



# 一类二阶非线性多智能体系统的固定时间同步控制

## 摘要

研究了一类具有主从结构的二阶非线性多智能体系统的固定时间同步问题.基于齐次系统理论,设计了一个新的固定时间同步控制算法,使得多智能体系统可以在固定时间之内达到同步.理论研究表明,多智能体系统的同步时间可以预先确定并且不依赖于任何系统初始条件.最后,对多智能体系统的同步进行了数值仿真,验证了该方法的有效性.

## 关键词

固定时间控制;多智能体系统;非线性系统;齐次性方法;同步控制

中图分类号 TP13

文献标志码 A

收稿日期 2018-06-06

资助项目 国家自然科学基金(61673153, 61673104, 61304007);中央高校基本科研业务费专项资金(JZ2017HGPA0163, JZ2016HCXJ023)

## 作者简介

都海波(通信作者),男,博士,副教授,研究方向为多智能体系统协调控制、有限时间/非光滑控制理论和应用等. haibo.du@hfut.edu.cn

## 0 引言

近年来,由于多智能体系统的诸多应用,如群集控制<sup>[1]</sup>、编队控制<sup>[2]</sup>、多导弹的协同攻击<sup>[3]</sup>等,使得其一致性或同步问题得到广泛关注.多智能体系统同步控制的要求是使得所有智能体的输出收敛到一个被称为最终一致状态的值<sup>[4]</sup>.显而易见,一致性状态和收敛速度是研究一致性问题的关键.

通常,多智能体系统可分为无领导多智能体系统和有领导者的主从式多智能体系统.对于无领导的多智能体系统,最终的一致状态通常依赖于初始状态,如平均一致性<sup>[4]</sup>.对于存在领导者的主从式多智能体系统,最终的一致状态是领导者的状态,它可以是一个虚拟量并且表示期望的参考信号.领导者独立于跟随者,但对跟随者的行为存在影响.基于此,可以仅仅通过控制领导者来实现对一组智能体的控制.因此,对主从式多智能体系统的一致性跟踪研究是非常有趣的.如果领导者是固定的,例如食物来源,那么针对不同的多智能体系统一致性问题的提出了一些跟踪控制算法<sup>[5-6]</sup>.当领导者是动态的,也考虑了相应的一致性控制算法,如对于一阶多智能体系统<sup>[7]</sup>和二阶多智能体系统<sup>[8-9]</sup>.

收敛速度是一致性问题研究中的另一个重要课题.然而,大多数现有的针对多智能体系统的一致性/同步算法只是渐近稳定的.与渐近稳定相比,具有有限时间收敛的闭环系统通常表现出更快的收敛速度和更好的抗干扰性能<sup>[10-14]</sup>.基于此,有限时间一致性/同步问题受到了广泛的关注.针对一阶多智能体系统,相关文献提出了几种有限时间一致性算法<sup>[15-16]</sup>.针对二阶系统的情况,也设计出了一些有限时间一致性算法<sup>[12,17-18]</sup>.上述有限时间算法的同步时间通常取决于多智能体系统的初始状态.为了消除有限时间算法的这种局限性,进一步提出了固定时间稳定性的概念<sup>[19]</sup>,其在未知初始条件下系统收敛到平衡点的时间是可以预先确定的.在固定时间稳定性这一框架之下,关于固定时间同步控制已经产生一些结果,如对于一阶多智能体系统<sup>[20]</sup>、二阶多智能体系统<sup>[21]</sup>以及高阶多智能体系统<sup>[22]</sup>.

基于上述固定时间控制技术的优点,本文旨在解决一类二阶非线性多智能体系统的固定时间同步控制问题.受到文献[23-24]的启发,本文利用齐次性思想设计了固定时间同步控制器,大大简化了控制器的设计.具体而言,整个控制器设计包括全局指数稳定、全局固定

1 合肥工业大学 电气与自动化工程学院,合肥, 230009

2 东南大学 数学学院,南京,210096

时间吸引和局部有限时间稳定三部分.通过严格的证明,在所提出的控制器下,系统可以在与初始条件无关的固定时间内实现同步.最后,给出了多个非线性单摆系统的仿真实例,说明了该控制器的有效性.

## 1 数学模型介绍

### 1.1 数学模型

如文献[8-9],本文考虑  $n$  个智能体(称为跟随者)的同步问题.每一个智能体都可以通过二阶非线性动力学方程来进行描述,其形式为

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= p_i, \quad \dot{p}_i = f(t, q_i, p_i) + u_i, \\ i &\in \Gamma = \{1, 2, \dots, n\}, \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $q_i, p_i$  分别表示智能体的位置和速度,  $u_i$  表示将要设计的控制输入,  $f(\cdot)$  是用来描述智能体本身动力学的非线性连续函数.领导者的动态用下述系统来描述:

$$\dot{q}_d = p_d, \quad \dot{p}_d = f(t, q_d, p_d), \quad (2)$$

式中  $q_d, p_d$  分别表示领导者的位置和速度,  $f(\cdot)$  是用来描述领导者动力学的非线性连续函数.

### 1.2 图论

对于所考虑的多智能体系统,即主从式多智能体系统(1)–(2),假定每个智能体是一个节点,跟随者的信息交换用无向图  $G = \{V, E, A\}$  表示.  $V = \{v_i, i = 1, \dots, n\}$  是顶点集,  $E \subseteq V \times V$  是边的集合,  $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是图  $G$  的加权邻接矩阵.定义集合  $\Gamma = \{1, \dots, n\}$ .如果在智能体  $i$  和  $j$  之间存在通信,即,  $(v_i, v_j) \in E$ , 则有  $a_{ij} = a_{ji} > 0$ .如果在智能体  $i$  和  $j$  之间不存在通信,则有  $a_{ij} = a_{ji} = 0$ .此外,假设对于所有的  $i \in \Gamma, a_{ii} = 0$ .节点  $v_i$  的邻域集合由  $N_i = \{j: (v_i, v_j) \in E\}$  表示.节点  $v_i$  的出度定义为  $\text{deg}_{\text{out}}(v_i) = d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j \in N_i} a_{ij}$ .有向图  $G$  的度矩阵表示为  $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$ .有向图  $G$  的拉普拉斯矩阵表示为  $L = D - A$ .在有向图  $G$  中,从节点  $v_i$  到节点  $v_j$  的路径是由  $v_i$  开始到  $v_j$  结束的由连续的边构成.如果在任意两个顶点之间存在路径,那么图  $G$  是连通的.

假设领导者(标记为 0)可以用顶  $v_0$  点来描述.跟随者与领导者之间的连接权重可以由  $b_i, i \in \Gamma$  来表示.如果第  $i$  个跟随者与领导者相连,即这个跟随者可以直接获得领导者的信息,那么  $b_i > 0$ , 否则,  $b_i = 0$ .定义矩阵  $B = \text{diag}\{b_1, \dots, b_n\}$ .

### 1.3 假设条件

**假设 1** 对于  $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}$  和  $\forall t \geq 0$ , 存

在一个已知的正常数  $\rho$  使得  $|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leq \rho(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$ .

**假设 2** 针对主-从多智能体系统(1)–(2), 跟随者的图  $G$  是无向连通的, 并且至少有一个跟随者可以连接到领导者, 即  $B \neq 0$ .

### 1.4 定义和引理

**定义 1** (有限时间稳定性和固定时间稳定性<sup>[10,19]</sup>) 考虑非线性系统:

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (3)$$

式中  $f(\cdot): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  是一个连续向量函数.如果系统是 Lyapunov 稳定和有限时间收敛,那么在原点处它是有限时间稳定平衡.有限时间收敛意味着存在一个函数  $T(x_0)$ , 使得  $\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t, x_0) = 0$  和  $x(t, x_0) = 0, \forall t \geq T(x_0)$ .如果系统是有限时间稳定和固定时间收敛的,其要求收敛时间满足  $\sup_{x_0} T(x_0) < +\infty$ , 则称该系统为固定时间稳定.

**定义 2** (齐次性<sup>[23]</sup>) 考虑到系统(3), 定义扩张  $(r_1, \dots, r_m) \in \mathbf{R}^m, r_i > 0, i = 1, \dots, m$ .令  $f(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x)]^T$  为一个连续的向量场.  $f(x)$  对于扩张  $(r_1, \dots, r_m)$  的齐次度为  $k \in \mathbf{R}$ .如果对任意给出的  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $f_i(\varepsilon^{r_i} x_1, \dots, \varepsilon^{r_m} x_m) = \varepsilon^{k+r_i} f_i(x), i = 1, \dots, m, \forall x \in \mathbf{R}^m$ , 式中  $k > -\min\{r_i, i = 1, \dots, m\}$ .如果  $f(x)$  是齐次的, 那么系统  $\dot{x} = f(x)$  被称为齐次的.

**定义 3** 定义函数  $\text{sig}^\alpha(x) = \text{sign}(x)|x|^\alpha$ , 式中  $\alpha \geq 0, x \in \mathbf{R}, \text{sign}(\cdot)$  为标准符号函数.

**引理 1** 文献[12] 对于系统(3), 如果存在一个连续正定的函数  $V(x): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , 使得  $\dot{V}(x) \leq -\alpha V^p(x) - \beta V^q(x), x \in \mathbf{R}^n$ , 其中,  $\alpha > 0, \beta > 0, 0 < p < 1, q > 1$ , 那么该系统是固定时间稳定的, 且其固定的稳定时间为  $T \leq \frac{1}{\alpha(1-p)} + \frac{1}{\beta(1-q)}$ .如果仅是  $\dot{V}(x) \leq -\beta V^q(x)$ , 那么当  $t > T = \frac{1}{\beta(1-q)}$  时, 存在  $V(x(t)) \leq 1$ .

**引理 2** 文献[25] 考虑如下系统:

$$\dot{x} = f(x) + \hat{f}(t, x), \quad f(0) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^m, \quad (4)$$

式中  $f(x)$  是一个连续齐次的向量场, 且对于扩张  $(r_1, \dots, r_m)$  的齐次度为  $k < 0, \hat{f}(t, x)$  对于任意  $t$  满足  $\hat{f}(t, x) = 0$ .如果  $x = 0$  是系统  $\dot{x} = f(x)$  的渐近稳定平衡点.如果对于任意  $t$  存在  $\frac{\hat{f}_i(\varepsilon^{r_i} x_1, \dots, \varepsilon^{r_m} x_m)}{\varepsilon^{k+r_i}} = 0, i = 1, 2, \dots, m$ , 那么  $x = 0$  是系统(4)的一个局部有限

时间平衡点.此外,如果系统(4)既是全局渐近稳定又是局部有限时间稳定,那么该系统是全局有限时间稳定.

**引理 3** 文献[4] 对于一个连通的无向图  $G$ ,其拉普拉斯算子的矩阵  $L$  具有以下属性:对于任意  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{x}^T L \mathbf{x} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_i - x_j)^2$ ,这意味着  $L$  是半正定的.

**引理 4** 文献[26] 令  $c, d > 0$ .对于任意  $\gamma > 0$ ,以下不等式成立  $\forall x, y \in \mathbf{R}, |x|^c |y|^d \leq c/(c+d) \gamma |x|^{c+d} + d/(c+d) \gamma^{-c/d} |y|^{c+d}$ .

## 2 固定时间同步控制算法设计

在这一节中,我们将证明在假设条件 1 和假设条件 2 满足的情况下,关于二阶非线性多智能体系统(1)–(2)的通过状态反馈控制的固定时间同步问题是可以解决的.

**定理 1** 对于二阶非线性多智能体系统(1)–(2),在满足假设 1 和假设 2 的情况下,控制器  $u_i$  被设计为

$$\begin{aligned} u_i &= u_{i,1} + u_{i,2} + u_{i,3}, \\ u_{i,1} &= -k_1 \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}^{\alpha_1}(q_i - q_j) + b_i \text{sig}^{\alpha_1}(q_i - q_d) \right] - \\ & \quad k_1 \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}^{\alpha_2}(p_i - p_j) + b_i \text{sig}^{\alpha_2}(p_i - p_d) \right], \\ u_{i,2} &= -k_2 \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}^{\beta_1}(q_i - q_j) + b_i \text{sig}^{\beta_1}(q_i - q_d) \right] - \\ & \quad k_2 \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}^{\beta_2}(p_i - p_j) + b_i \text{sig}^{\beta_2}(p_i - p_d) \right], \\ u_{i,3} &= -k_3 \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} (q_i - q_j) + b_i (q_i - q_d) \right] - \\ & \quad k_3 \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} (p_i - p_j) + b_i (p_i - p_d) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

则在固定时间内可以实现所有智能体的同步控制,

其中  $k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 \geq 1 + \frac{k_1}{(1 + \alpha_2)} + \frac{k_2}{(1 + \beta_2)} +$

$\frac{(3\beta + 2)}{\lambda_{\min}(\mathbf{L} + \mathbf{B})}, 0 < \alpha_1 < 1, \alpha_2 = \frac{2\alpha_1}{(1 + \alpha_1)}, \beta_1 > 1,$

$\beta_2 = \frac{2\beta_1}{(1 + \beta_1)}, \lambda_{\min}(\mathbf{L} + \mathbf{B})$  为矩阵  $\mathbf{L} + \mathbf{B}$  的最小特征值.

**证明** 定义

$$x_i = q_i - q_d, \quad v_i = p_i - p_d, \quad i \in \Gamma \quad (6)$$

作为跟踪误差.根据式(1)和(2)可得:

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = u_i + f(t, q_i, p_i) - f(t, q_d, p_d),$$

$$i \in \Gamma. \quad (7)$$

根据跟踪误差(6),控制器(5)可以被改写为

$$\begin{aligned} u_i &= u_{i,1} + u_{i,2} + u_{i,3}, \\ u_{i,1} &= -k_1 \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}^{\alpha_1}(x_i - x_j) + b_i \text{sig}^{\alpha_1}(x_i) \right] - \\ & \quad k_1 \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}^{\alpha_2}(v_i - v_j) + b_i \text{sig}^{\alpha_2}(v_i) \right], \\ u_{i,2} &= -k_2 \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}^{\beta_1}(x_i - x_j) + b_i \text{sig}^{\beta_1}(x_i) \right] - \\ & \quad k_2 \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}^{\beta_2}(v_i - v_j) + b_i \text{sig}^{\beta_2}(v_i) \right], \\ u_{i,3} &= -k_3 \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_i - x_j) + b_i x_i \right] - \\ & \quad k_3 \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} (v_i - v_j) + b_i v_i \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

定义  $\mathbf{F} = [f(t, q_1, p_1) - f(t, q_d, p_d), \dots, f(t, q_n, p_n) - f(t, q_d, p_d)]^T, \mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T, \mathbf{v} = [v_1, \dots, v_n]^T, \mathbf{u} = [u_1, \dots, u_n]^T$ . 主要证明过程分为三个步骤.首先,基于李雅普诺夫稳定性理论,证明闭环系统是全局指数稳定的;然后,基于齐次系统理论,证明闭环系统是全局固定时间吸引的;最后,基于齐次系统理论,证明闭环系统是局部有限时间收敛的.

1) 步骤 1. 全局指数稳定

构造如下 Lyapunov 候选函数:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{k_1}{1 + \alpha_1} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} |x_i - x_j|^{1+\alpha_1} + 2b_i |x_i|^{1+\alpha_1} \right) + \\ & \quad \frac{k_2}{1 + \beta_1} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} |x_i - x_j|^{1+\beta_1} + 2b_i |x_i|^{1+\beta_1} \right) + \\ & \quad \frac{c}{2} \mathbf{x}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \mathbf{x} + (\mathbf{x} + \mathbf{v})^T (\mathbf{x} + \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (9)$$

式中  $c$  为一个在下文中确定的常数.  $V_1$  关于系统(7)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq k_1 \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} (v_i - v_j) \text{sig}^{\alpha_1}(x_i - x_j) + 2b_i \text{sig}^{\alpha_1}(x_i) v_i \right) + \\ & \quad k_2 \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} (v_i - v_j) \text{sig}^{\beta_1}(x_i - x_j) + 2b_i \text{sig}^{\beta_1}(x_i) v_i \right) - \\ & \quad \frac{c}{2} \mathbf{x}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \mathbf{x} + \frac{c}{2} (\mathbf{x} + \mathbf{v})^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) (\mathbf{x} + \mathbf{v}) + \\ & \quad 2(\mathbf{x} + \mathbf{v})^T (\mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{F}). \end{aligned} \quad (10)$$

基于引理 4, 可得:

$$2(\mathbf{x} + \mathbf{v})^T (\mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{F}) \leq 3(\mathbf{x} + \mathbf{v})^T (\mathbf{x} + \mathbf{v}) + \mathbf{x}^T \mathbf{x} + 2(\mathbf{x} + \mathbf{v})^T \mathbf{u} + 2(\mathbf{x} + \mathbf{v})^T \mathbf{F}. \quad (11)$$

基于控制律(8)和  $\mathbf{L} + \mathbf{B}$  的定义,  $u_{i,3}$  可以改写为  $[u_{1,3}, \dots, u_{n,3}]^T = -k_3 (\mathbf{L} + \mathbf{B}) (\mathbf{x} + \mathbf{v})^T$ . 由于  $\forall i, j \in \Gamma, a_{ij} = a_{ji}$ , 可以获得:

$$\dot{V}_1 \leq -\frac{c}{2} \mathbf{x}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \mathbf{x} -$$

$$\begin{aligned} & \left(2k_3 - \frac{c}{2}\right) (\mathbf{x} + \mathbf{v})^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) (\mathbf{x} + \mathbf{v}) + \\ & 3(\mathbf{x} + \mathbf{v})^T (\mathbf{x} + \mathbf{v}) + \mathbf{x}^T \mathbf{x} + 2(\mathbf{x} + \mathbf{v})^T \mathbf{F} - \\ & k_1 \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} |x_i - x_j|^{1+\alpha_1} + 2b_i |x_i|^{1+\alpha_1} \right] - \\ & k_2 \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} |x_i - x_j|^{1+\beta_1} + 2b_i |x_i|^{1+\beta_1} \right] - \\ & k_1 \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} |v_i - v_j|^{1+\alpha_2} + 2b_i |v_i|^{1+\alpha_2} \right] - \\ & k_2 \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} |v_i - v_j|^{1+\beta_2} + 2b_i |v_i|^{1+\beta_2} \right] - \\ & k_1 \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j) \text{sig}^{\alpha_2}(v_i - v_j) + 2b_i x_i \text{sig}^{\alpha_2}(v_i) \right] - \\ & k_2 \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j) \text{sig}^{\beta_2}(v_i - v_j) + 2b_i x_i \text{sig}^{\beta_2}(v_i) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

然后,对式(13)中的最后两项进行处理.根据引理4,由于  $1 + \alpha_1 < 1 + \alpha_2 < 2$ ,则

$$\begin{aligned} x_i \text{sig}^{\alpha_2}(v_i) & \leq \frac{1}{1 + \alpha_2} (|x_i|^{1+\alpha_1} + |x_i|^2) + \\ & \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} |v_i|^{1+\alpha_2}, \end{aligned} \quad (14)$$

相似地,由于  $2 < 1 + \beta_2 < 1 + \beta_1$ ,可得

$$\begin{aligned} x_i \text{sig}^{\beta_2}(v_i) & \leq \frac{1}{1 + \beta_2} (|x_i|^{1+\beta_1} + |x_i|^2) + \\ & \frac{\beta_2}{1 + \beta_2} |v_i|^{1+\beta_2}. \end{aligned} \quad (15)$$

上述的这种不等式同样也适用于式子  $(x_i - x_j) \text{sig}^{\alpha_2}(v_i - v_j)$  和  $(x_i - x_j) \text{sig}^{\beta_2}(v_i - v_j)$ .因此,代入式(13)可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 & \leq -\frac{c}{2} \mathbf{x}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \mathbf{x} - \\ & \left(2k_3 - \frac{c}{2}\right) (\mathbf{x} + \mathbf{v})^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) (\mathbf{x} + \mathbf{v}) + \\ & 3(\mathbf{x} + \mathbf{v})^T (\mathbf{x} + \mathbf{v}) + \mathbf{x}^T \mathbf{x} + 2(\mathbf{x} + \mathbf{v})^T \mathbf{F} + \\ & \frac{k_1}{1 + \alpha_2} \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j)^2 + 2b_i x_i^2 \right] + \\ & \frac{k_2}{1 + \beta_2} \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j)^2 + 2b_i x_i^2 \right] - \\ & \frac{k_1 \alpha_2}{1 + \alpha_2} \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} |x_i - x_j|^{1+\alpha_1} + 2b_i |x_i|^{1+\alpha_1} \right] - \\ & \frac{k_2 \beta_2}{1 + \beta_2} \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} |x_i - x_j|^{1+\beta_1} + 2b_i |x_i|^{1+\beta_1} \right] - \\ & \frac{k_1}{1 + \alpha_2} \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} |v_i - v_j|^{1+\alpha_2} + 2b_i |v_i|^{1+\alpha_2} \right] - \end{aligned}$$

$$\frac{k_2}{1 + \beta_2} \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} |v_i - v_j|^{1+\beta_2} + 2b_i |v_i|^{1+\beta_2} \right]. \quad (16)$$

根据引理3,可知  $\sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j)^2 + 2b_i x_i^2 \right] = 2\mathbf{x}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \mathbf{x}$ .因此,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 & \leq -\left(\frac{c}{2} - \frac{2k_1}{1 + \alpha_2} - \frac{2k_2}{1 + \beta_2}\right) \mathbf{x}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \mathbf{x} - \\ & \left(2k_3 - \frac{c}{2}\right) (\mathbf{x} + \mathbf{v})^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) (\mathbf{x} + \mathbf{v}) + \\ & 3(\mathbf{x} + \mathbf{v})^T (\mathbf{x} + \mathbf{v}) + \mathbf{x}^T \mathbf{x} + 2(\mathbf{x} + \mathbf{v})^T \mathbf{F} - \\ & \frac{k_1 \alpha_2}{1 + \alpha_2} \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} |x_i - x_j|^{1+\alpha_1} + 2b_i |x_i|^{1+\alpha_1} \right] - \\ & \frac{k_2 \beta_2}{1 + \beta_2} \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} |x_i - x_j|^{1+\beta_1} + 2b_i |x_i|^{1+\beta_1} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

根据假设1,可以得出以下结论:

$$\begin{aligned} 2(\mathbf{x} + \mathbf{v})^T \mathbf{F} & \leq 2 \sum_{i=1}^n |x_i + v_i| \rho(2|x_i| + |x_i + v_i|) \leq \\ & 2 \sum_{i=1}^n (\rho |x_i|^2 + 2\rho |x_i + v_i|^2) \leq \\ & 2\rho \mathbf{x}^T \mathbf{x} + 4\rho (\mathbf{x} + \mathbf{v})^T (\mathbf{x} + \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (18)$$

将不等式(18)代入(17)可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 & \leq \\ & -\left(\frac{c}{2} - \frac{2k_1}{1 + \alpha_2} - \frac{2k_2}{1 + \beta_2} - \frac{2\rho + 1}{\lambda_{\min}(\mathbf{L} + \mathbf{B})}\right) \mathbf{x}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \mathbf{x} - \\ & \left(2k_3 - \frac{c}{2} - \frac{4\rho + 3}{\lambda_{\min}(\mathbf{L} + \mathbf{B})}\right) (\mathbf{x} + \mathbf{v})^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) (\mathbf{x} + \mathbf{v}) - \\ & \frac{k_1 \alpha_2}{1 + \alpha_2} \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} |x_i - x_j|^{1+\alpha_1} + 2b_i |x_i|^{1+\alpha_1} \right] - \\ & \frac{k_2 \beta_2}{1 + \beta_2} \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} |x_i - x_j|^{1+\beta_1} + 2b_i |x_i|^{1+\beta_1} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{令 } \frac{c}{2} \geq 1 + \frac{2k_1}{1 + \alpha_2} + \frac{2k_2}{1 + \beta_2} + \frac{2\rho + 1}{\lambda_{\min}(\mathbf{L} + \mathbf{B})},$$

$$k_3 \geq \frac{1}{2} + \frac{c}{4} + \frac{4\rho + 3}{2\lambda_{\min}(\mathbf{L} + \mathbf{B})} \text{ 因此,可以获得:}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 & \leq -\mathbf{x}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \mathbf{x} - (\mathbf{x} + \mathbf{v})^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) (\mathbf{x} + \mathbf{v}) - \\ & \frac{k_1 \alpha_2}{1 + \alpha_2} \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} |x_i - x_j|^{1+\alpha_1} + 2b_i |x_i|^{1+\alpha_1} \right] - \\ & \frac{k_2 \beta_2}{1 + \beta_2} \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} |x_i - x_j|^{1+\beta_1} + 2b_i |x_i|^{1+\beta_1} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

此外,根据函数  $V$  的定义,存在

$$V_1 \leq \kappa \left[ \mathbf{x}^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) \mathbf{x} + (\mathbf{x} + \mathbf{v})^T (\mathbf{L} + \mathbf{B}) (\mathbf{x} + \mathbf{v}) + \right]$$

$$\frac{k_1\alpha_2}{1+\alpha_2} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} |x_i - x_j|^{1+\alpha_1} + 2b_i |x_i|^{1+\alpha_1} \right) + \frac{k_2\beta_2}{1+\beta_2} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} |x_i - x_j|^{1+\beta_1} + 2b_i |x_i|^{1+\beta_1} \right). \quad (21)$$

式中  $\kappa = \max \left\{ \frac{c}{2}, \frac{1}{\lambda_{\min}(\mathbf{L} + \mathbf{B})}, \frac{1 + \alpha_2}{\alpha_2(1 + \alpha_1)}, \frac{1 + \beta_2}{\beta_2(1 + \beta_1)} \right\}$ . 借助上述两个不等式,同时,基于  $\mathbf{L} + \mathbf{B} > 0$ ,可以得出结论:

$$\dot{V}_1 \leq -\kappa^{-1} V_1. \quad (22)$$

也就是说,闭环系统(7)–(8)是全局指数稳定的.对于原点周围的任何区域,状态将以指数形式收敛到该区域,并且收敛时间取决于系统的初始条件.

## 2) 步骤 2. 全局固定时间吸引

在这一步中,将证明存在一个区域  $\Omega_1$  使得它是全局固定时间吸引的,即对于任意  $(x_i(0), v_i(0)) \in \mathbf{R}^2/\Omega_1$  使得对于  $\forall t \geq T_1$  (其与初始条件无关),都有  $(x_i(t), v_i(t)) \in \Omega_1$ . 证明过程主要基于引理 1.

重构闭环系统(7)–(8)如下:

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = u_{i,2} + \hat{f}_i, \quad i \in \Gamma, \quad (23)$$

式中  $\hat{f}_i = u_{i,1} + u_{i,3} + f(t, q_i, p_i) - f(t, q_d, p_d)$ .

首先,考虑系统(23)的标称系统,即系统

$$\dot{x}_i = v_i,$$

$$\dot{v}_i = u_{i,2} = -k_2 \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}^{\beta_1}(x_i - x_j) + b_i \text{sig}^{\beta_1}(x_i) \right] -$$

$$k_2 \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}^{\beta_2}(v_i - v_j) + b_i \text{sig}^{\beta_2}(v_i) \right], \quad i \in \Gamma. \quad (24)$$

值得注意的是  $\beta_1 > 1, \beta_2 = \frac{2\beta_1}{(1 + \beta_1)}$ . 基于定义

2, 可以证实系统(24)关于扩张  $\Delta = (\underbrace{r_1, \dots, r_1}_{\text{for } x_1, \dots, x_n}, \underbrace{r_2, \dots, r_2}_{\text{for } v_1, \dots, v_n})$  的齐次度为  $k = \frac{\beta_1 - 1}{2} > 0$ , 其中,  $r_1 = 1,$

$r_2 = r_1 + k = \frac{\beta_1 + 1}{2}$ . 令  $z = (x, v)$ . 根据文献[23]中的

定理 2 可知存在一个正定连续可微的函数  $V_2(z)$  关于扩张  $\Delta$  的齐次度为  $l$ , 并且  $L_f V_2$  是连续正定的, 关于相同扩张  $\Delta$  的齐次度为  $l + k$ , 其中

$$L_f V_2 = \frac{\partial V_2}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V_2}{\partial v} \dot{v}.$$

然后,对  $V_2$  关于系统(23)求得  $\dot{V}_2 = L_f V_2 + L_g V_2$ . 根据文献[27]中的引理 4.2, 可以得出结论:

$$L_f V_2(z) \leq -c_1 [V_2(z)]^{\frac{l+k}{l}},$$

式中  $c_1 = -\max_{|z: V_2(z)=1} L_f V_2(z) > 0$ . 此外,

$$L_g V_2(z) = \frac{\partial V_2}{\partial v_i} \dot{v}_i \leq \left| \frac{\partial V_2}{\partial v_i} \right| \cdot |\dot{v}_i|, \quad (25)$$

由文献[23]的式(4)可知  $\partial V_2 / \partial v_i$  的齐次度是  $l - r_2$ . 由文献[27]中的引理 4.2 可知:

$$\left| \frac{\partial V_2}{\partial v_i} \right| \leq c_2 [V_2(z)]^{\frac{l-r_2}{l}}, \quad (26)$$

式中  $c_2 = \max_{|z: V_2(z)=1} \left| \frac{\partial V_2}{\partial v_i} \right| > 0$ . 同时,基于假设 1, 有

$$|\hat{f}| \leq \left[ k_1 \sum_{j \in N_i} a_{ij} |x_i - x_j|^{\alpha_1 \beta_1} + k_3 \sum_{j \in N_i} a_{ij} |x_i - x_j|^{1-\beta_1} \right] |x_i - x_j|^{\beta_1} + (k_1 b_i |x_i|^{\alpha_1 \beta_1} + (k_3 b_i + \rho) |x_i|^{1-\beta_1}) |x_i|^{\beta_1} + \left[ k_1 \sum_{j \in N_i} a_{ij} |v_i - v_j|^{\alpha_2 \beta_2} + k_3 \sum_{j \in N_i} a_{ij} |v_i - v_j|^{1-\beta_2} \right] |v_i - v_j|^{\beta_2} + (k_1 b_i |v_i|^{\alpha_2 \beta_2} + (k_3 b_i + \rho) |v_i|^{1-\beta_2}) |v_i|^{\beta_2} \leq \eta (|x_i - x_j|^{\beta_1} + |x_i|^{\beta_1} + |v_i - v_j|^{\beta_2} + |v_i|^{\beta_2}). \quad (27)$$

式中:

$$\eta = \max \left\{ \frac{k_1}{\sum_{j \in N_i} a_{ij} |x_i - x_j|^{\beta_1 - \alpha_1}} + \frac{k_3}{\sum_{j \in N_i} a_{ij} |x_i - x_j|^{\beta_1 - 1}} \frac{k_1 b_i}{|x_i|^{\beta_1 - \alpha_1}} + \frac{k_3 b_i + \rho}{|x_i|^{\beta_1 - 1}} \frac{k_1}{\sum_{j \in N_i} a_{ij} |v_i - v_j|^{\beta_2 - \alpha_2}} + \frac{k_3}{\sum_{j \in N_i} a_{ij} |v_i - v_j|^{\beta_2 - 1}} \frac{k_1 b_i}{|v_i|^{\beta_2 - \alpha_2}} + \frac{k_3 b_i + \rho}{|v_i|^{\beta_2 - 1}} \right\}, \quad (28)$$

并且,上述项  $|x_i - x_j|^{\beta_1} + |x_i|^{\beta_1} + |v_i - v_j|^{\beta_2} + |v_i|^{\beta_2}$  的齐次度为  $\beta_1 = k + r_2$ . 同样,通过文献[28]中的引理 4.2, 显然可得  $|\hat{f}| \leq \eta (|x_i - x_j|^{\beta_1} + |x_i|^{\beta_1} + |v_i - v_j|^{\beta_2} + |v_i|^{\beta_2}) \leq c_3 \eta [V_2(z)]^{\frac{k+r_2}{l}}$ , 其中,  $c_3 = \max_{|z: V_2(z)=1} \{ |x_i - x_j|^{\beta_1} + |x_i|^{\beta_1} + |v_i - v_j|^{\beta_2} + |v_i|^{\beta_2} \} > 0$ . 综上所述,

$$\dot{V}_2 = L_f V_2 + L_g V_2 \leq -(c_1 - c_2 c_3 \eta) [V_2(z)]^{\frac{l+k}{l}}. \quad (29)$$

根据  $\eta$  的定义(28), 令

$z' = (x_i - x_1, \dots, x_i - x_{i-1}, x_i, x_i - x_{i+1}, \dots, x_i - x_n, v_i - v_1, \dots, v_i - v_{i-1}, v_i, v_i - v_{i+1}, \dots, v_i - v_n)$ . 当  $\|z'\|$  足够大时,  $\eta$  可以足够小, 使得  $c_1 - c_2 c_3 \eta > 0$ . 因为,

$k > 0$ ,由引理 1 可知,存在一个区域  $\Omega_1$  使得闭环系统是全局固定时间吸引,且收敛时间不受系统初始状态影响.

3) 步骤 3.局部有限时间稳定

在这个步骤中,将证明闭环系统(7)–(8)是局部有限时间稳定的,即,在零点附近存在一个区域和时间  $T_2$ (其依赖于初始条件)使得如果  $(x_i(0), v_i(0)) \in \Omega_1$ ,则有对于  $\forall t \geq T_2, (x_i(t), v_i(t)) \equiv 0$ . 本证明过程主要基于引理 2.将控制器(8)代入系统(7),闭环系统可以重构为

$$\dot{x}_i = v_i, \quad v_i = u_{i,1} + \hat{h}_i, \quad i \in \Gamma, \quad (30)$$

式中  $\hat{h}_i = u_{i,2} + u_{i,3} + f(t, q_i, p_i) - f(t, q_d, p_d)$ .首先,将证明上述系统(30)的标称系统:

$$\dot{x}_i = v_i,$$

$$\dot{v}_i = u_{i,2} = -k_1 \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}^{\alpha_1}(x_i - x_j) + b_i \text{sig}^{\alpha_1}(x_i) \right] -$$

$$k_1 \left[ \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}^{\alpha_2}(v_i - v_j) + b_i \text{sig}^{\alpha_2}(v_i) \right], \quad i \in \Gamma \quad (31)$$

是渐近稳定和齐次的.然后,将证明系统(30)中的函数  $\hat{h}_i$  满足引理 2 中的条件.

针对系统(31)选择 Lyapunov 函数

$$V_3 = \frac{k_1}{1 + \alpha_1} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} |x_i - x_j|^{1+\alpha_1} + 2b_i |x_i|^{1+\alpha_1} \right) + \sum_{i=1}^n v_i^2. \quad (32)$$

通过与步骤 1 相似的证明,可以得出结论

$$\dot{V}_3 = -k_1 \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n a_{ij} |v_i - v_j|^{1+\alpha_2} + 2b_i |v_i|^{1+\alpha_2} \right] \leq 0. \quad (33)$$

根据拉塞尔不变集原理得到结论系统(31)是全局渐近稳定的,即,对于任意  $i \in \Gamma$ ,当  $t \rightarrow \infty$  时,  $(x_i(t), v_i(t)) \rightarrow 0$ .此外,值得注意的是  $0 < \alpha_1 < 1$ ,

$\alpha_2 = \frac{2\alpha_1}{(1 + \alpha_1)}$ .基于定义 2,可以证实系统(31)关于扩张  $\Delta = (\underbrace{s_1, \dots, s_1}_{\text{for } x_1, \dots, x_n}, \underbrace{s_2, \dots, s_2}_{\text{for } v_1, \dots, v_n})$  的齐次度为  $m =$

$$\frac{(\alpha_1 - 1)}{2} < 0, \text{其中, } s_1 = 1, s_2 = s_1 + m = \frac{(\alpha_1 + 1)}{2}. \text{接}$$

下来,根据引理 2,构造函数

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{h}_i(t, \varepsilon^s x, \varepsilon^s v)}{\varepsilon^{s_2+m}} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|u_{i,2}(\varepsilon^s x, \varepsilon^s v)| + |u_{i,3}(\varepsilon^s x, \varepsilon^s v)| + \rho(|\varepsilon^s x_i| + |\varepsilon^s v_i|)}{|\varepsilon|^{s_2+m}}. \quad (34)$$

根据控制器(8)中对  $u_{i,2}$  和  $u_{i,3}$  的定义可知

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{h}_i(t, \varepsilon^s x, \varepsilon^s v)}{\varepsilon^{s_2+m}} = 0. \text{根据引理 2,可以得出系统}$$

(30)是局部有限时间稳定的.

因此,通过步骤 1、步骤 2 和步骤 3 的结果,闭环系统(7)–(8)是全局固定时间稳定的,即,在固定时间之内,  $q_i \rightarrow q_d, p_i \rightarrow p_d$ .也就是说,针对系统(1)–(2)实现了固定时间同步问题.证毕.

3 仿真结果

考虑由 4 个跟随者和 1 个领导者组成的多耦合非线性单摆系统.多智能体之间的信息交互如图 1 所示.

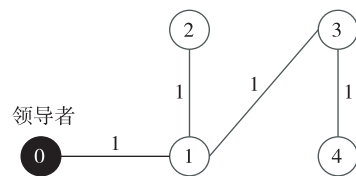


图 1 多智能体之间的通信拓扑关系

Fig. 1 Communication topology graph among agents

根据文献[9],领导者可以被描述为  $\dot{q}_d = p_d, p_d = -\sin(q_d) - 0.25p_d + 1.5\cos(2.5t)$ ,其中  $q_d, p_d$  分别表示领导者的位置和速度.同样的,4 个跟随者可被描述为  $\dot{q}_i = p_i, \dot{p}_i = -\sin(q_i) - 0.25p_i + 1.5\cos(2.5t) + u_i, i = 1, 2, 3, 4$ ,其中  $q_i, p_i$  和  $u_i$  分别表示第  $i$  个跟随者的位置、速度和控制输入.根据定理 1,可以实现多智能体系统的固定时间同步.在仿真中,上述固定时间控制律的控制增益选择为  $\alpha_1 = 3/5, \beta_1 = 5/3, k_1 = 1.3, k_2 = 1.5, k_3 = 1.4$ .4 个跟随者的初始状态随机选择为  $q(0) = [0, 1, -3, 1.5]^T, p(0) = [-1, 0, 1, -2]^T$ .领导者的初始状态为  $q_d(0) = p_d(0) = 0$ .在图 2 中给出了系统的响应曲线.由此可以发现,系统(1)–(2)可以在固定的时间内实现同步.最后,为了验证收敛时间与初始状态无关的情况,图 3 给出了不同初始条件下的收敛时间,其中  $\|\delta(0)\| =$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^4 (q_d(0) - q_i(0))^2 + \sum_{i=1}^4 (p_d(0) - p_i(0))^2}.$$

4 结束语

本文研究了一类具有二阶非线性多智能体系统的固定时间同步问题.将齐次系统理论、固定时间控制技术和有限时间控制技术有效结合,提出了一种

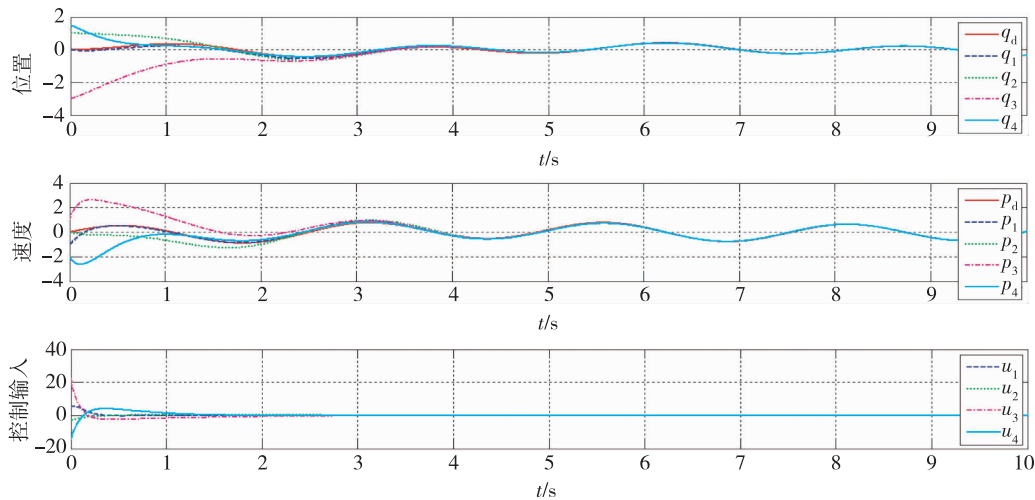


图2 在固定时间控制律下的多智能体系统的响应曲线  
Fig. 2 Response curves of all agents under fixed-time control law

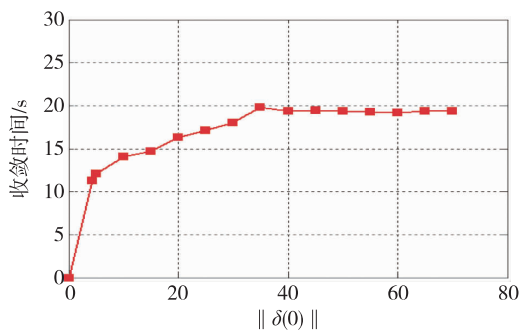


图3 不同初始条件下的收敛时间  
Fig. 3 Convergence time for different initial conditions

新的固定时间同步控制算法.理论研究明,利用所设计的控制律,可以保证所考虑的主从式多智能体系统实现固定时间同步控制.本文最后针对由4个跟随者和1个领导者组成的多耦合非线性强迫摆系统进行了数值仿真,验证了该方法的有效性.

## 参考文献

### References

- [ 1 ] Zhu J D, Lu J H, Yu X H. Flocking of multi-agent non-holonomic systems with proximity graphs [ J ]. IEEE Transactions on Circuits & Systems I: Regular Papers, 2013, 60(1): 199-210
- [ 2 ] Ren W, Atkins E. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange [ J ]. International Journal of Robust & Nonlinear Control, 2010, 17(10/11): 1002-1033
- [ 3 ] Jeon I S, Lee J I, Tahk M J. Homing guidance law for cooperative attack of multiple missiles [ J ]. Journal of Guidance Control Dynamics, 2010, 33(1): 275-280
- [ 4 ] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [ J ]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533
- [ 5 ] Dimarogonas D V, Tsiotras P, Kyriakopoulos K J. Leader-follower cooperative attitude control of multiple rigid bodies [ J ]. Systems & Control Letters, 2009, 58(6): 429-435
- [ 6 ] Hong Y G, Gao L X, Cheng D Z, et al. Lyapunov-based approach to multiagent systems with switching jointly connected interconnection [ J ]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(5): 943-948
- [ 7 ] Ren W. Multi-vehicle consensus with a time-varying reference state [ J ]. Systems & Control Letters, 2007, 56(7): 474-483
- [ 8 ] Yu W W, Chen G R, Cao M, et al. Second-order consensus for multiagent systems with directed topologies and nonlinear dynamics [ J ]. IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics Part B Cybernetics A Publication of the IEEE Systems Man & Cybernetics Society, 2010, 40(3): 881-891
- [ 9 ] Song Q, Cao J D, Yu W W. Second-order leader-following consensus of nonlinear multi-agent systems via pinning control [ J ]. Systems & Control Letters, 2010, 59(9): 553-562
- [ 10 ] Bhat S P. Finite-time stability of continuous autonomous systems [ J ]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2000, 38(3): 751-766
- [ 11 ] Qian C J, Li J. Global finite-time stabilization by output feedback for planar systems without observable linearization [ J ]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(6): 885-890
- [ 12 ] Li S H, Du H B, Lin X Z. Finite-time consensus algorithm for multi-agent systems with double-integrator dynamics [ J ]. Automatica, 2011, 47(8): 1706-1712
- [ 13 ] Du H B, Li S H, Qian C J. Finite-time attitude tracking control of spacecraft with application to attitude synchro-

- nization[J].IEEE Transactions on Automatic Control, 2011,56(11):2711-2717
- [14] Li S H,Zhou M M,Yu X H.Design and implementation of terminal sliding mode control method for PMSM speed regulation system[J].IEEE Transactions on Industrial Informatics,2013,9(4):1879-1891
- [15] Xiao F,Wang L,Chen J,et al.Finite-time formation control for multi-agent systems[J].Automatica,2009,45(11):2605-2611
- [16] Wang L,Xiao F.Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2010,55(4):950-955
- [17] Lu X Q,Lu R Q,Chen S H,et al.Finite-time distributed tracking control for multi-agent systems with a virtual leader[J].IEEE Transactions on Circuits & Systems I: Regular Papers,2013,60(2):352-362
- [18] Li S H,Wang X Y.Finite-time consensus and collision avoidance control algorithms for multiple AUVs[J].Automatica,2013,49(11):3359-3367
- [19] Polyakov A.Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2012,57(8):2106-2110
- [20] Hong H F,Yu W W,Wen G H,et al.Distributed robust fixed-time consensus for nonlinear and disturbed multi-agent systems[J].IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics( Systems),2017,47(7):1464-1473
- [21] Zuo Z Y.Nonsingular fixed-time consensus tracking for second-order multi-agent networks[J].Automatica,2015,54(C):305-309
- [22] Zuo Z Y,Tian B L,Defoort M,et al.Fixed-time consensus tracking for multi-agent systems with high-order integrator dynamics[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2018,63(2):563-570
- [23] Rosier L. Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field[J].Systems & Control Letters,1992,19(6):467-473
- [24] Du H B,He Y G,Cheng Y Y.Finite-time synchronization of a class of second-order nonlinear multi-agent systems using output feedback control[J].IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers,2017,61(6):1778-1788
- [25] Hong Y G,Xu Y S,Huang J.Finite-time control for robot manipulators[J].Systems & Control Letters,2002,46(4):185-200
- [26] Qian C J,Lin W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2001,46(7):1061-1079
- [27] Bhat S P,Bernstein D S.Geometric homogeneity with application to finite-time stability[J].Mathematics of Control, Signals, and Systems,2005,17(2):101-127

## Fixed-time synchronization of a class of second-order nonlinear multi-agent systems

WU Di<sup>1</sup> DU Haibo<sup>1</sup> WEN Guanghui<sup>2</sup>

<sup>1</sup> School of Electrical Engineering and Automation,Hefei University of Technology,Hefei 230009

<sup>2</sup> School of Mathematics,Southeast University,Nanjing 210096

**Abstract** This paper considers the problem of fixed-time synchronization for a class of second-order nonlinear multi-agent systems with a leader-follower architecture. Based on the homogeneous system theory, a new fixed-time synchronization control algorithm is designed such that the synchronization of multiple master-slave coupling systems can be achieved in a fixed time. It is theoretically shown that the synchronization time can be pre-determined which is independent of any initial conditions. Numerical simulations on synchronization of multi-agent systems are finally performed to illustrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words** fixed-time control; multi-agent systems; nonlinear systems; homogeneous approach; synchronization control