增益小于或等于  $\gamma$ .

**定理2** 考虑闭环马尔可夫Lur'e跳变系统(12),对任意的  $i \in \mathcal{N}$  及  $\phi \in \mathcal{M}$ ,如果存在正定矩阵  $\bar{\mathbf{P}}_i \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}$  及  $\mathbf{R}_{i\phi} \in \mathbf{R}^{(n_x+n_y+n_w) \times (n_x+n_y+n_w)}$ , 矩阵  $\mathbf{K}_\phi \in \mathbf{N}^{n_u \times n_x}$ ,  $\mathbf{T}_\phi \in \mathbf{R}^{n_u \times n_y}$ , 半正定矩阵  $\mathbf{T}_i \in \mathbf{R}^{n_y \times n_y}$ , 及一个

正标量  $\gamma$ ,使得下面公式成立:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{i\phi} & \mathcal{N}_{i\phi} \\ * & \mathcal{L}_{i\phi} \end{bmatrix} < 0, \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{R}_{i\phi} & \mathcal{H}_{i\phi} \\ * & \mathcal{P}_i \end{bmatrix} < 0, \quad (28)$$

其中

$$\mathcal{N}_{i\phi} = [\sqrt{u_{i1}} \mathbf{W}_{i1}, \sqrt{u_{i2}} \mathbf{W}_{i2}, \dots, \sqrt{u_{iM}} \mathbf{W}_{iM}],$$

$$\mathcal{L}_{i\phi} = \text{diag}\{-\mathbf{L}_{i1}, -\mathbf{L}_{i2}, \dots, -\mathbf{L}_{iM}\},$$

$$\mathcal{P}_i = \text{diag}\{-\bar{\mathbf{P}}_1, -\bar{\mathbf{P}}_2, \dots, -\bar{\mathbf{P}}_N, -\mathbf{I}_{n_w}\},$$

$$\mathbf{W}_{i\phi} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_i & 0 \\ * & \mathbf{R}_{i1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_{i\phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x} & 0 \\ * & \mathbf{R}_{i1} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{H}_{i\phi} = \begin{bmatrix} \sqrt{\pi_{i1}} \hat{\mathbf{A}}_{i\phi} \\ \sqrt{\pi_{i2}} \hat{\mathbf{A}}_{i\phi} \\ \vdots \\ \sqrt{\pi_{iN}} \hat{\mathbf{A}}_{i\phi} \\ \hat{\mathbf{A}}_{i\phi} \end{bmatrix}^T, \quad \mathcal{L}_{i\phi} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{P}}_i & 0 \\ * & \mathbf{H}_{i\phi} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{i\phi} = [\bar{\mathbf{A}}_{i\phi}, \bar{\mathbf{F}}_{i\phi}, \mathbf{E}_i^x], \quad \hat{\mathbf{A}}_{i\phi}^z = [\bar{\mathbf{C}}_{i\phi}^z, \bar{\mathbf{G}}_{i\phi}^z, \mathbf{E}_i^z],$$

$$\mathbf{H}_{i\phi} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{n_x} & \mathbf{C}_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{T}_i & 0 \\ * & -2\mathbf{T}_i & 0 \\ * & * & -\gamma^2 \mathbf{I}_{n_w} \end{bmatrix},$$

那么闭环系统(12)是随机稳定的,且该闭环系统的  $\ell_2$  增益性能是小于等于  $\gamma$  的.

**证明** 首先选择式(16)中的李雅普诺夫泛函且  $\mathbf{P}_{r(k)} = \bar{\mathbf{P}}_{r(k)}^{-1}$ .与定理1的证明相似,不难得到

$$\mathbb{E}\{\Delta V(k)\} = \hat{\mathbf{x}}_k^T \left( \sum_{\phi=1}^M u_{i\phi} \hat{\mathbf{A}}_{i\phi}^T \mathbf{X}_i \hat{\mathbf{A}}_{i\phi} \right) \hat{\mathbf{x}}_k - V(k, \mathbf{x}_k, i), \quad (29)$$

其中,  $\hat{\mathbf{x}}_k = (\mathbf{x}_k^T, \boldsymbol{\phi}_k^T(\mathbf{C}_i \mathbf{x}_k), \mathbf{w}_k^T)^T$ ,  $\mathbf{X}_i = \sum_{j=1}^N \pi_{ij} \mathbf{P}_j$ .

记  $\mathbf{h}_{i\phi} = \text{diag}\{\mathbf{P}_i, \mathbf{I}_{n_x+n_y+n_w}, \{\text{diag}(\mathbf{I}_{n_x}, \mathbf{R}_{i\phi}^{-1})_{\phi=1}^M\}\}$ , 同时用  $\mathbf{h}_{i\phi}$  及其转置分别左乘右乘不等式(27),可以得到

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathcal{L}}_{i\phi} & \sqrt{u_{i1}} \mathbf{I} & \dots & \sqrt{u_{iM}} \mathbf{I} \\ \sqrt{u_{i1}} \mathbf{I} & -\hat{\mathbf{L}}_{i1} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \sqrt{u_{iM}} \mathbf{I} & 0 & 0 & -\hat{\mathbf{L}}_{iM} \end{bmatrix} < 0,$$

其中,

$$\hat{\mathcal{L}}_{i\phi} = \begin{bmatrix} -\mathbf{P}_i & 0 \\ * & \mathbf{H}_{i\phi} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{L}}_{i\phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x} & 0 \\ * & \mathbf{R}_{i\phi}^{-1} \end{bmatrix}.$$

注意到  $L_{i\phi} > 0$ , 则应用舒尔补引理到上面的不等式, 可以得到

$$\sum_{\phi=1}^M \mathbf{u}_{i\phi} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ * & \mathbf{R}_{i\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{P}_i & 0 \\ * & \mathbf{H}_{i\phi} \end{bmatrix} < 0. \quad (30)$$

对不等式(30)左乘、右乘  $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \hat{\mathbf{x}}_k \end{bmatrix}$  可以得到

$$\hat{\mathbf{x}}_k^T \left( \sum_{\phi=1}^M \mathbf{u}_{i\phi} \mathbf{R}_{i\phi} \right) \hat{\mathbf{x}}_k + \hat{\mathbf{x}}_k^T \left( \sum_{\phi=1}^M \mathbf{u}_{i\phi} \mathbf{I}_{n_x} \right) \hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^T \mathbf{I}_{n_x} \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_k - 2\text{SC}(i, \mathbf{x}_k, \mathbf{T}_i) - \gamma^2 \mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_k < 0. \quad (31)$$

注意到  $\sum_{\phi=0}^M \mathbf{u}_{i\phi} = 1$ , 则  $\sum_{\phi=0}^M \mathbf{u}_{i\phi} \mathbf{I}_{n_x} = \mathbf{I}_{n_x}$ , 因此式(31)

与下面的不等式是等价的:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^T \left( \sum_{\phi=1}^M \mathbf{u}_{i\phi} \mathbf{R}_{i\phi} \right) \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_k - 2\text{SC}(i, \mathbf{x}_k, \mathbf{T}_i) - \gamma^2 \mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_k < 0. \quad (32)$$

对不等式(28)应用舒尔补引理, 可以得到

$$\hat{\mathbf{A}}_{i\phi}^T \mathbf{X}_i \hat{\mathbf{A}}_{i\phi} + (\hat{\mathbf{A}}_{i\phi}^z)^T \hat{\mathbf{A}}_{i\phi}^z < \mathbf{R}_{i\phi}, \quad (33)$$

结合不等式(32)及(33), 不难得到

$$\hat{\mathbf{x}}_k^T \left( \sum_{\phi=1}^M \mathbf{u}_{i\phi} (\hat{\mathbf{A}}_{i\phi}^T \mathbf{X}_i \hat{\mathbf{A}}_{i\phi} + (\hat{\mathbf{A}}_{i\phi}^z)^T \hat{\mathbf{A}}_{i\phi}^z) \right) \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_k - 2\text{SC}(i, \mathbf{x}_k, \mathbf{T}_i) - \gamma^2 \mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_k < 0. \quad (34)$$

式(34)可以推出

$$\mathbb{E}\{\Delta V(k)\} + \mathbb{E}\{\mathbf{z}_k^T \mathbf{z}_k\} - \gamma^2 \mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_k - 2\text{SC}(i, \mathbf{x}_k, \mathbf{T}_i) < 0. \quad (35)$$

而且, 注意到(4)中给出的条件, 有

$$\mathbb{E}\{\Delta V(k)\} + \mathbb{E}\{\mathbf{z}_k^T \mathbf{z}_k\} - \gamma^2 \mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_k < 0,$$

这意味着

$$\mathbb{E}\{\Delta V(k) + \mathbf{z}_k^T \mathbf{z}_k - \gamma^2 \mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_k \mid \mathbf{x}_k, r(k) = i\} < 0. \quad (36)$$

对式(36)从  $k=0$  到  $k=\infty$  累加, 同时注意到  $\mathbf{x}_0=0$  及  $\mathbb{E}\{k+1, \mathbf{x}_{k+1}, r(k+1)\} \geq 0$ , 则有  $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\{\|\mathbf{z}_k\|^2\} - \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\{\|\mathbf{w}_k\|^2\} \leq 0$ , 即  $\|\mathbf{z}\|_2 \leq \gamma \|\mathbf{w}\|_2$ . 也就是说, 对于任意的  $\mathbf{w} \in \mathcal{W}_\zeta$ , 闭环系统(12)的  $\ell_2$  增益小于等于  $\gamma$ , 至此完成了定理2的证明.

**注4** 不难发现, 可以通过求解下面的  $\ell_2$  增益最优化问题来设计一个异步控制器, 使得闭环控制系统(12)随机稳定, 且具有最小的  $\ell_2$  增益.

$$\min \sigma \text{ subject to (27) and (28) with } \sigma = \gamma^2.$$

### 3 数值例子

本节提供了一个数值例子来验证提出方法的有效性. 假设文中考虑的马尔可夫跳变Lur'e系统(1)

具有以下参数:

$$\mathcal{N} = \{1, 2\}, \quad \mathcal{M} = \{1, 2\},$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_1^z = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2^z = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_1^z = 0.5,$$

$$\mathbf{G}_2^z = 0.4, \quad \mathbf{D}_1^z = 0, \quad \mathbf{D}_2^z = 0.4,$$

$$\mathbf{E}_1^z = 1.4, \quad \mathbf{E}_2^z = -1.0, \quad \mathbf{E}_1^x = \mathbf{E}_2^x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = 1.3, \quad \boldsymbol{\varphi}_1(\gamma) = 0.5\boldsymbol{\Omega}_1\gamma(1 + \cos(25\gamma)),$$

$$\boldsymbol{\Omega}_2 = 1.5, \quad \boldsymbol{\varphi}_2(\gamma) = 0.5\boldsymbol{\Omega}_2\gamma(1 + \sin(25\gamma)),$$

$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

首先讨论最优  $\ell_2$  增益  $\gamma^*$  同条件模态概率转移矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  之间的关系.

令  $\boldsymbol{\Phi}$  结构如下:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 1 - \lambda_{11} \\ 1 - \lambda_{22} & \lambda_{22} \end{bmatrix}, \quad \lambda_{11}, \lambda_{22} \in [0, 1].$$

图1描述了在条件模态概率转移矩阵  $\boldsymbol{\Phi}$  变化时, 系统最优  $\ell_2$  增益性能的变化情况. 同时, 可以观察到下面3个结论:

1) 当  $\gamma^*$  的值在  $\lambda_{11} = \alpha, \lambda_{22} = \beta$  和  $\lambda_{11} = \beta, \lambda_{22} = \alpha$  时是一样的, 也就是曲面具有一定的对称性. 这一点很好理解, 毕竟, 控制器的模态序号是设计者自己定义的, 可以重新定义控制器的模态序号. 例如让原先的模态2定义现在的模态1, 让之前的模态1定义现在的模态2.

2) 当  $\lambda_{11} = 0, \lambda_{22} = 0$  或者  $\lambda_{11} = 1, \lambda_{22} = 1$  时, 最优  $\ell_2$  增益  $\gamma^*$  达到最小值 1.823 6. 这两个特殊的情况意味着控制器模态会与系统模态保持同步, 也就是说, 此时控制器变成了同步控制器.

3) 当  $\lambda_{11} + \lambda_{22}$  接近 1 时,  $\gamma^*$  会越大, 这表示了一个更高的异步率.

当选择  $\lambda_{11} = 0.4, \lambda_{22} = 0.7$  时, 可以得到以下控制器增益矩阵:

$$\mathbf{K}_1 = [-1.4036, -1.3277], \quad \boldsymbol{\Gamma}_1 = -2.0473,$$

$$\mathbf{K}_2 = [-1.3908, -1.3080], \quad \boldsymbol{\Gamma}_2 = -1.8925.$$

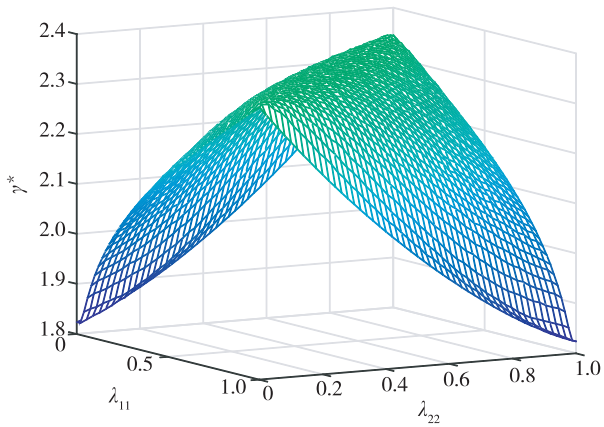


图1 最优 $\ell_2$ 增益 $\gamma^*$ 与 $\Phi$ 之间的关系

Fig. 1 Optimal  $\ell_2$ -gain performance  $\gamma^*$  varying with  $\Phi$

图2给出了一个可能的系统模态和控制器模态时间序列. 本文选择系统初始状态为  $\mathbf{x}_0 = [2, -2.5]^T$ , 外界扰动假定为  $\mathbf{w}_k = \sin(k) \times 0.85^k$ . 由图3可以看出, 当系统未采用控制器时, 系统是不稳定的. 但是将设计的控制器施加到系统中时, 可以得到如图4所示的系统状态曲线以及图5所示的系统输入曲线. 通过对比图3及图4、图5可以发现, 所采用的控制器可以使得系统从不稳定变成稳定的系统, 说明本文方法是正确且有效的.

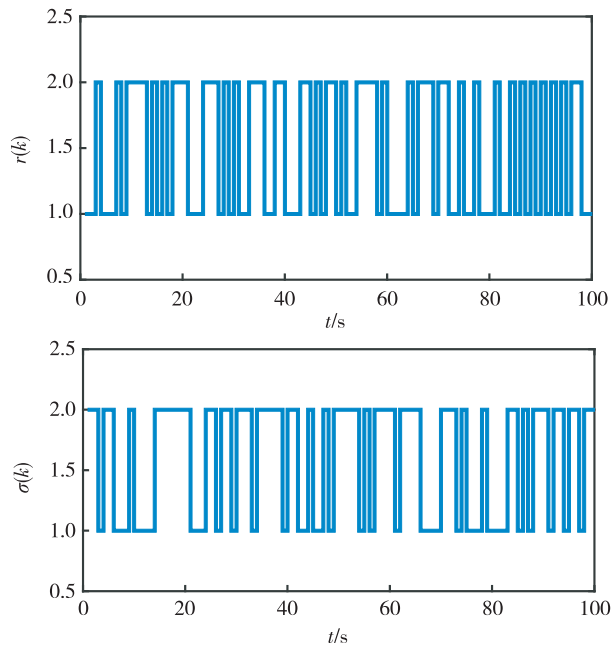


图2 系统和控制器的时间模态序列

Fig. 2 Modes of system and controller

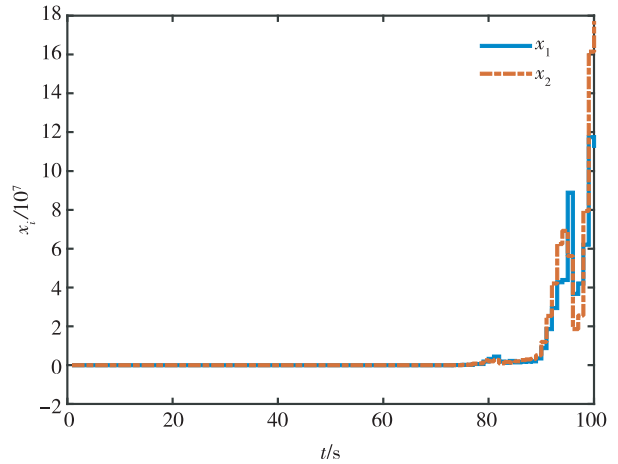


图3 不使用控制器时的系统状态

Fig. 3 System state when the controller is not utilized

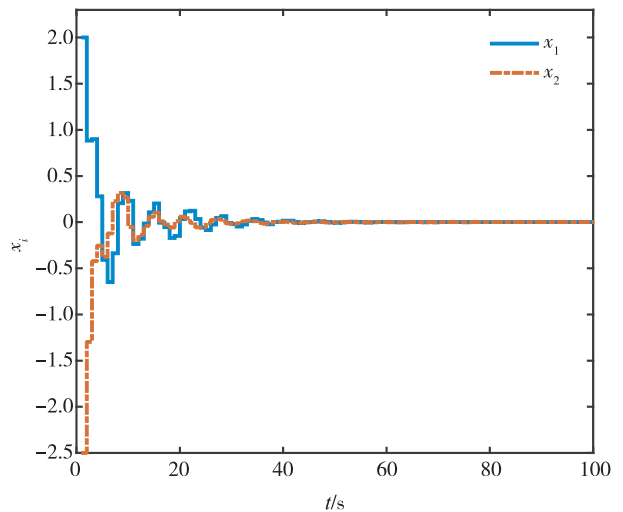


图4 使用控制器时的系统状态

Fig. 4 System state with proposed controller

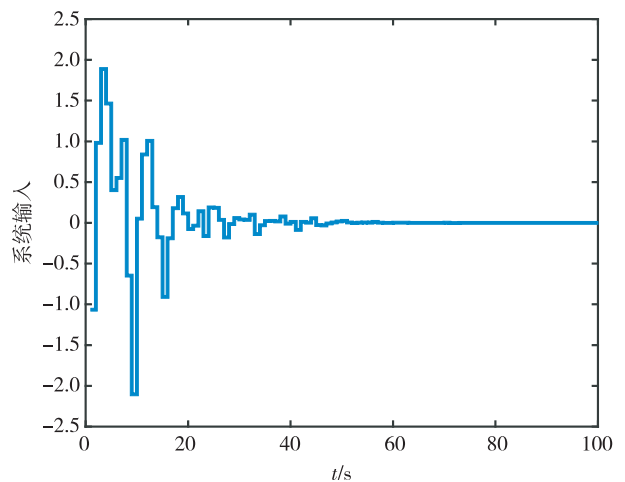


图5 系统输入

Fig. 5 System input

## 4 结论

本文设计了一种由线性状态反馈及满足扇形有界的非线性输出反馈组成的异步控制器,研究了一类离散马尔可夫跳变 Lur'e 系统的随机稳定性及  $\ell_2$  增益问题.控制器模态与系统模态之间的异步由一个隐马尔可夫模型描述.在线性矩阵不等式及李雅普诺夫泛函方法的帮助下,我们分别在系统随机稳定性及  $\ell_2$  增益问题上得到了两个定理.文中给出了一个数值例子来验证提出方法的有效性.但是,值得注意的是,在未来仍然有许多有意义的工作可以讨论.例如,对于含有异步控制器的马尔可夫跳变 Lur'e 系统,由于系统模态概率转移矩阵  $\Pi$  及控制器条件模态概率转移矩阵  $\Phi$  的信息很难全部得到,因此研究含有不确定元素的情况是非常有意义的.另一方面,如果采用文献[19]介绍的新型李雅普诺夫泛函或许可以得到一个更加不保守的稳定性条件.

## 参考文献

### References

- [ 1 ] Lin H, Su H, Chen M Z Q, et al. On stability and convergence of optimal estimation for networked control systems with dual packet losses without acknowledgment [ J ]. Automatica, 2018, 90: 81-90
- [ 2 ] Karan M, Shi P, Kaya C Y. Transition probability bounds for the stochastic stability robustness of continuous-and discrete-time Markovian jump linear systems [ J ]. Automatica, 2006, 42( 12 ): 2159-2168
- [ 3 ] Lu R, Zou H, Su H, et al. Robust D-stability for a class of complex singularly perturbed systems [ J ]. IEEE Transactions on Circuits & Systems II: Express Briefs, 2008, 55( 12 ): 1294-1298
- [ 4 ] Lu R, Xu Y, Xue A, et al. Networked control with state reset and quantized measurements: observer-based case [ J ]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2013, 60( 11 ): 5206-5213
- [ 5 ] Wu Z G, Shi P, Su H, et al. Stochastic synchronization of Markovian jump neural networks with time-varying delay using sampled data [ J ]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2013, 43( 6 ): 1796-1806
- [ 6 ] Todorov M G, Fragoso M D. New methods for mode-independent robust control of Markov jump linear systems [ J ]. Systems & Control Letters, 2016, 90: 38-44
- [ 7 ] Wu H N, Cai K Y. Mode-independent robust stabilization for uncertain Markovian jump nonlinear systems via fuzzy control [ J ]. IEEE Transactions on Systems, Man & Cybernetics, Part B( Cybernetics ), 2006, 36( 3 ): 509-519
- [ 8 ] Wu Z G, Shi P, Su H, et al. Asynchronous  $\ell_2$  infity filtering for discrete-time stochastic Markov jump systems with randomly occurred sensor nonlinearities [ J ]. Automatica, 2014, 50( 1 ): 180-186
- [ 9 ] Wu Z G, Shi P, Shu Z, et al. Passivity-based asynchronous control for Markov jump systems [ J ]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62( 4 ): 2020-2025
- [ 10 ] Shen Y, Wu Z G, Shi P, et al. Asynchronous filtering for Markov jump neural networks with quantized outputs [ J ]. IEEE Transactions on Systems, Man & Cybernetics: Systems, 2018, 99: 1-11
- [ 11 ] Zhang H, Lun S, Liu D. Fuzzy  $H_\infty$  filter design for a class of nonlinear discrete-time systems with multiple time delays [ J ]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2007, 15( 3 ): 453-469
- [ 12 ] Shanlingdong S, Wu Z G, Pan Y J, et al. Hidden-Markov-model-based asynchronous filter design of nonlinear Markov jump systems in continuous-time domain [ J ]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 99: 1-11
- [ 13 ] Song J, Niu Y, Zhao H, et al. Finite-time  $\ell_2$ - $\ell_\infty$  control of Markovian jump linear systems with partly accessible hidden information via asynchronous output feedback [ C ] // 2017 11th Asian Control Conference. IEEE, 2017: 2447-2452
- [ 14 ] Khalil H K. Nonlinear systems [ M ]. 3rd ed. Prentice Hall, 2012
- [ 15 ] Castelan E B, Moreno U F, Pieri E R D. Absolute stabilization of discrete-time systems with a sector bounded nonlinearity under control saturations [ C ] // 2006 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS 2006. IEEE, 2006: 4-8
- [ 16 ] Castelan E B, Tarbouriech S, Queinnec I. Control design for a class of nonlinear continuous-time systems [ J ]. Automatica, 2008, 44( 8 ): 2034-2039
- [ 17 ] Song G, Zhang Y, Xu S. Stability and  $\ell_2$ -gain analysis for a class of discrete-time non-linear Markovian jump systems with actuator saturation and incomplete knowledge of transition probabilities [ J ]. Control Theory & Applications, 2012, 6( 17 ): 2716-2723
- [ 18 ] Gonzaga C A C, Jungers M, Daafouz J. Stability analysis of discrete-time Lur'e systems [ J ]. Automatica, 2012, 48( 9 ): 2277-2283
- [ 19 ] Gonzaga C A C, Costa O L V. Stochastic stabilization and induced  $\ell_2$ -gain for discrete-time Markov jump Lur'e systems with control saturation [ J ]. Automatica, 2014, 50( 9 ): 2397-2404

## Stability and $\ell_2$ -gain analysis for discrete-time Markov jump Lur'e aystems with asynchronous controller

TAO Yueyue<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Institute of Cyber-Systems and Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027

**Abstract** This paper is concerned with the stability and  $\ell_2$ -gain performance for a class of discrete-time Lur'e systems with an asynchronous controller. A hidden Markov model (HHM) is introduced to describe the asynchronization that appears between the designed controller and the original system. The linear matrix inequality (LMI) approach is utilized to analyze the stability of the closed-loop system and  $\ell_2$ -gain performance. Then a sufficient condition is proposed to guarantee the stochastic stability of the closed-loop system, and to minimize the obtained  $\ell_2$ -gain from the disturbance to output. Thus, an asynchronous controller consisting of both linear state feedback and cone-bounded nonlinear output feedback can be designed by solving the given conditions. A simulation example is given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words** Markov jump system; Lur'e systems;  $\ell_2$ -gain; stochastic stability; asynchronous controller