



关于带有协作/竞争机制时变积分器 网络一致性的收敛速率

摘要

本文探讨了时变无向网络达到状态一致过程中的收敛速率问题.首先基于一般的时变无向网络展开研究,证明了其收敛速率随耦合权重的增加而提高.同时,给出了收敛速率的明确下界,并指出这个下界是耦合权重的线性函数.基于这些结论,本文研究了带符号网络的收敛速率问题,发现只要带有正权值的边具有 (δ, T) 连通性,就可以增大这些边的权重而保持其余边(带有负权值)不变,使一致性以指数的速率达到.本文的证明过程主要基于完全一致可观这一概念.另外,本文也得到了这样的结论:一致性误差值可以从系统一段时间内的相对状态值中重建.这对于分布式网络中滤波器的状态估计有一定的借鉴意义.

关键词

时变(分布式)网络;指数收敛速率;带符号网络;完全一致可观

中图分类号 TP13

文献标志码 A

收稿日期 2018-08-14

资助项目 国家自然科学基金(61473269);中国科学院青年创新促进会项目(2015363);霍英东教育基金会高等院校青年教师基金(161059)

作者简介

马麒超,男,博士生,研究方向为多智能体系统一致性.mqc0214@mail.ustc.edu.cn

秦家虎(通信作者),男,博士,教授,研究方向为多智能体系统、复杂动态网络和信息物理系统.jhqin@ustc.edu.cn

0 引言

近十几年来多智能体系统理论广受关注^[1].这是由于它能够描述自然界中广泛存在的有趣的生物群集现象,比如鸟类编队以及萤火虫同步闪光等.一般来说,多智能体系统是由多个智能体通过网络互联组成的,能够完成复杂任务的系统^[1].这些个体具有一定感知、测量、储存、计算、通信能力,并能够对周围环境做出反应.每个智能体通过与其相邻个体沟通来协调自己的目标与行为,最终完成一项复杂的任务.多智能体系统的一致性在多智能体系统的研究中占有重要的地位.所谓一致性是指随着时间的推移,多智能体系统中的所有智能体的状态或者输出达到相同的值.多智能体系统的其他行为模式,如聚集、编队、蜂拥、同步等^[1-2],都是以一致性为基础的.

20世纪80年代,生态学家 Reynolds 提出了基于三条启发式规则的 Boid 模型,通过计算机仿真模拟自然界中鸟群、鱼群的群集行为.文献[3]则从统计力学的角度提出了一个离散时间模型,能够有效地描述简单个体之间相互影响导致的群集行为. Ren 等^[4]指出,在切换网络情形下,有向通信拓扑具有联合连通的性质能够保证一致性收敛. Moreau^[5]则进一步证明,在连续时变的系统中,对于上述联合连通的有向通信拓扑,一旦有 (δ, T) 连通性(如果在任意给定的时间窗口 T 内权重积分大于 δ 的边构成一个连通图,则称通信拓扑具有 (δ, T) 连通性),则能够保证一致性的指数收敛.文献[6]进一步确认了这一结论,并论证了在无向图中指数收敛速率对初值具有一致性.文献[7]探讨了如何弱化上述 (δ, T) 连通性的要求. Shi 等^[7]得出,如果有向图的持续图连通,即如果仅保留在 $[0, \infty)$ 上积分值为无穷大的边仍能保持连通性,且不同边的权值之间满足一定的平衡关系,那么一致性能够以渐近的形式达到.文献[8]则给出了另一个有趣的结论,要求通信拓扑满足 (δ_i, T_i) 条件,即不要求存在一个固定的时间窗口 T 使得通信拓扑联合连通,而要求存在一系列时间窗口使得联合连通成立.这里的 T_i 随着 i 的增大可以趋近无穷大.在这个条件的基础上,文献[8]给出了使得时变无向图中积分器系统全局渐近收敛的充分必要条件.上述结论尽管非常优美,却忽略了对于收敛速率的刻画.

本文则进一步对时变无向图中实现状态一致的收敛速率进行了探讨,证明了在一般的时变无向图中,如果耦合权重增大,那么收敛速率也随之提高.同时,给出了收敛速率的明确下界,并指出这个下界

¹ 中国科学技术大学 信息学院,合肥,230027

是耦合权重的线性函数. 基于这一结论, 本文针对带符号的网络进行了探讨(即一个网络中边的权重可以为负数也可以为正数, 这在社会网络的建模和分析中能够见到^[9]). 进一步, 笔者发现只要带有正权值的边具有 (δ, T) 连通性, 那么增大这些边的权重而保持其余边(带有负权值)不变, 即可使一致性以指数的速率达到. 本文的证明主要基于完全一致可观的概念. 而且, 在分析中可以得到一个额外但有意义的结论, 即一致性误差值可以从系统过去一段时间的相对状态值中重建. 这对于分布式网络中滤波器的状态估计有一定的借鉴意义.

1 图论相关概念

由 N 个节点组成的有向图可以用 $G = \{V, E\}$ 来表示, 其中顶点集 $V = \{1, \dots, N\}$ 是有限的非空集合, 边集 $E \subseteq V \times V$ 是有序节点对组成的边的集合. $(i, j) \in E$ 表示节点 j 能够获得节点 i 的信息, 此时称 i 是 j 的邻居. 记 N_i 为节点 i 的邻居的集合. 与有向图不同, 无向图中的 (i, j) 表示节点 i 和节点 j 能互相获取对方的信息.

如果存在顶点序列 i_1, \dots, i_{l+1} , 满足 $(i_j, i_{j+1}) \in E, j = 1, \dots, l$, 则称存在从 i_1 到 i_{l+1} 的有向路径. 如果存在顶点 $r \in V$ 具有到 V 中其他任何节点的有向路径, 那么称有向图 G 具有有向生成树, 其中顶点 r 被称为根节点. 如果 V 中的每个顶点均为根节点, 则称 G 为强连通图.

用矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 表示图 G 的邻接矩阵. 如果 $j \in N_i$, 则 $a_{ij} > 0$, 否则 $a_{ij} = 0$. 如果没有特殊声明, 不允许节点存在到自身的边, 即 $a_{ii} = 0$. 节点 i 的入度和出度分别定义为 $\sum_{j=1}^N a_{ij}$ 和 $\sum_{j=1}^N a_{ji}$. 如果对于所有的节点 i , 都满足 $\sum_{j=1}^N a_{ij} = \sum_{j=1}^N a_{ji}$, 则称图是平衡的.

图 G 的拉普拉斯矩阵定义为 $L = [l_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$, 其中

$$l_{ii} = \sum_{j=1}^N a_{ij}, \quad l_{ij} = -a_{ij}, \quad i \neq j.$$

矩阵 L 在多智能体一致性分析中具有非常重要的作用. 对于无向图(平衡图)而言, 由圆盘定理可以得出 $L + L^T$ 是半正定矩阵. 对于有向图, 则有如下基本性质:

引理 1 给定一个有向图 G , 其对应的拉普拉斯矩阵为 L . 那么, L 含有至少一个零特征值, 且所有非零特征值都位于右半开平面. 另外, L 含有唯一的零

特征值当且仅当 G 包含生成树. 如无特殊说明, 以下结论均假设 G 为时变无向图, 并用下标 t 来表示时变的量.

2 预备知识

定义 1 定义时变图 G_t 在时间段 $[t_i, t_j)$ 上的并为 $G = \{V, \bar{E}, \bar{A} = [\bar{a}_{ij}]\}$, 其中 \bar{a}_{ij} 满足如下定义:

$$\bar{a}_{ij} = \int_{t_i}^{t_j} a_{ij}(t) dt.$$

定义 2 如果存在正数 δ 以及 T , 使得

$$\int_t^{t+T} a_{ij}(\tau) d\tau \geq \delta$$

对于任何时刻 t 都成立边构成连通子图, 那么就说明时变图 G_t 是 (δ, T) 连通的, 这样的时变图也被称为具有联合 (δ, T) 连通的性质.

假设 1 对于任何一条边而言, $a_{ij}(t)$ 是分段连续的时变函数. 另外, 对任何一条边, a_{ij} 是一致有界的, 也就是存在 $C > 0$, 使得对于任何时间 $t \geq 0$, $|a_{ij}(t)| \leq C$ 成立.

上述假设 1 是个非常一般的假设, 它包含切换拓扑的情形. 也就是说, 如果 G_t 在一个时间段 $[t_i, t_{i+1})$ 上保持不变, 但是在 t_i 处存在拓扑切换使得 $a_{ij}(t)$ 在 t_i 处不连续, 这样的变化方式能够被假设 1 所涵盖. 另外, $a_{ij}(t)$ 的分段连续特性使得 $a_{ij}(t)$ 是可积分的函数.

3 已有结果

定义 3^[10] 给定如下线性时变系统:

$$\dot{x} = F(t)x, \quad (1)$$

$$y = D(t)x, \quad (2)$$

如果存在正数 α_1, α_2 , 以及 δ , 使得

$$\alpha_1 I \leq \int_s^{s+\delta} \Phi^T(t, s) D^T(t) D(t) \Phi(t, s) dt \leq \alpha_2 I,$$

那么就说系统(1)和(2)是一致完全可观测的. 这里, $\Phi(\cdot, \cdot)$ 表示系统(1)的状态转移矩阵.

如果系统(1)和(2)是一致完全可观测的, 那么

$$x(s) = \left(\int_s^{s+\delta} \Phi^T(t, s) D^T(t) D(t) \Phi(t, s) dt \right)^{-1} \times \int_s^{s+\delta} \Phi(t, s) D(t) y(t) dt,$$

这就是说, $x(s)$ 能够根据 $y(t)$, $t \in [s, s + \delta]$ 重建.

下面考虑如下形式的线性系统:

$$\dot{x} = -V^T(t)V(t)x, \quad (3)$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{V}(t)$ 是一个分段连续且几乎处处有界的矩阵函数.那么,有如下结论成立:

引理 2^[11] 系统(3)是指指数渐近稳定的,即存在 $\gamma_1, \gamma_2 > 0$,使得

$$\|\Phi(t, s)\| \leq \gamma_1 e^{-\gamma_2(t-s)}$$

对任何的 $t \geq s \geq 0$ 都成立,当且仅当

$$\alpha_1 \mathbf{I} \leq \int_s^{s+T} \mathbf{V}^T(t) \mathbf{V}(t) dt \leq \alpha_2 \mathbf{I}$$

对任何 $s \geq 0$ 都成立,其中 α_1, α_2 和 T 都是正常数.

引理 3^[12] 考虑如下系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = -\Phi(t) \Phi(t)^T \mathbf{x},$$

其中 $\Phi(t)$ 满足如下条件:

$$\int_t^{t+T} \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) d\tau \geq \mu \mathbf{I}, \quad \forall t \geq 0,$$

并且 $\|\Phi(t)\| \leq \phi_M$,那么上述系统是一致指数稳定的,且 $\gamma_1 = 1, \gamma_2 \geq \mu / (T(1 + \phi_M^2 T))^2$.

引理 4^[13] 给定一个 $N \times N$ 的矩阵 \mathbf{A} ,其特征值记为 $\lambda_1, \dots, \lambda_N$.假设 \mathbf{v} 是 \mathbf{A} 的属于 λ_k 的特征向量,那么对于任何一个列向量 \mathbf{q} ,矩阵 $\mathbf{A} + \mathbf{v}\mathbf{q}^T$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k + \mathbf{v}^T \mathbf{q}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_N$.

4 问题描述

考虑如下系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{L}_i \mathbf{x}, \quad (4)$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N, \mathbf{L}_i \in \mathbf{R}^{N \times N}$.针对上述系统(4),我们的目标是分析在什么条件下它能够以指数的速率收敛到一致,并且给出一个明确的收敛速率下界,然后找出影响其收敛速率大小的因素.

首先来明确给出指数收敛的定义.为此需要先给出一个相对应的描述一致性误差的量.定义 $V = \mathbf{x}^T \left(\mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T \right) \mathbf{x}$,其中 $\mathbf{1}_N$ 表示元素全为 1 的 N 维向量.很明显 $V \geq 0$,且由于矩阵 $\mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T$ 的核空间由向量 $\mathbf{1}_N$ 生成,所以容易得出:当且仅当 $V = 0$ 时,系统(4)达到一致.我们给出如下定义:

定义 4 系统(4)以指数的速率收敛到一致性状态指的是存在 $\gamma_1, \gamma_2 > 0$,使得下式成立:

$$V(t) \leq \gamma_1 e^{\gamma_2(t-t_0)} V(0).$$

下面将利用引理 1—4 的结论来展开分析.需要注意的是上述 $V(t)$ 不仅被当作误差变量,也被看作 Lyapunov 函数来进行分析.

5 主要结论

定义 5^[6] 定义 \mathbf{H}_i 为 G_i 的关联矩阵,其中 \mathbf{H}_i 的行对应 G_i 的节点, \mathbf{H}_i 的列对应 G_i 的边,令 $\mathbf{H}_i = [\mathbf{H}_{ij}]$,其中

$$\mathbf{H}_{ij} = \begin{cases} -\sqrt{a_{ij}(t)}, & v = i, \\ \sqrt{a_{ij}(t)}, & v = j, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

由上述定义可知, $\mathbf{L}_i = \mathbf{H}_i \mathbf{H}_i^T$.现在定义

$$\mathbf{e} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T \right) \mathbf{x}.$$

易知,当且仅当 $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ 时, $x_1 = x_2 = \dots = x_N$.下面来探讨 \mathbf{e} 的稳定性问题.首先,有

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \left(\mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T \right) \dot{\mathbf{x}} = - \left(\mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T \right) \mathbf{L}_i \mathbf{x} = \\ &= - \left(\mathbf{L}_i + \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T \right) \left(\mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T \right) \mathbf{x} = \\ &= - \left(\mathbf{H}_i + \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{1}_N \mathbf{h}_N^T \right) \left(\mathbf{H}_i + \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{1}_N \mathbf{h}_N^T \right)^T \mathbf{e}, \end{aligned}$$

其中, \mathbf{h}_N 表示位于 \mathbf{H}_i 的核空间内的单位向量.文献[6]已经证明上述误差系统以指数速率收敛,遗憾的是并没有给出一个明确的收敛速率.另外,收敛速率是否可以通过调整参数,比如耦合强度来改变,以达到期望的性能,也是一个亟待解决的问题.本文将明确地给出一个收敛速率的下界,并证明该下界可以通过增加耦合强度来提高.

定理 1 (指数速率收敛) 系统(4)能够实现指数一致收敛,当且仅当存在 $\delta, T > 0$ 使得 G_i 是联合 (δ, T) 连通的.特别地,系统(1)的收敛速率为 $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = \alpha_1 / (T(1 + \phi^2 T))^2$,其中, α_1 在定义 3 中给出, $\phi > 0$ 满足 $\|\Phi(s, t)\| \leq \phi$.另外,当耦合强度增大的时候,收敛速率也随之增大.

证明 定理 1 前半部分已在文献[6]中证明,为保证本文的完整性并方便定理后半部分的证明,这里仍然给出其证明过程.为了刻画耦合强度对于系统收敛行为的影响,对系统(1)做如下修正:

$$\dot{\mathbf{x}} = -c \mathbf{L}_i \mathbf{x},$$

其中 $c > 0$.那么就有

$$\dot{\mathbf{e}} = - \left(\sqrt{c} \mathbf{H}_i + \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{1}_N \mathbf{h}_N^T \right) \left(\sqrt{c} \mathbf{H}_i + \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{1}_N \mathbf{h}_N^T \right)^T \mathbf{e}.$$

已知存在 $\delta, T > 0$ 使得 G_i 是联合 (δ, T) 连通的,那么由引理 3 不难得到:

$$\alpha_1 \mathbf{I} \leq \int_s^{s+T} \left(\sqrt{c} \mathbf{H}_i + \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{1}_N \mathbf{h}_N^T \right) \left(\sqrt{c} \mathbf{H}_i + \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{1}_N \mathbf{h}_N^T \right)^T dt =$$

$$\int_t^{s+T} \left(cL_\tau + \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T \right) d\tau \leq \alpha_2 \mathbf{I}.$$

由引理 1 可以直接得到系统(4) 是指数收敛的. 同时, 根据引理 2 得到收敛速率为 $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = \alpha_1 / (T(1 + \phi^2 T))^2$. 其中, $\phi > 0$ 满足如下条件: $\|\Phi(s, t)\| \leq \phi$, 这里 $\Phi(\cdot, \cdot)$ 为系统(4) 的传递函数. 需要指出的是由于 e 和 x 是一致有界的量, $\Phi(s, t)$ 的上界 ϕ 不依赖于状态以及通信拓扑的变化. 下面将着重阐明增加耦合强度如何提高收敛速率, 即增大 c 的同时 γ_2 也增大.

重新回顾一下误差变量 e 的定义:

$$e = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T \right) x,$$

容易验证, $e^T \mathbf{1}_N = 0$. 据此可知 e 的演化服从下面的微分方程:

$$\begin{aligned} \dot{e} = & - \left(cL_t + \frac{c}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T \right) e = \\ & - \left(\sqrt{c} \mathbf{H}_t + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{N}} \mathbf{1}_N \mathbf{h}_N^T \right) \left(\sqrt{c} \mathbf{H}_t + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{N}} \mathbf{1}_N \mathbf{h}_N^T \right)^T e. \end{aligned}$$

已知

$$\alpha_1 \mathbf{I} \leq \int_t^{s+T} \left(L_\tau + \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T \right) d\tau \leq \alpha_2 \mathbf{I},$$

那么,

$$c\alpha_1 \mathbf{I} \leq c \int_t^{s+T} \left(L_\tau + \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T \right) d\tau \leq c\alpha_2 \mathbf{I}.$$

于是得到收敛速率 $\gamma_2 = c\alpha_1 / (T(1 + \phi^2 T))^2$. 可以看到 T 和 ϕ 都是不依赖于系统状态和通信拓扑的常数, 收敛速率 γ_2 和耦合强度 c 呈现线性关系, 即增大耦合强度可以提升收敛速率. 证明结束.

例 1 考虑图 1 所示的 G_a, G_b . 它们都是无向图, 并且其并为连通图, 即 $G_a \cup G_b$ 包含生成树. 在仿真验证中, 我们让通信拓扑在 G_a, G_b 之间以周期 1 s 来回切换. 系统的初值由随机程序生成. G_a, G_b 中边的权重设置为 $c > 0$. 图 2 展示了当 $c = 0.5$ 时系统的收敛情况, 可以看到系统以指数速率收敛, 其速率小于 0.3. 当 $c = 1$ 即耦合强度增大时, 可以看到收敛速率

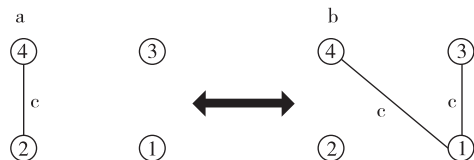


图 1 无向图网络, G_a 和 G_b 的并是连通图

Fig. 1 Undirected graphs, the union of G_a and G_b is connected

增加, 并且大于 0.4 (图 3). 这验证了本文的结论, 耦合强度的增大能够提高收敛的速率.

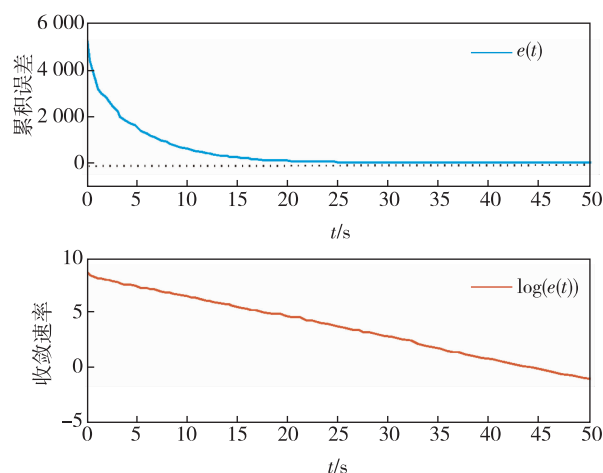


图 2 当 $c=0.5$ 时, 系统收敛, 收敛速率小于 0.3

Fig. 2 When $c=0.5$, the consensus error converges to zero, and the convergence rate is smaller than 0.3

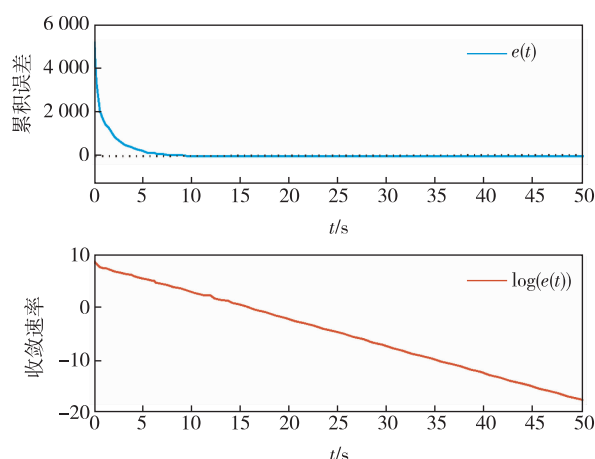


图 3 当 $c=1$ 时, 系统收敛, 收敛速率大于 0.4

Fig. 3 When $c=1$, the consensus error converges to zero, and the convergence rate is larger than 0.4

由上述证明过程可以构造如下系统:

$$\begin{aligned} \dot{e} = & - \left(cL_t + \frac{c}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T \right) e, \\ z = & \left(\sqrt{c} \mathbf{H}_t + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{N}} \mathbf{1}_N \mathbf{h}_N^T \right)^T e = \\ & \left(\sqrt{c} \mathbf{H}_t + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{N}} \mathbf{1}_N \mathbf{h}_N^T \right)^T \left(\mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T \right) x = \sqrt{c} \mathbf{H}_t x. \end{aligned}$$

一个显然的事实是, 上述系统是关于 z 一致完全可观的. 根据定义 3 可知, 上述系统关于输出一致完全可观的条件是

$$\alpha_1 I \leq \int_s^{s+T} \Phi^T(s,t) D(t) D^T(t) \Phi(s,t) dt \leq \alpha_2 I, \quad (5)$$

$$\text{其中 } D(t) = \sqrt{c} H_t + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{N}} \mathbf{1}_N \mathbf{h}_N^T.$$

因为存在下述关系:

$$cL_t + \frac{c}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T = \left(\sqrt{c} H_t + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{N}} \mathbf{1}_N \mathbf{h}_N^T \right) \left(\sqrt{c} H_t + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{N}} \mathbf{1}_N \mathbf{h}_N^T \right)^T,$$

所以(5)等价于^[6]

$$\alpha_1 I \leq \int_s^{s+T} D(t) D^T(t) dt \leq \alpha_2 I.$$

上式显然成立.将上述事实总结为下面这个定理:

定理2 (指数速率信号重构) 假设已知 G_t 的全部信息,包括其各边权重信息,并且存在 $\delta > 0, T > 0$ 使得 G_t 是联合 (δ, T) 连通的,那么各节点相对于一致状态的误差 $\mathbf{x}_i(s) - \mathbf{x}_{\text{ave}}(s)$ 能够从 $\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t), t \in [s, s+T]$ 的信息中以指数的速率重新构建,其中 $\mathbf{x}_{\text{ave}}(s) = \frac{1}{N} \mathbf{1}_N^T \mathbf{x}(s)$,构建速率可以由 $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = c\alpha_1 / (T(1 + \phi^2 T))^2$ 给出.

6 带符号的网络

上述结论均假设 G_t 中所有边的权重非负,即有 $a_{ij}(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ 成立.在这一章,将把前面的结论推广到具有负权值边的网络中,即在 G_t 中 $a_{ij}(t) < 0$ 是允许存在的.对应这种情形有一个简单而直观的例子,在一个社会网络中,不同个体之间具有相对复杂的关系,相互之间可能友好/信任,也有可能敌对/怀疑^[9,14].

尽管 $a_{ij}(t)$ 可以取负值,我们仍沿用章节1中的定义来描述 Laplacian 矩阵.这时,对于 L_t 而言,其仍然有一个零特征根,且相应的一个特征向量是 $\mathbf{1}_N$.不同的是, L_t 不再是半正定矩阵.因此在进行一致分析的过程中,上述论据不再适用.文献[6]假设 L_t 是半正定矩阵,讨论了带符号网络下的收敛速率及信号重构问题.这里不对 L_t 施加限制,在假设1满足的情况下,将有如下结论:

定理3 假设系统(4)中存在 $a_{ij}(t) < 0$ 的情形.如果正的耦合强度足够大的话,那么定理1,2仍然成立.

证明 将 G_t 分成两部分的并集, G_t^+ 和 G_t^- .其中 G_t^+ 只包含那些权值为正的边,而 G_t^- 只包含那些权值为负的边.同样地,用 L_t^+ 表示 G_t^+ 对应的 Laplacian

矩阵, L_t^- 则表示 G_t^- 对应的 Laplacian 矩阵.先来考虑 L_t^+ 这一部分,我们有

$$\dot{\mathbf{e}} = -cL_t^+ \mathbf{e}. \quad (6)$$

现在考虑

$$V = \mathbf{x}^T \left(I - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T \right) \mathbf{x}.$$

由于矩阵 $I - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T$ 的核由 $\mathbf{1}_N$ 组成,所以容易得到当且仅当系统(6)达到一致时即 $\mathbf{e} = 0$ 时,有 $V = 0$ 成立.另外,注意到 $\left(I - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T \right)^2 = I - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T$,故而 $V = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$.由第4章的结论可以知道系统(6)中 \mathbf{e} 是以指数速率收敛的,故而有

$$\gamma_3 e^{-\gamma_4(t-t_0)} V(0) \leq V(t) \leq \gamma_1 e^{-\gamma_2(t-t_0)} V(1),$$

其中 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 和 γ_4 是常数,而且 $\gamma_4 \geq c\gamma_2$.进而可以得到

$$\frac{dV}{dt} = -2c \frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} L_t^+ \mathbf{e} = -2c\alpha(t)V(t),$$

其中 $\alpha(t)$ 由下式定义:

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} L_t^+ \mathbf{e} = \alpha(t)V(t).$$

由引理2以及定理1的证明可以得到

$$c \int_s^{s+T} \alpha(\tau) d\tau \geq c\xi,$$

其中 $\xi > 0$.因为 $V(t)$ 满足如下方程:

$$V(t) = \mathbf{e} \int_0^t -\alpha(\tau) d\tau V(0).$$

现在回到如下动力学方程:

$$\dot{\mathbf{e}} = -L_t \mathbf{e} = -cL_t^+ \mathbf{e} - L_t^- \mathbf{e},$$

仍然考虑 $V(t)$,并将其作为上述动力学系统的 Lyapunov 函数.则有以下式:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & -2 \frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} (cL_t^+ \mathbf{e} + L_t^- \mathbf{e}) = \\ & -2c\alpha(t)V(t) - 2\beta(t)V(t), \end{aligned}$$

其中 $\beta(t)$ 由下式定义:

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}} L_t^- \mathbf{e} = \beta(t)V(t).$$

由于 $\|a_{ij}(t)\| \leq C$,易知 $\beta(t)$ 有严格的上界,即存在正常数 M 使得 $\|\beta(t)\| \leq M$.

$$\frac{dV}{dt} \leq 2(-c\alpha(t) + M)V(t),$$

当 c 足够大使得 $-c\xi + TM < 0$,则有

$$\int_s^{s+T} (-c\alpha(t) + M) dt < 0.$$

所以定理1,2在耦合强度足够大的时候仍然成立.证

明结束.

例2 考虑图4所示的 G_a, G_b ,它们都是无向图,并且它们的并所得的图中正权值的边构成连通图,即 $G_a \cup G_b$ 包含一个有正权值的边构成的生成树.在仿真验证中,我们让通信拓扑在 G_a, G_b 之间以周期1 s来回切换.系统的初值由随机程序生成. G_a, G_b 中边的权重设置为 $c > 0$.图5表明当 $c=0.1$,由于负边的存在,系统并不收敛.当 c 增大到0.5时可以看到系统开始收敛,并以指数速率收敛,其速率小于0.2(图6).当 $c=1$ 即耦合强度增大时,可以看到收敛速率增加,并且大于0.4(图7).这同样验证了本文的结论,耦合强度的增大能够提升收敛的速率,同时抑制负边带来的影响使得系统达到一致.

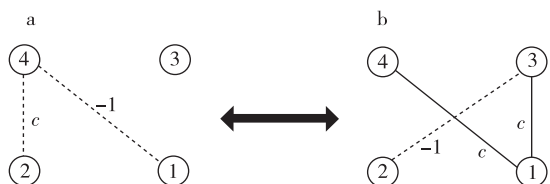


图4 带有负权值边的无向图

Fig. 4 Undirected graphs containing negative edge weights

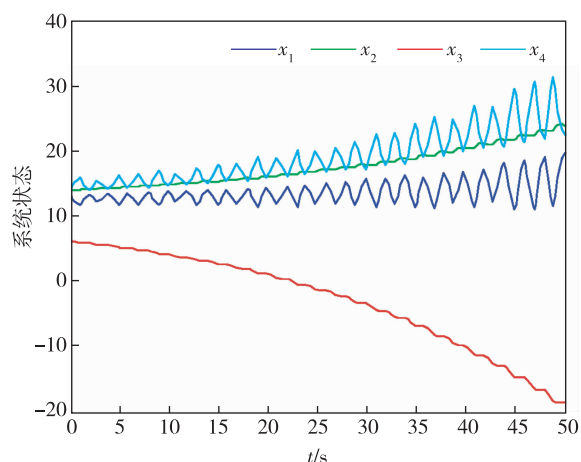


图5 当 $c=0.1$ 时,系统状态发散

Fig. 5 When $c=0.1$, the system states are divergent

7 总结

本文进一步对时变无向网络中的收敛速率进行了探讨.我们证明了,在一般的时变无向网络中,如果耦合权重增大那么收敛速率也随之提高.我们给出了收敛速率的明确下界,这个下界是耦合权重的线性函数.在此基础上,针对带符号网络进行了探讨,发现只要带有正权值的边具有 (δ, T) 连通性,那

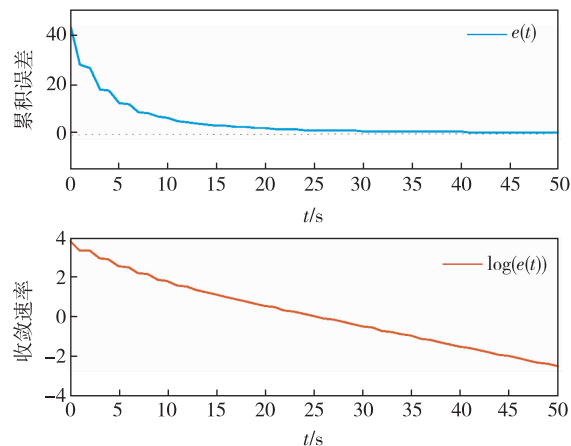


图6 当 $c=0.5$ 时,系统收敛,收敛速率小于0.2

Fig. 6 When $c=0.5$, the consensus error converges to zero, and the convergence rate is smaller than 0.2

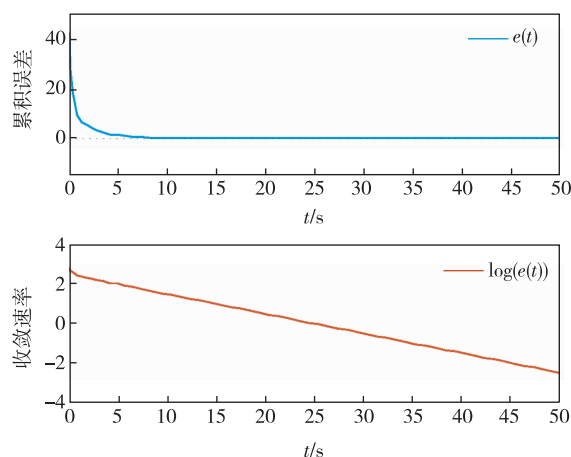


图7 当 $c=1$ 时,系统收敛,收敛速率大于0.4

Fig. 7 When $c=1$, the consensus error converges to zero, and the convergence rate is larger than 0.4

么增大这些边的权重而保持其余边(带有负权值)不变,一致性就能以指数的速率达到.整个证明过程使用了完全一致可观的概念.基于此还可以得到这样的结论,即一致性误差值可以从系统过去一段时间的相对状态值中重建.

参考文献

References

- [1] Qin J, Ma Q, Shi Y, et al. Recent advances in consensus of multi-agent systems: a brief survey [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2017, 64 (6) : 4972-4983
- [2] Cao M, Morse A S, Anderson B D O. Reaching a consensus in a dynamically changing environment: convergence rates, measurement delays, and asynchronous events [J]. Siam Journal on Control & Optimization,

- 2008, 47(2):601-623
- [3] Altafini C. Consensus problems on networks with antagonistic interactions [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(4):935-946
- [4] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(5):655-661
- [5] Moreau L. Stability of continuous-time distributed consensus algorithms [C] // 2014 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC), 2004:3998-4003
- [6] Anderson B D O, Shi G, Trumf J. Convergence and state reconstruction of time-varying multi-agent systems from complete observability theory [J]. IEEE Trans Autom Control, 2017, 62(5):2519-2523
- [7] Shi G, Johansson K H. The role of persistent graphs in the agreement seeking of social networks [J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2013, 31(9):595-606
- [8] Ortega R, Barabanov N. Global consensus of time-varying multi-agent systems without persistent excitation assumptions [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, DOI: 10.1109/TAC.2018.2803114
- [9] Shi G, Altafini C, Baras J S. Dynamics over signed networks [J]. e-Print, 2017, arXiv:1706.03362
- [10] Anderson B D O, Moore J B. Detectability and stabilizability of time-varying discrete-time linear systems [J]. Siam Journal on Control & Optimization, 1981, 19(1):20-32
- [11] Anderson B. Exponential stability of linear equations arising in adaptive identification [J]. IEEE Trans Auto Control, 1977, 22(1):83-88
- [12] Antonio Lorí, Panteley E. Uniform exponential stability of linear time-varying systems; revisited [J]. Systems & Control Letters, 2002, 47(1):13-24
- [13] Horn R A, Johnson C R. Matrix analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985

On convergence speed of interacting integrators over cooperative and competitive undirected networks

MA Qichao¹ QIN Jiahu¹ LI Man¹

¹ Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027

Abstract The convergence speed in the distributed consensus of integrators over both cooperative and competitive undirected networks is investigated in this paper. It has been well known that as long as the (δ, T) connectivity condition is satisfied, exponential convergence of the consensus can be attained. We further show that, for a cooperative network, increasing the coupling strength can improve the convergence speed. The lower bound of the convergence is also explicitly specified with respect to the coupling strength. Based on this, in the competitive network, the convergence of consensus can be guaranteed by strong cooperative couplings dominating the competitive ones. The results of this paper are established by means of a uniformly completely observable theory. We also show that it is possible to reconstruct the consensus error at a certain time instant from the observations of the past relative state information over a fixed length interval.

Key words time-varying network; convergence speed; signed networks; uniformly completely observable