



Lipschiz-type 的高阶非线性多智能体系统分布式优化算法研究

摘要

主要研究了具有 Lipschiz-type 非线性多智能体系统的分布式优化问题.在多智能体网络中,每个个体都拥有一个代价函数,整个多智能体网络的好坏由这些代价函数的和来进行评判.在整个过程中,每个目标仅知道局部的交互信息和其自身代价函数的梯度.为了实现协同优化的目标,提出了一个新的分布式优化算法,运用李雅普诺夫稳定性分析的方法可以证明该算法能够保证所有智能体实现协同优化.最后进行数值仿真,成功地验证了该算法的正确性和可行性.

关键词

多智能体系统; Lipschiz-type 非线性; 分布式优化

中图分类号 TP13

文献标志码 A

收稿日期 2018-06-05

资助项目 深圳市科技计划-基础研究自由探索项目(JCYJ20170306153912850);陕西省自然科学基金基础研究计划项目(2017JQ6016)

作者简介

赵宇(通信作者),男,博士,副教授,研究方向为多智能体系统.yuzhao5977@gmail.com

1 西北工业大学 深圳研究院,深圳,518057

2 西北工业大学 自动化学院,西安,710129

0 引言

多智能体系统相关研究一直是控制领域的热点问题和前沿问题.直观地说,多智能体系统是由多个具有分散性特征的个体通过自组织而成的一个集合,来完成单个个体无法完成的任务,其在集体层面呈现出统一的动作.在多智能体系统研究领域,有集中式和分布式两大组织结构.相比传统的集中式网络,分布式的算法有着更为突出的特点.分布式算法下,每个智能体更为灵活,且具有较强的可操作性.因此,分布式算法在国防建设、工业等领域有了迅猛的发展,并占有举足轻重的地位.

优化算法在人工智能、计算机通信等一些热门领域已有广泛的应用.在多智能体系统研究领域,目前的优化算法大多是集中式的^[1-2],并且该方面技术已经较为成熟.但是随着科技迅猛的发展,已有算法远不能满足社会的需求,暴露出很多亟待解决的问题,包括大数据的处理等问题.因此分布式优化理论是目前控制领域较为热门的话题.在早期的研究中,多智能体系统的动态结构主要是用积分器进行描述,文献[3]设计了近似投影一致性算法来计算凸集的相交,从而解决了分布式优化问题;文献[4]在研究分布式优化问题的过程中,首次应用了趋同协议算法.在这之后,关于分布式优化的研究^[5-6]有很大一部分都是基于趋同协议的.除此之外,也有大量文献研究,主要是设计一个分布式最优控制器来进行优化^[7-8].但是由于网络拓扑结构的复杂度以及需要大量的复杂计算,所设计的分布式控制器很难实现,或者即使设计出来也只是次优的.近年来,分布式优化理论得到了进一步的发展,文献[9]提出了一种基于一般线性系统的分布式优化算法,该算法的设计是基于通信拓扑的边或者点,并不需要全局的信息,具有很强的灵活性和可实现性.

对于分布式优化问题,简单来说,在多智能体网络中,每个个体都拥有一个代价函数,整个智能体网络的好坏由这些代价函数的和来进行评判.整个运行过程是通过每个智能体之间信息的交流来实现整个智能体系统优化的,在这个过程当中每个智能体也只知道自己的代价函数.最终在已有的分布式算法的前提下,可以通过证明推导出多智能体系统达到一致性的条件.本文主要研究了具有 Lipschiz-

type 非线性结构的多智能体系统的分布式优化问题.为了实现多个智能体协同优化的目标,设计并提出了一个新的分布式优化算法.

1 预备知识

本文在证明以及叙述过程当中将用到如下的一些数学符号. \mathbf{R}^+ 代表正的实数集, \mathbf{R}^n 代表 n 维实向量空间, $\mathbf{R}^{n \times m}$ 代表 $n \times m$ 维实数矩阵. \mathbf{I}_n 代表 n 维单位矩阵, 向量 $\mathbf{1}$ 表示元素全为 1 的列向量. 矩阵不等式 $\mathbf{A} > (\geq) \mathbf{B}$ 意味着 $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ 是正定(半正定) 矩阵, 反之 $\mathbf{A} < (\leq) \mathbf{B}$ 意味着 $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ 是负定(半负定) 矩阵. 对于矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 和 $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{p \times q}$, $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ 表示矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的 Kronecker 积. 对于向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$, $\|\mathbf{x}\|$ 表示向量 \mathbf{x} 的 2 范数. $\text{SGN}(\mathbf{x}) = [\text{sgn}(x_1), \text{sgn}(x_2), \dots, \text{sgn}(x_n)]^T$, 其中 sgn 代表符号函数, SGN 代表写成矩阵形式的符号函数. 对于一个集合 V , $|V|$ 代表集合 V 中元素的个数.

本文将各个智能体之间的相互关系通过无向的拓扑图表示. 假设无向图用 \mathcal{G} 来表示, 它是由 N 个点和若干条无向的线组成. \mathcal{N} 代表所有点的集合, 其中每个点代表一个智能体. \mathcal{N} 中有信息交互的两点组成一条边, 所有的边构成了边集 \mathcal{E} . 符号 $(i, j)_k \in \mathcal{E}$ 表示边 k 连接了点 i 和 j , 并且满足 $i > j$. 在一个无向图中, 点 i_1 和点 i_s 之间的无向路径可以用一系列无向的边来进行描述, 即 $(i_k; i_{k+1}), k = 1, 2, \dots, s - 1$. 若有一条路径可以通过每一个点, 则认为该图是连通的. 所以一个无向图 \mathcal{G} 可以通过点集 \mathcal{N} 和边集 \mathcal{E} 进行简单的描述. 下面介绍图论中所要用到的一些简单矩阵.

定义邻接矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{N \times N}$, 如果 $(i, j) \in \mathcal{E}$, 则 $a_{ij} = 1$, 相反 $a_{ij} = 0$. 也就是说如果点 i 和 j 间存在路径, 那么 $a_{ij} = 1$. 显然邻接矩阵 \mathbf{A} 对角线上全为 0. 定义拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L} = (l_{ij}) \in \mathbf{R}^{N \times N}$, 其中 $l_{ii} = \sum_{j=1}^N a_{ij}$. 若 $i \neq j, l_{ii} = -a_{ij}$. 显然矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{L} 均为对称矩阵. 对角矩阵 $\mathbf{\Delta}(\mathcal{G})$ 只在其对角线上有非零元素, 数值为对应点所引出边的个数. 最后给出关联矩阵 \mathbf{D} 的定义, \mathbf{D} 的大小为 $|\mathcal{N}| \times |\mathcal{E}|$. 如果边 $(i, j)_k \in \mathcal{E}$, 则有 $d_{ik} = 1, d_{jk} = -1$, 反之则为 0. 那么根据以上的矩阵, 可有如下的结论: $\mathbf{L} = \mathbf{D}\mathbf{D}^T = \mathbf{\Delta}(\mathcal{G}) - \mathbf{A}(\mathcal{G})$.

假设 1 在本文中所提到的图均为无向图, 并且是连通图.

2 分布式优化算法分析

2.1 问题描述

考虑一个由 N 个智能体组成的多智能体系统, 那么第 i 个智能体可由如下系统来描述:

$$\dot{\mathbf{p}}_i(t) = \mathbf{A}\mathbf{p}_i(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{p}_i(t) \in \mathbf{R}^n$ 代表智能体 i 的状态, $\mathbf{u}_i(t) \in \mathbf{R}^p$ 是智能体 i 的控制输入, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和 $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times p}$ 是常数矩阵.

这篇文章的主要目的是设计一个控制器 $\mathbf{u}_i(t)$, 并且其只能用到每个智能体局部的相互作用的信息, 从而使所有的智能体协同达到一个最优状态 \mathbf{s}^* , 即:

$$\min \sum_{i=1}^N g_i(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in \mathbf{R}^n, \quad (2)$$

其中 $g_i(\mathbf{s}): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个只被 i 知道的局部目标函数, 假设 $g_i(\mathbf{s})$ 满足:

假设 2 局部目标函数 $g_i(\mathbf{s})$ 是凸函数且可导, 满足:

$$\frac{\partial g_i(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{s} + \tilde{\mathbf{B}}f_i(\mathbf{s}, t), \quad (3)$$

其中 $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{R}\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{R}\mathbf{B}, \mathbf{R}$ 是一个负定的矩阵. $f_i: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^p$ 是一个非线性函数, 并且满足 Lipschitz-type 条件: 对于任何的 $\mathbf{z}_i(t) \in \mathbf{R}^n, i = 1, 2, t > 0$, 满足 $\|f_i(\mathbf{z}_1, t) - f_i(\mathbf{z}_2, t)\| \leq \gamma \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\| + \gamma_0$, 并且 $\|f_i(0, t)\| \leq \delta_0$. 其中 $\gamma > 0$, 称为 Lipschitz 常数, $0 < \gamma_0 < \infty, 0 < \delta_0 < \infty$ 为两个正的常数.

很明显, $\sum_{i=1}^N g_i(\mathbf{s})$ 也是一个可导的凸函数. 那么最终如果 $\sum_{i=1}^N g_i(\mathbf{s})$ 能够取得最小值, 所有的智能体将达到一致状态, 即:

$$\min \sum_{i=1}^N g_i(\mathbf{p}_i) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t)\| = 0. \quad (4)$$

在本文后续的研究中将会用到下面的假设和引理.

假设 3 每个智能体所对应的局部目标函数 $g_i(\mathbf{p}_i)$ 是非空的, 并且存在 $\mathbf{p}_i^* \in \mathbf{R}^n$ 使得 $g_i(\mathbf{p}_i^*)$ 是最小的.

假设 4 系统 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 可稳定.

引理 1^[10] 在假设 1 的前提下, 0 是拉普拉斯矩阵 \mathbf{L} 最简单的一个特征值, 它对应的特征向量为 $\mathbf{1}$. 并且其他的特征值均为正, 其最小的非零特征值 λ_2

$$\text{满足 } \lambda_2 = \min_{\mathbf{z} \neq 0, \mathbf{1}^T \mathbf{z} = 0} \frac{\mathbf{z}^T \mathbf{L} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^T \mathbf{z}}.$$

引理 2^[11] 在假设 1 的前提下,对于任何向量 $z \in \mathbf{R}^n$,有 $z^T \mathbf{L} \mathbf{D} \boldsymbol{\theta} \text{sgn}(\mathbf{D}^T z) \geq \lambda_2 z^T \mathbf{D} \boldsymbol{\theta} \text{sgn}(\mathbf{D}^T z)$,其中 $\boldsymbol{\theta}$ 为正定对角矩阵.

引理 3^[12] 考虑一个连续可导的凸函数 $F(s): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$.若当且仅当 $\lim_{s \rightarrow x} \partial F(s) / \partial s = 0$,那么 $x \in \mathbf{R}^n$ 是 $F(s)$ 的全局极小值.

2.2 分布式优化算法设计

在接下来的篇幅中,为了解决(2)中的凸优化问题,提出了一个分布式的算法,最终在整体代价函数

$\sum_{i=1}^N g_i(\mathbf{p}_i)$ 取得最小时,所有的智能体达到一致状态.首先给出控制输入:

$$\mathbf{u}_i(t) = -c \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} [\mathbf{K}(\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t))] - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \theta_{ij} \text{sgn}[\mathbf{K}(\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t))] + f_i(\mathbf{p}_i, t), \quad (5)$$

其中 $\theta_{ij} = \alpha (\|\mathbf{p}_i(t)\| + \|\mathbf{p}_j(t)\|) + \beta$,它是个依赖于状态的时变参数. α 和 β 是两个常数, \mathbf{K} 为增益矩阵, $\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{P}$.控制输入 $\mathbf{u}_i(t)$ 的前两项保证了所有的智能体能够最终达到一致状态,第三项 $f_i(\mathbf{p}_i, t)$ 是 $g_i(\mathbf{p}_i)$ 的负梯度,正是如此才保证 $\sum_{i=1}^N g_i(\mathbf{p}_i)$ 取得最小.

定理 1 在假设 1—4 成立的前提下,对于一般的非线性多智能体系统(1),通过所给出的控制输入(5),如果满足如下条件,则问题(4)可以得到解决:

$$\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0, \quad (6)$$

其中 $\mathbf{Q} > 0, \mathbf{P} > 0, \mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{P}$.对于参数 α, β, c 满足 $\alpha > \frac{\gamma}{\lambda_2}, \beta > \frac{\gamma_0 + \delta_0}{\lambda_2}, c \geq \frac{1}{2\lambda_2}$.

证明 整个证明过程分为两步.首先是证明所有的智能体在设计的 $\mathbf{u}_i(t)$ 下能够达到一个一致状态.将式(5)代入式(1)可以得到:

$$\dot{\mathbf{p}}_i(t) = \mathbf{A} \mathbf{p}_i(t) - c \mathbf{B} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} [\mathbf{K}(\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t))] - \mathbf{B} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \theta_{ij} \text{sgn}[\mathbf{K}(\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t))] + \mathbf{B} f_i(\mathbf{p}_i, t). \quad (7)$$

令

$$\mathbf{p}(t) = (\mathbf{p}_1^T(t), \mathbf{p}_2^T(t), \dots, \mathbf{p}_N^T(t))^T,$$

$$\boldsymbol{\theta} = \text{diag}\{\theta_{ij}\},$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}, t) = (f_1^T(\mathbf{p}_1, t), f_2^T(\mathbf{p}_2, t), \dots, f_N^T(\mathbf{p}_N, t)).$$

则式(7)可写成如下形式:

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}) \mathbf{p}(t) - c(\mathbf{L} \otimes \mathbf{B} \mathbf{K}) \mathbf{p}(t) - (\mathbf{D} \boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{B}) \text{SGN}[(\mathbf{D}^T \otimes \mathbf{K}) \mathbf{p}(t)] + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{B}) \mathbf{F}(\mathbf{p}, t), \quad (8)$$

其中 \mathbf{D} 为关联矩阵.定义 $\mathbf{M} = \mathbf{I}_N - \frac{1}{N} \mathbf{1} \mathbf{1}^T$,则 \mathbf{M} 满足如下结论:首先 0 是对应于特征向量 $\mathbf{1}$ 的简单特征值,即 $\mathbf{M} \mathbf{1} = \mathbf{1}^T \mathbf{M} = 0$.其次由于 $\mathbf{L}^T = \mathbf{L}$,因此 $\mathbf{L} \mathbf{M} = \mathbf{L}(\mathbf{I}_N - \frac{1}{N} \mathbf{1} \mathbf{1}^T) = \mathbf{L} - \frac{1}{N} \mathbf{L} \mathbf{1} \mathbf{1}^T = \mathbf{L} = \mathbf{L} - \frac{1}{N} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \mathbf{L} = (\mathbf{I}_N - \frac{1}{N} \mathbf{1} \mathbf{1}^T) \mathbf{L} = \mathbf{M} \mathbf{L}$.最后 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{M}(\mathbf{I}_N - \frac{1}{N} (\mathbf{1} \mathbf{1}^T)) = \mathbf{M} - \frac{1}{N} (\mathbf{M} \mathbf{1} \mathbf{1}^T) = \mathbf{M}$.

令 $\boldsymbol{\xi}(t) = (\mathbf{M} \otimes \mathbf{I}) \mathbf{p}(t)$,其中 $\boldsymbol{\xi}(t) = (\boldsymbol{\xi}_1^T(t), \boldsymbol{\xi}_2^T(t), \dots, \boldsymbol{\xi}_N^T(t))^T$,如果所有智能体状态达到一致,即 $\mathbf{p}_1(t) = \mathbf{p}_2(t) = \dots = \mathbf{p}_N(t)$,那么 $\boldsymbol{\xi}(t) = 0$.因此,

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}) \boldsymbol{\xi}(t) - c(\mathbf{L} \otimes \mathbf{B} \mathbf{K}) \boldsymbol{\xi}(t) - (\mathbf{D} \boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{B}) \text{SGN}[(\mathbf{D}^T \otimes \mathbf{K}) \boldsymbol{\xi}(t)] + (\mathbf{M} \otimes \mathbf{B}) \mathbf{F}(\mathbf{p}, t). \quad (9)$$

运用李雅普诺夫稳定性分析的方法构造 $V(t) = \boldsymbol{\xi}^T(\mathbf{L} \otimes \mathbf{P}) \boldsymbol{\xi}$,根据 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 的定义很清楚可以得到 $(\mathbf{1}^T \otimes \mathbf{I}) \boldsymbol{\xi} = 0$.对于连通图来说,

$$V(t) \geq \lambda_2 \lambda_{\min}(\mathbf{P}) \|\boldsymbol{\xi}\|^2, \quad (10)$$

其中 $\lambda_{\min}(\mathbf{P})$ 是正矩阵 \mathbf{P} 的最小特征值.接下来对 V 求导并将 $\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{P}$ 代入可得:

$$\dot{V} = \boldsymbol{\xi}^T [\mathbf{L} \otimes (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) - 2c(\mathbf{L}^2 \otimes \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P})] \boldsymbol{\xi} - 2\boldsymbol{\xi}^T (\mathbf{L} \mathbf{D} \boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{P} \mathbf{B}) \text{SGN}[(\mathbf{D}^T \otimes \mathbf{B}^T \mathbf{P}) \boldsymbol{\xi}] + 2\boldsymbol{\xi}^T (\mathbf{L} \otimes \mathbf{P} \mathbf{B}) \mathbf{F}(\mathbf{p}, t). \quad (11)$$

根据引理 2,可以得到如下的不等式:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \boldsymbol{\xi}^T [\mathbf{L} \otimes (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) - 2c(\mathbf{L}^2 \otimes \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P})] \boldsymbol{\xi} - \\ & 2\lambda_2 \boldsymbol{\xi}^T (\mathbf{D} \boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{P} \mathbf{B}) \text{SGN}[(\mathbf{D}^T \otimes \mathbf{B}^T \mathbf{P}) \boldsymbol{\xi}] + \\ & 2\boldsymbol{\xi}^T (\mathbf{L} \otimes \mathbf{P} \mathbf{B}) \mathbf{F}(\mathbf{p}, t) = \boldsymbol{\xi}^T [\mathbf{L} \otimes (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) - \\ & 2c(\mathbf{L}^2 \otimes \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P})] \boldsymbol{\xi} - 2\lambda_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \theta_{ij} [\mathbf{B}^T \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}_i(t) - \\ & \boldsymbol{\xi}_j(t))]^T \text{SGN}[\mathbf{B}^T \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}_i(t) - \boldsymbol{\xi}_j(t))] + \\ & 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [\mathbf{B}^T \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}_i(t) - \boldsymbol{\xi}_j(t))]^T [f(\mathbf{p}_i, t) - \\ & f(\mathbf{p}_j, t) + f(0, t)]. \end{aligned} \quad (12)$$

根据 $\mathbf{z}^T \text{sgn}(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z}\|$ 以及假设 2 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \boldsymbol{\xi}^T [\mathbf{L} \otimes (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) - 2c(\mathbf{L}^2 \otimes \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P})] \boldsymbol{\xi} - \\ & 2\lambda_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \theta_{ij} \|\mathbf{B}^T \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}_i(t) - \boldsymbol{\xi}_j(t))\| + \\ & 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|\mathbf{B}^T \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}_i(t) - \boldsymbol{\xi}_j(t))\| [\|f(\mathbf{p}_i, t) - \\ & f(\mathbf{p}_j, t)\| + \|f(0, t)\|] \leq \boldsymbol{\xi}^T [\mathbf{L} \otimes (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) - \\ & 2c(\mathbf{L}^2 \otimes \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P})] \boldsymbol{\xi} - 2\lambda_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \theta_{ij} \|\mathbf{B}^T \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}_i(t) - \end{aligned}$$

$$\xi_j(t)) \| + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} \| \mathbf{B}^T \mathbf{P}(\xi_i(t) - \xi_j(t)) \| (\gamma \| \mathbf{p}_i \| + \gamma_0 + \delta_0). \quad (13)$$

又因为 $\theta_{ij} = \alpha (\| \mathbf{p}_i(t) \| + \| \mathbf{p}_j(t) \|) + \beta$, 那么,

$$\dot{V} \leq \xi^T [\mathbf{L} \otimes (\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) - 2c(\mathbf{L}^2 \otimes \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P})] \xi - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} [(\alpha \lambda_2 - \gamma) \| \mathbf{p}_i \| + (\beta \lambda_2 - \gamma_0 - \delta_0)] \| \mathbf{B}^T \mathbf{P}(\xi_i(t) - \xi_j(t)) \|. \quad (14)$$

根据定理 1 中 $\alpha > \frac{\gamma}{\lambda_2}, \beta > \frac{\gamma_0 + \delta_0}{\lambda_2}, c \geq \frac{1}{2\lambda_2}$,

可得:

$$\dot{V} \leq \xi^T [\mathbf{L} \otimes (\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) - 2c(\mathbf{L}^2 \otimes \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P})] \xi \leq -\eta V, \quad (15)$$

其中 $\eta = \lambda_{\min}(\mathbf{Q}) / \lambda_{\max}(\mathbf{P})$, 最终可以得到:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\mathbf{p}_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{p}_k(t) \right) = 0. \quad (16)$$

至此,我们证明了运用上述算法可以使多智能体系统达到一致状态.接下来证明所达到的这个一致状态是最优状态.

令 $\mathbf{p}^*(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i(t)$, $\mathbf{p}^*(t)$ 是上述证明中所

达到的一致状态,对时间 t 求导则有:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}^*(t)}{dt} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i(t) = \\ & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \mathbf{A}\mathbf{p}_i(t) - c\mathbf{B} \sum_{j \in N_i} a_{ij} [\mathbf{K}(\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t))] - \right. \\ & \left. \mathbf{B} \sum_{j \in N_i} \theta_{ij} \text{sgn}[\mathbf{K}(\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t))] + \mathbf{B}f_i(\mathbf{p}_i, t) \right\} = \\ & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \mathbf{A}\mathbf{p}_i(t) + \mathbf{B}f_i(\mathbf{p}_i, t) \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

在假设 1 和 2 的前提下,可以得到:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{d\mathbf{p}^*(t)}{dt} - \frac{1}{N} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \sum_{i=1}^N g_i(\mathbf{p}^*)}{\partial \mathbf{p}^*} \right\} &= \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\mathbf{A}\mathbf{p}_i(t) + \mathbf{B}f_i(\mathbf{p}_i, t)] - \right. \\ & \left. \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{A}}\mathbf{p}^*(t) + \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{B}}f_i(\mathbf{p}_i, t)] \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

在(18)的基础上进一步可以得到:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{d \sum_{i=1}^N g_i(\mathbf{p}^*(t))}{dt} - \frac{1}{N} \left(\frac{\partial \sum_{i=1}^N g_i(\mathbf{p}^*)}{\partial \mathbf{p}^*} \right)^T \mathbf{R}^{-1} \left(\frac{\partial \sum_{i=1}^N g_i(\mathbf{p}^*)}{\partial \mathbf{p}^*} \right) \right\} = 0.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{\partial \sum_{i=1}^N g_i(\mathbf{p}^*)}{\partial \mathbf{p}^*} \right)^T \left[\frac{d\mathbf{p}^*(t)}{dt} - \frac{1}{N} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \sum_{i=1}^N g_i(\mathbf{p}^*)}{\partial \mathbf{p}^*} \right] \right\} = 0. \quad (19)$$

在假设 3 的前提下, $\sum_{i=1}^N g_i(\mathbf{p}^*(t))$ 是有下界的,又根据 $\mathbf{R} < 0$ 和 LaSalle 不变性原理,可以得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \sum_{i=1}^N g_i(\mathbf{p}^*(t))}{\partial \mathbf{p}^*(t)} = 0. \text{ 根据引理 3 可知,当 } t \rightarrow \infty \text{ 时, } \mathbf{p}^*(t) \text{ 使得 } \sum_{i=1}^N g_i(\mathbf{p}(t)) \text{ 取得最小值,证明完成.}$$

3 仿真结果

3.1 参数配置

考虑一个由 6 个智能体组成的二阶多智能体系统,如图 1 所示.它可以用式(1)描述,并且 $\mathbf{p}_i(t) = [p_{i1}(t), p_{i2}(t)]^T, i = 1, 2, \dots, 6$,对于每个智能体,它的非线性函数全部满足 Lipschitz 条件. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = [2 \ 1]$. 很显然,系统 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 可稳定,满足假设 4.

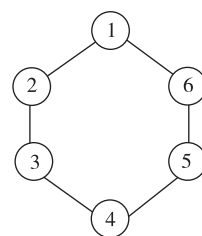


图 1 多智能体系统通信拓扑结构

Fig. 1 Communication topology with six agents

根据假设 2,设置局部目标函数为

$$g_i(\mathbf{p}_i(t)) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{i1} \\ \mathbf{p}_{i2} \\ f_i(\mathbf{p}_i, t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{i1} \\ \mathbf{p}_{i2} \\ f_i(\mathbf{p}_i, t) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

3.2 仿真结果

图 2 显示的是 6 个智能体的 2 个状态.6 种不同颜色分别代表 6 个不同的智能体.

从图 2 中可以清楚地看到,在一定的时间后,6 个多智能体系统的状态达到一致,初步实现了一致性.接下来要判断该一致状态是否是最优的一致状

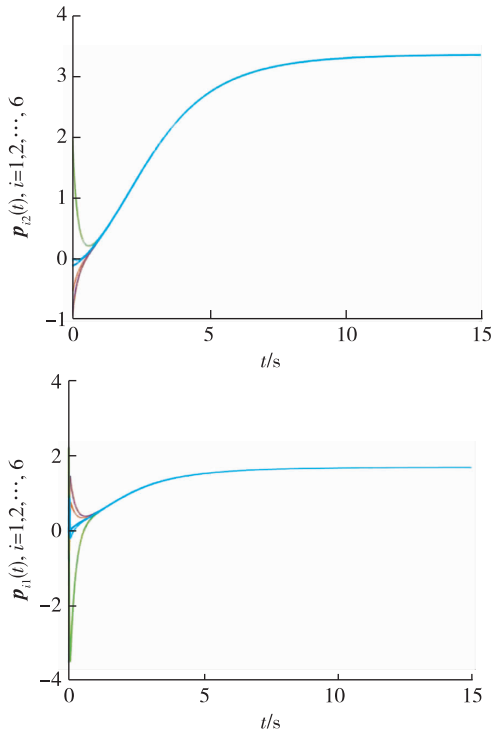


图2 多智能体系统的状态
Fig. 2 States of multi-agent system

态,就要看局部目标函数之和 $\sum_{i=1}^N g_i(\mathbf{p}_i)$ 能否取到最小值.通过绘图,可以看到图3所示的结果.

为了更加清楚地比较,图4给出了每个智能体的局部目标函数.其中红线代表没有连接网络时局

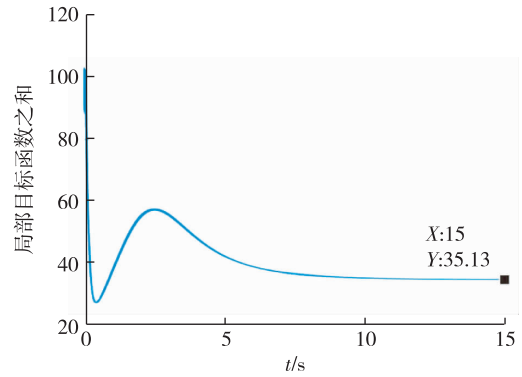


图3 局部目标函数之和 $\sum_{i=1}^N g_i(\mathbf{p}_i)$

Fig. 3 Sum of all local function $\sum_{i=1}^N g_i(\mathbf{p}_i)$

部目标函数的最优值,蓝线代表运用分布式优化算法后每个局部目标函数的值.

4 结束语

本文针对 Lipschiz-type 的非线性多智能体系统,提出了一种新的分布式优化算法,并且通过李雅普诺夫稳定性分析的方法证明了该算法不仅能够保证多智能体系统实现一致,还能保证所达到的一致状态是一个最优状态.相比之前的工作,本文所研究的 Lipschiz-type 的非线性模型更符合实际情况,并且算法中所需要的信息均为每个智能体的局部信息,更容易获得.

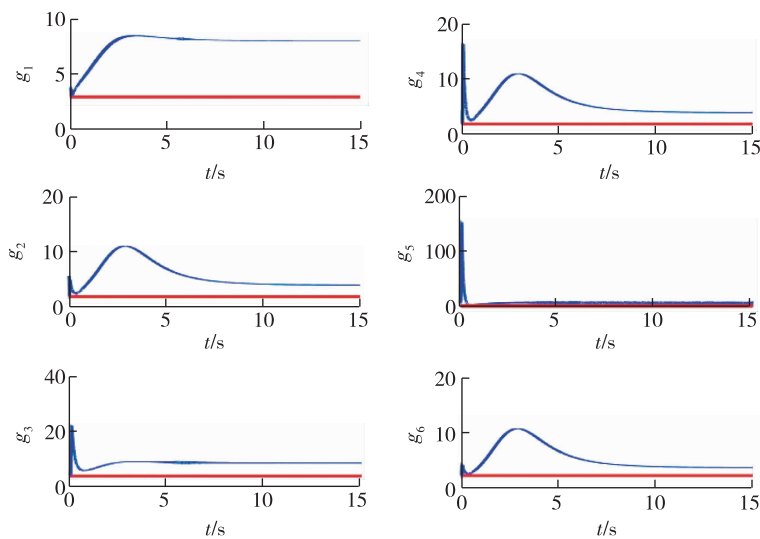


图4 没有连接网络局部目标函数最优值与基于定理1的分布式优化问题

Fig. 4 Comparisons between the distributed optimization problem with Theorem 1 and the local optimization problem without network

参考文献

References

- [1] Boyd P S, Vandenberghe L. Convex optimization [M]. New York: Cambridge University Press, 2004
- [2] Osborne J M, Rubinstein A. A course in game theory [M]. Cambridge, MA: MIT Press, 1994
- [3] Lou Y C, Shi G D, Johansson K H, et al. Approximate projected consensus for convex intersection computation; convergence analysis and critical error angle [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59 (7): 1722-1736
- [4] Nedic A, Ozdaglar A. Distributed subgradient methods for multi-agent optimization [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54 (1): 48-61
- [5] Lobel I, Ozdaglar A. Distributed subgradient methods for convex optimization over random networks [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56 (6): 1291-1306
- [6] Shi G D, Johansson K, Hong Y G. Reaching an optimal consensus; dynamical systems that compute intersections of convex sets [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58 (3): 610-622
- [7] Papadimitriou C H, Tsitsiklis J N. Intractable problems in control theory [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1986, 24 (4): 639-654
- [8] Borrelli F, Keviczky T. Distributed LQR design for identical dynamically decoupled systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53 (8): 1901-1912
- [9] Zhao Y, Liu Y F, Wen G H, et al. Distributed optimization for linear multiagent systems; edge-and node-based adaptive designs [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62 (7): 3602-3609
- [10] Godsil C, Royle G. Algebraic graph theory [M]. New York, NY: Springer, 2001
- [11] Ghapani S, Rahili S, Ren W. Distributed average tracking of physical second-order agents with heterogeneous unknown nonlinear dynamics without constraint on input signals [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, DOI: 10. 1109/TAC.2018. 2840452
- [12] Boyd S, Vandenberghe L. Convex optimization [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004

Distributed optimization for Lipschiz-type high-order nonlinear multi-agent systems

WU Shengshuai^{1,2} ZHAO Yu^{1,2}

1 Research & Development Institute of Northwestern Polytechnical University in Shenzhen, Shenzhen 518057

2 School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129

Abstract In this paper, the distributed optimization problem of multi-agent system with Lipschiz-type nonlinear dynamics is studied. For a multi-agent system, each agent has a local performance function. The quality of the whole multi-agent network is judged by the sum of these local performance functions. In the whole process, each agent only knows local interaction information and the gradient of its own objective function. In order to achieve the goal of cooperative optimization, a new distributed optimization algorithm is proposed. Furthermore, by utilizing the Lyapunov stability and optimization analysis, the distributed cooperative optimization problems for Lipschiz-type nonlinear multi-agent systems are solved. Finally, a numerical simulation is shown to verify the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words multi-agent system; Lipschiz-type nonlinear; distributed optimization