



# 基于输出反馈的分数阶奇异线性多智能体系统领导者-跟随一致性

## 摘要

本文主要开展多智能系统领导者-跟随一致性分析,其中每个智能体的动态性能描述为分数阶奇异线性系统.基于系统的输出信息,设计一个输出反馈的控制协议.通过有效的证明,推导出多智能体系统领导者-跟随一致性的充分条件.采用奇异值分解(SVD)技巧,可将一致性条件进一步转换为易于求解的线性矩阵不等式.当通信拓扑图假设为无向连通图时,一致性条件可以简化为相对简单的多个线性矩阵不等式.最后给出一个实例,演示如何求取反馈增益,通过仿真图可以发现本文结果正确、有效.

## 关键词

多智能体系统;分数阶系统;领导者-跟随一致性;奇异值分解(SVD);图论;线性矩阵不等式

中图分类号 TP13;O231

文献标志码 A

收稿日期 2018-04-15

资助项目 国家自然科学基金(61403219, 61463043);宁夏大学博士启动基金(BQD201-4014)

## 作者简介

潘欢,男,博士,副教授,研究方向为多智能体协调控制.pan198303@gmail.com

- 1 宁夏大学 物理与电子电气工程学院,银川,750021
- 2 宁夏沙漠信息智能感知重点实验室,银川,750021
- 3 宁夏电力能源安全重点实验室,银川,750004

## 0 引言

随着无线传感器网络、微型机器人以及无人机编队等技术的发展,多智能体系统研究已成为近些年控制科学中的热点问题<sup>[1-2]</sup>.一致性问题是多智能体系统中的基础性研究,重点在于设计一种分布式控制协议,使得最终的系统状态收敛于同一个值.按照是否存在领导者,一致性问题可分为领导者-跟随一致性和一般一致性(简称一致性).从字面就可以很容易理解,领导者-跟随一致性与一致性研究的重要区别在于是否存在一个领导者,而这一现象在自然界中非常普遍,例如,大雁迁徙中,存在一个头雁带领着整个雁群飞行;兽群中也往往会有一个经验丰富的领导者,带领整个兽群觅食、迁徙等<sup>[3]</sup>.

受到自然界的启发,工程技术人员发现在无人机、机器人、无人车领域,设计一个领导者就可以精确有效地控制一组智能体.基于此,领导者-跟随者一致性得到了学术界广泛的分析与研究.目前大多数的多智能体动态性能被描述为整数阶微分方程,包括一阶、二阶、高阶、线性或非线性系统<sup>[4-8]</sup>.随着分数计算的快速发展,更多的学者认识到一些诸如电磁、黏粘性、信号处理电路系统的动态性能更适合采用分数阶微分方程描述<sup>[9-11]</sup>.为了更精确地刻画车辆行驶在泥泞的路面、飞行器行驶于雨雪等天气,Cao等<sup>[12]</sup>于2008年提出了分数阶多智能体的概念,并在有向通信拓扑图假设下设计了分布式协调一致性算法.接下来众多科研人员将目光聚焦于分数阶多智能体领导者-跟随一致性研究<sup>[13-18]</sup>,其中包括线性模型<sup>[13]</sup>和非线性模型<sup>[14]</sup>、连续<sup>[15]</sup>和离散系统<sup>[16]</sup>,以及一些先进的控制算法<sup>[17-18]</sup>.

Kaczorek教授在文献[11]中指出,一些电路可用分数阶奇异线性系统描述,表明分数阶奇异系统具有很强的实际应用背景,然而关于这方面的研究结果却非常有限.关于分数阶奇异系统依然存在许多科学问题,分数阶奇异系统的群聚行为仍然是一个理论空白.基于上述讨论,本文主要研究分数阶奇异线性多智能体系统领导者-跟随一致性问题.智能体之间(包括领导者)的通信拓扑假设为有向或无向图,给出分数阶奇异线性多智能体领导者-跟随一致性定义.智能体的状态属于内部信息,在某些时候往往很难获取<sup>[19]</sup>,因此提出一种基于输出信息的一致性控制协议.利用一些有用的引理,领导者-跟随一致

性条件可表示为矩阵不等式,进一步,利用奇异值分解(SVD)技巧,一致性条件可表示为线性矩阵不等式.最后通过数值仿真例子阐述本文结果的有效性.

## 1 基础知识

### 1.1 图论

本文中智能体之间的通信拓扑用一个图来描述,下面重点介绍图论的相关知识.一个图  $\mathcal{G}=(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathbf{A})$ , 其中  $\mathcal{V}=\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$  和  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  分别表示图  $\mathcal{G}$  的点集和边集,  $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{N \times N}$  称作图  $\mathcal{G}$  的邻接矩阵.节点的指标集记为  $\mathcal{I}=\{1, 2, \dots, N\}$ .在加权有向图  $\mathcal{G}$  中,若节点  $j$  可以收到节点  $i$  发出的信息,则边  $e_{ij}=(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$  且  $a_{ij} > 0$ , 否则  $a_{ij}=0$ .记节点  $i$  的邻居集为  $\mathcal{N}_i$ , 它表示与  $i$  相连的节点所组成的点集,即  $\mathcal{N}_i=\{j|e_{ij} \in \mathcal{E}\}$ .称节点  $i_1$  与  $i_l$  之间存在一条有向路是指存在一系列有向边  $e_{i_\nu i_{\nu+1}}$  ( $\nu=1, \dots, l-1$ ) 可以将点  $i_1$  与  $i_l$  连接起来.若图  $\mathcal{G}$  中存在一个点  $i$ , 使得点  $i$  与其他任何点之间都存在一条有向路, 则称图  $\mathcal{G}$  中存在一颗生成树,点  $i$  称为根节点.若有向图  $\mathcal{G}$  中任何两个点都存在一条路, 则称  $\mathcal{G}$  为强连通.图  $\mathcal{G}$  的拉普拉斯矩阵  $\mathbf{L}=[l_{ij}]_{N \times N}$  定义为

$$l_{ii}=\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}, \quad l_{ij}=-a_{ij}, \quad \forall i \neq j.$$

对于一个有向图  $\mathcal{G}$ , 一般存在  $a_{ij} \neq a_{ji}, \forall i \neq j$ ; 而对于无向图, 边的权值满足  $a_{ij}=a_{ji}, \forall i \neq j$ .显然, 无向图的邻接矩阵  $\mathbf{A}$  是对称阵, 对于一个无向图  $\mathcal{G}$ , 若其中的任意两个点之间都存在一条无向路, 则称此图连通.

考虑一组多智能体系统, 假设跟随者为  $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ , 领导者记为  $v_0$ ; 领导者可以传递信息给部分跟随者, 而跟随者动态行为不会影响领导者.如果跟随者智能体  $i$  可以接收到领导者的信息, 记  $h_i > 0$ , 矩阵  $\text{diag}\{h_1, h_2, \dots, h_N\}$  刻画了领导者对跟随者的影响程度, 其中  $h_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) 不全为零.记  $\bar{\mathcal{G}}=(\{v_0, v_1, \dots, v_N\}, \mathcal{E}+\{h_1, h_2, \dots, h_N\})$ , 图  $\bar{\mathcal{G}}$  描述领导者+跟随者的通信拓扑结构.

**假设 1** 图  $\bar{\mathcal{G}}$  有向, 且以  $v_0$  为根节点存在生成树.

**假设 2** 图  $\bar{\mathcal{G}}$  无向且连通.

### 1.2 分数阶计算

函数  $g(t)$  关于时间  $t$  的 Caputo 分数阶导数定义为

$${}_a^C D_t^\alpha g(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} g^{(m)}(s) ds,$$

其中,  $g(t)$  为任意的可积函数,  $\alpha$  表示分数阶阶数,  $m \in \mathbf{Z}^+$  满足  $m-1 < \alpha < m$ ,  $\Gamma(\cdot)$  为伽马函数  $\Gamma(s)=\int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$ .

简单起见, 下面的章节记  $D_t^\alpha$  表示分数阶求导  ${}_a^C D_t^\alpha$ , 且假设阶数  $0 < \alpha < 1$ .

考虑一个分数阶奇异线性系统, 其动态方程表示为

$$E D_t^\alpha \mathbf{x}(t)=\mathbf{A} \mathbf{x}(t), \quad (1)$$

其中, 矩阵  $E$  为奇异矩阵, 满足  $\text{rank}(E)=r < n$ ,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  为系统状态,  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为常系数矩阵.

**定义 1**<sup>[20]</sup> 对于分数阶奇异线性系统(1), 若存在一个正数  $\kappa \in \mathbf{R}$  使得  $|\kappa^\alpha E - \mathbf{A}| \neq 0$ , 称  $(E, \mathbf{A})$  是正则的.

**引理 1**<sup>[20-21]</sup> 称分数阶奇异线性系统(1)是可容许的, 是指

(i)  $(E, \mathbf{A})$  是正则的, 即存在两个非奇异矩阵  $P$  和  $Q$  使得

$$PEQ=\begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N \end{bmatrix}, \quad PAQ=\begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-r} \end{bmatrix},$$

其中,  $A_1 \in \mathbf{R}^{r \times r}, N \in \mathbf{R}^{(n-r) \times (n-r)}$  是幂零(矩)阵;

(ii)  $(E, \mathbf{A})$  脉冲自由, 即  $\text{deg}(\det(\beta E - \mathbf{A})) = \text{rank}(E)$ ;

(iii) 对于  $(E, \mathbf{A})$ , 矩阵  $A_1$  的特征根  $\lambda_i$  满足  $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\pi\alpha}{2}, i=1, 2, \dots, r$ .

**引理 2**<sup>[21]</sup> 假设  $(E, \mathbf{A})$  正则, 分数阶奇异系统(1)可容许的充分必要条件是存在两个实对称正定矩阵  $Q_{11}, Q_{21}$  和两个斜对称矩阵  $Q_{12}, Q_{22}$  以及矩阵  $R \in \mathbf{R}^{(n-r) \times n}$  使得

$$\text{sym}\left\{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\Theta_{ij} \otimes (E^T Q_{ij} \mathbf{A})) + I_2 \otimes (R^T E_0^T \mathbf{A})\right\} < 0, \quad (2)$$

其中,  $\otimes$  表示克罗内克积,  $\text{sym}(\Xi)$  表示  $\text{sym}(\Xi) = \Xi^T + \Xi$ ;  $\text{rank}(E)=r < n, E_0 \in \mathbf{R}^{(n-r) \times n}$  是一个满秩矩阵满足  $E^T E_0 = 0, \theta = \frac{\pi\alpha}{2}$ ,

$$\Theta_{11}=\begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}, \quad \Theta_{12}=\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$\Theta_{21}=\begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}, \quad \Theta_{22}=\begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}.$$

**引理 3**<sup>[22]</sup> 对于矩阵  $X, Y$  和对称正定矩阵  $R$ ,

下面不等式成立:

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T R X + Y^T R^{-1} Y.$$

**引理 4**<sup>[23]</sup> 对于任意矩阵  $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $m < n$ , 且满行秩 ( $\text{rank}(\mathbf{H}) = m$ ), 则存在矩阵  $\mathbf{H}$  的一个 SVD:

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}[\mathbf{S} \quad \mathbf{0}] \mathbf{V}^T,$$

其中,  $\mathbf{S} = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0$ ,  $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{m \times m}$  与  $\mathbf{V} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是酉矩阵.

**引理 5**<sup>[23]</sup> 给定矩阵  $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $m < n$  且  $\text{rank}(\mathbf{H}) = m$ , 若  $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是一个对称矩阵, 则存在一个矩阵  $\bar{\mathbf{X}} \in \mathbf{R}^{m \times m}$  满足等式  $\mathbf{H}\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}\mathbf{H}$  的充分必要条件是  $\mathbf{X}$  可以表示为

$$\mathbf{X} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T,$$

其中,  $\mathbf{X}_{11} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ ,  $\mathbf{X}_{22} \in \mathbf{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是矩阵  $\mathbf{H}$  SVD 中的酉矩阵.

### 1.3 分数阶奇异多智能体系统

考虑由 1 个领导者和  $N$  个跟随者所组成的一个多智能体系统. 跟随者智能体的动态系统描述为

$$\begin{cases} ED_t^\alpha \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_i(t), & i \in \mathcal{I}, \\ \mathbf{y}_i(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_i(t), \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{u}_i(t) \in \mathbf{R}^p$  和  $\mathbf{y}_i(t) \in \mathbf{R}^m$  分别表示第  $i$  个跟随者的状态、控制输入(或协议)和输出;  $\mathbf{E} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是一个奇异矩阵, 满足  $\text{rank}(\mathbf{E}) = r < n$ ;  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times p}$  和  $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times n}$  是常系数矩阵.

领导智能体动态性能为

$$\begin{cases} ED_t^\alpha \mathbf{x}_0(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_0(t), \\ \mathbf{y}_0(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_0(t), \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{x}_0(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{y}_0(t) \in \mathbf{R}^m$  分别表示领导者的状态与输出.

**假设 3** 多智能体系统(3)–(4)中  $(\mathbf{E}, \mathbf{A})$  正则,  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  可观测.

**定义 2** 假设  $(\mathbf{E}, \mathbf{A})$  正则, 若对于任意初始值  $\mathbf{x}_i(0)$ ,  $(\mathbf{E}, \mathbf{A})$  脉冲自由, 并且满足下面的条件:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_0(t)\| = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

则称分数阶奇异多智能体系统(3)–(4)实现了领导者-跟随一致性.

为了解决分数阶奇异多智能体(3)–(4)领导者-跟随一致性, 基于输出信息, 设计如下的控制协议:

$$\mathbf{u}_i(t) = -\mathbf{K} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (a_{ij}(\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{y}_j(t)) +$$

$$h_i(\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{y}_0(t))), \quad i \in \mathcal{I}, \quad (5)$$

其中,  $a_{ij}$  是邻接矩阵  $\mathbf{A}$  的第  $(i, j)$  个元,  $h_i$  表示领导者向跟随者  $i$  发送的信息,  $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{p \times m}$  是需要求解的反馈增益.

将控制协议(5)带入系统(3), 且令  $\mathbf{x}_{ei}(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_0(t)$ , 则误差系统  $\mathbf{x}_{ei}(t)$  的动态行为可表示为

$$ED_t^\alpha \mathbf{x}_{ei}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_{ei}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (a_{ij}(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) + h_i(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_0(t))). \quad (6)$$

令  $\mathbf{x}_e(t) = [\mathbf{x}_{e1}^T(t), \mathbf{x}_{e2}^T(t), \dots, \mathbf{x}_{eN}^T(t)]^T \in \mathbf{R}^{N \times n}$ , 系统(6)的向量形式可以表示为

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}) D_t^\alpha \mathbf{x}_e(t) = \\ (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} - \mathbf{H} \otimes (\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})) \mathbf{x}_e(t), \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{H} = \mathbf{L} + \text{diag}\{h_1, h_2, \dots, h_N\}$ .

## 2 领导者-跟随一致性分析

**定理 1** 假设 1、3 满足, 若存在正定矩阵  $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  与矩阵  $\mathbf{R} \in \mathbf{R}^{(n-r) \times n}$ , 使得下面的矩阵不等式(8)成立, 则称分数阶奇异多智能体系统(3)–(4)实现领导者-跟随一致性.

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} \mathbf{I}_{2N} \otimes (\mathbf{R}^T \mathbf{E}_0^T) (- (\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{H}) \otimes (\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}))^T \\ * & -\mathbf{I}_{2N} \otimes \mathbf{P} & 0 \\ * & * & -\mathbf{I}_{2N} \otimes \mathbf{P} \end{bmatrix} < 0, \quad (8)$$

其中  $\Xi_{11} = \text{sym} \left\{ \sum_{l=1}^2 \left[ \Theta_{ll} \otimes (\mathbf{I}_N \otimes (\mathbf{E}^T \mathbf{P}\mathbf{A}) - \mathbf{H} \otimes (\mathbf{E}^T \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})) + \mathbf{I}_{2N} \otimes (\mathbf{R}^T \mathbf{E}_0^T \mathbf{A}) \right] \right\}$ .

**证明** 由引理 2 可知, 分数阶奇异线性系统可容许的条件是存在两个实对称正定矩阵  $\mathbf{Q}_{11}, \mathbf{Q}_{21}$ , 和两个斜对称矩阵  $\mathbf{Q}_{12}, \mathbf{Q}_{22}$ , 以及矩阵  $\mathbf{R} \in \mathbf{R}^{(n-r) \times n}$  使得

$$\begin{aligned} \text{sym} \left\{ \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[ \Theta_{lj} \otimes ((\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}^T) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Q}_{lj}) \right. \right. \\ \left. \left. (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} - \mathbf{H} \otimes (\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})) + \mathbf{I}_2 \otimes \right. \right. \\ \left. \left. ((\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{R}^T) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_0^T) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} - \mathbf{H} \otimes \right. \right. \\ \left. \left. (\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})) \right] \right\} < 0, \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $\mathbf{Q}_{lj} (l=1, 2, j=1, 2)$ ,  $\mathbf{E}_0$  定义在引理 2.

在式(9)中, 令  $\mathbf{Q}_{11} = \mathbf{Q}_{21} = \mathbf{P}, \mathbf{Q}_{12} = \mathbf{Q}_{22} = 0$ , 式(9)可以表示为

$$\text{sym} \left\{ \sum_{l=1}^2 \left[ \Theta_{ll} \otimes ((\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}^T) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{P}) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} - \mathbf{H} \otimes (\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})) + \mathbf{I}_2 \otimes ((\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{R}^T) (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{E}_0^T) (\mathbf{I}_N \otimes \right. \right.$$

$$A - H \otimes (BKC) \Big] \Big\} < 0. \quad (10)$$

由引理 3 可推导出

$$\begin{aligned} & \text{sym}\{I_2 \otimes ((I_N \otimes R^T)(I_N \otimes E_0^T)(I_N \otimes A - H \otimes (BKC)))\} = \\ & \text{sym}\{I_{2N} \otimes (R^T E_0^T A)\} + \\ & \text{sym}\{I_2 \otimes ((I_N \otimes (R^T E_0^T))(-H \otimes (BKC)))\} \leq \\ & \text{sym}\{I_{2N} \otimes (R^T E_0^T A)\} + \\ & (I_{2N} \otimes (R^T E_0^T))(I_{2N} \otimes P)^{-1}(I_{2N} \otimes (R^T E_0^T))^T + \\ & (- (I_2 \otimes H) \otimes (BKC))^T(I_{2N} \otimes P) \cdot \\ & (- (I_2 \otimes H) \otimes (BKC)). \end{aligned} \quad (11)$$

结合(10)与(11),应用舒尔补可以推导出矩阵不等式(8).当矩阵不等式(8)成立时,分数阶奇异系统(3)–(4)在协议(5)作用下实现领导者-跟随一致性.

**注 1** 由于矩阵乘积  $PBK$  的存在,可以发现矩阵不等式(8)并不是线性的,这会对求解增益  $K$  造成困难.为了解决这个问题,接下来将借助于 SVD 技术以及引理 4、5 得到下面的结论.

**定理 2** 当假设 1、3 成立,系数矩阵  $B$  的转置满行秩,且 SVD 分解表示为  $B^T = U[S \ 0]V^T$ ,其中矩阵  $U, S$  和  $V$  定义在引理 4.若存在正定矩阵  $P = V\text{diag}\{P_{11}, P_{22}\}V^T, P_{11} \in \mathbf{R}^{m \times m}, P_{22} \in \mathbf{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  和矩阵  $W \in \mathbf{R}^{m \times n}, R \in \mathbf{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ ,使得下面的矩阵不等式(12)成立,则称分数阶奇异多智能体系统(3)–(4)实现领导者-跟随一致性.

$$\begin{bmatrix} \bar{\Xi}_{11} I_{2N} \otimes (R^T E_0^T) (- (I_2 \otimes H) \otimes (BWC))^T \\ * & -I_{2N} \otimes P & 0 \\ * & * & -I_{2N} \otimes P \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

其中,  $\bar{\Xi}_{11} = \text{sym}\left\{\sum_{i=1}^2 [\Theta_{11} \otimes (I_N \otimes (E^T P A) - H \otimes (E^T BWC)) + I_{2N} \otimes (R^T E_0^T A)]\right\}$ .反馈增益  $K$  可以表示为

$$K = (U^{-1}S^{-1}P_{11}^{-1}SU)^T W. \quad (13)$$

**证明** 正定矩阵  $P$  可以表示为

$$P = V \begin{bmatrix} P_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_{22} \end{bmatrix} V^T,$$

因此,由引理 5 可知,存在一个矩阵  $\bar{P}$  使得矩阵  $B^T$  满足  $B^T P = \bar{P} B^T$ .进一步,由引理 4 及酉矩阵的性质可得

$$\bar{P} = USP_{11}S^{-1}U^{-1}, \bar{P}^{-1} = U^{-1}S^{-1}P_{11}^{-1}SU, PB = B\bar{P}^T.$$

通过上述推导,不等式(8)中的矩阵乘积可以写

作  $PBK = B\bar{P}^T K$ .令  $\bar{P}^T K = W$ ,不等式(8)等价于线性矩阵不等式(12),且增益  $K$  如(13)所示.

**定理 3** 当假设 2、3 成立,系数矩阵  $B$  的转置满行秩,且 SVD 分解表示为  $B^T = U[S \ 0]V^T$ ,其中矩阵  $U, S$  和  $V$  定义在引理 4.若存在正定矩阵  $P = V\text{diag}\{P_{11}, P_{22}\}V^T, P_{11} \in \mathbf{R}^{m \times m}, P_{22} \in \mathbf{R}^{(n-m) \times (n-m)}$  和矩阵  $W \in \mathbf{R}^{m \times n}, R \in \mathbf{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ ,使得下面的矩阵不等式(14)成立,则称分数阶奇异多智能体系统(3)–(4)实现领导者-跟随一致性.

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_{11} & I_2 \otimes (R^T E_0^T) & -\lambda_i I_2 \otimes (BWC)^T \\ * & -I_2 \otimes P & 0 \\ * & * & -I_2 \otimes P \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

$i = 1, 2, \dots, N,$

其中,  $\tilde{\Xi}_{11} = \text{sym}\left\{\sum_{i=1}^2 [\Theta_{11} \otimes (E^T P A - \lambda_i E^T BWC) + I_2 \otimes (R^T E_0^T A)]\right\}$ ,反馈增益  $K$  可以表示为

$$K = (U^{-1}S^{-1}P_{11}^{-1}SU)^T W. \quad (15)$$

**证明** 当智能体通信拓扑满足假设 3,可知  $H$  为对称矩阵.令  $\chi(t) = (T^{-1} \otimes I_n)x_e(t)$ ,对分数阶奇异系统(7)作协调变换得

$$(I_N \otimes E) D_i^\alpha \chi(t) = (I_N \otimes A - J \otimes (BKC)) \chi(t), \quad (16)$$

其中,  $J = T^{-1}HT = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}, \lambda_i (i = 1, 2, \dots, N)$  是矩阵  $H$  的第  $i$  个特征根.

进一步,式(16)可以分解为  $N$  个分数阶奇异系统,即:

$$ED_i^\alpha \chi(t) = (A - \lambda_i BKC) \chi(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (17)$$

对于系统(17)采用与定理 2 同样的证明方法即可得定理 3.

### 3 系统仿真

本章给出一个实例主要演示如何求解控制协议中的增益  $K$ .

**例 1** 考虑分数阶奇异多智能体(3)–(4),假设阶数  $\alpha = 0.8$ ,系数矩阵分别为

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

假设多智能体通信网络拓扑  $\mathcal{G}$  如图 1 所示,权值分别为  $h_1 = 2, h_2 = 2, a_{12} = a_{21} = 1, a_{14} = a_{41} = 2,$

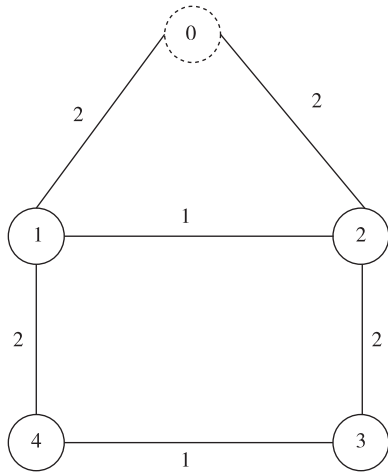


图1 通信网络拓扑图  $\mathcal{S}$   
Fig. 1 Communication topology graph  $\mathcal{S}$

$a_{23} = a_{32} = 2, a_{34} = a_{43} = 1$ ,其余为0.  $\mathcal{S}$ 的拉普拉斯矩阵记为  $L, H = L + \text{diag}\{2,2,0,0,0\}$ .  $H$ 的特征根分别为  $0.7639, 2.7639, 5.2361$  和  $7.2361$ .由  $E^T E_0 = 0$ , 求得  $E_0 = [2 \ -1]^T$ .  $B^T$ 的SVD分解为  $U[S \ 0]V$ ,其中,  $U = [-1]$ ,  $S = [4.472 \ 1]$ ,  $V = \begin{bmatrix} -0.4472 & -0.8944 \\ -0.8944 & 0.4472 \end{bmatrix}$ .利用 Matlab 求解线性矩阵不等式(14)可得,  $W = [0.0482 \ 0.0253]$ ,  $P_{11} = [1.7844]$ ,  $P_{22} = [2.7828]$ .将  $U, S, P_{11}$  和  $W$  带入(15),可得控制增益  $K = [0.0270 \ 0.0142]$ .分数阶奇异多智能体系统(3)–(4)在控制协议(5)作用下的状态轨迹如图2所示,其中虚线表示领导者(4)的状态曲线,实线表示跟随者(3)的状态曲线.

由图2可以发现,智能体1、2、3和4在控制协议(5)的作用下可以跟随领导者(4)的状态.

#### 4 结束语

针对分数阶奇异系统群集行为的理论空白,本文主要研究了分数阶奇异多智能体领导者-跟随一致性问题,提出了一种基于输出反馈信息的控制协议.在通信拓扑为有向图的假设下,得到了领导者-跟随一致性的充分条件.然而该条件有个缺陷,难以求得反馈增益矩阵.通过对系数矩阵转置的SVD分解,可将一致性条件表示为线性矩阵不等式,进而可以通过 Matlab 求解获得增益矩阵.当通信拓扑为无向连通图时,一致性条件可通过  $N$  个简单的线性矩阵不等式表示.仿真结果表明,反馈增益矩阵可以通过求解线性矩阵不等式得到.分数阶奇异多智能体的状态曲线图揭示出应用所提出的控制协议可以有效

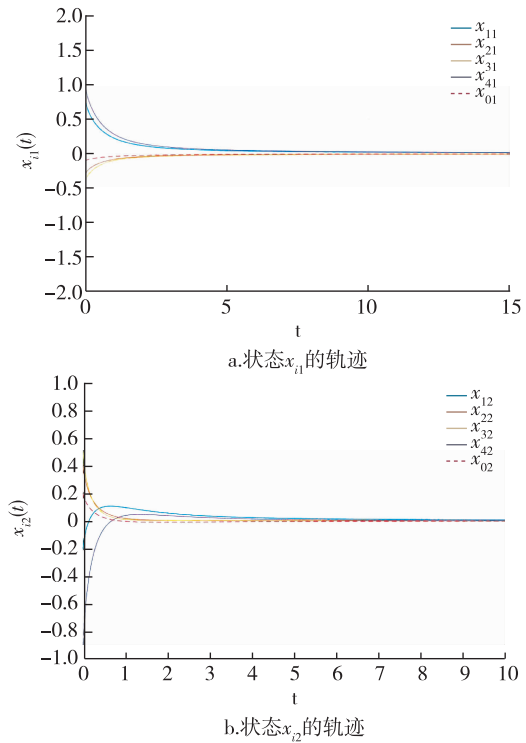


图2 多智能体系统(3)–(4)在控制协议下的状态轨迹  
Fig. 2 State trajectories of fractional-order singular multi-agent system (3)–(4) under protocol (5), (a) state trajectories of  $x_{i1}$ , and (b) state trajectories of  $x_{i2}$

地实现领导者-跟随一致性.

#### 参考文献 References

- [ 1 ] Olfati-Saber R, Fax J A, Murray R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems [ J ]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95( 1 ): 215-233
- [ 2 ] Ren W, Beard R W. Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control: theory and application [ M ]. London: Springer-Verlag, 2007
- [ 3 ] Parrish J K, Hamner W M. Animal groups in three dimensions: how species aggregate [ M ]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1997
- [ 4 ] Djaidja S, Wu Q H. Leader-following consensus for single-integrator multi-agent systems with multiplicative noises in directed topologies [ J ]. International Journal of Systems Science, 2015, 46( 15 ): 2788-2798
- [ 5 ] Wen G H, Yu W W, Li Z K, et al. Neuro-adaptive consensus tracking of multi-agent systems with a high-dimensional leader [ J ]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47( 7 ): 1730-1742
- [ 6 ] Wen G H, Huang T W, Yu W W, et al. Cooperative tracking of networked agents with a high-dimensional leader: qualitative analysis and performance evaluation [ J ]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, DOI: 10.1109/TCYB.

- 2017.2726441
- [ 7 ] Meng Z Y,Zhao Z Y,Lin Z L.On global leader-following consensus of identical linear dynamic systems subject to actuator saturation[J].Systems & Control Letters,2013,62(2):132-142
- [ 8 ] Song Q,Cao J D,Yu W W.Second-order leader-following consensus of nonlinear multi-agent systems via pinning control[J].Systems & Control Letters,2010,59(9):553-562
- [ 9 ] Engheta N. On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism[J].IEEE Transactions on Antennas and Propagation,1996,44(4):554-566
- [ 10 ] Rossikhin Y A,Shitikova M V.Application of fractional derivatives to the analysis of damped vibrations of viscoelastic single mass systems[J].Journal of Sound and Vibration,1997,120(1/2/3/4):109-125
- [ 11 ] Kaczorek T.Singular fractional continuous-time and discrete-time linear systems[J].Acta Mechanica et Automatica,2013,7(1):26-33
- [ 12 ] Cao Y C,Li Y,Ren W,et al.Distributed coordination algorithms for multiple fractional-order systems[C]//Proceeding of the 47th IEEE Conference on Decision and Control,2008:2920-2925
- [ 13 ] Zhu W,Wang M S,Yang C D.Leader-following consensus of fractional-order multi-agent systems with general linear models[C]//Proceeding of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation,2014:3493-3496
- [ 14 ] Ren G J,Yu Y G,Zhang S.Leader-following consensus of fractional nonlinear multi-agent systems[J].Mathematical Problems in Engineering,2015,DOI: 10.1155/2015/919757
- [ 15 ] Yu Z Y,Jiang H J,Hu C.Leader-following consensus of fractional-order multi-agent systems under fixed topology[J].Neurocomputing,2015,149:613-620
- [ 16 ] Shahamatkhah E,Tabatabaei M. Leader-following consensus of discrete-time fractional-order multi-agent systems[J].Chinese Physics B,2018,27(1):010701
- [ 17 ] Yu Z Y, Jiang H J, Hu C, et al. Leader-following consensus of fractional-order multi-agent systems via adaptive pinning control[J].International Journal of Control,2015,88(9):1746-1756
- [ 18 ] Wang F,Yang Y Q.Leader-following consensus of nonlinear fractional-order multi-agent systems via event-triggered control[J].International Journal of Systems Science,2017,48(3):571-577
- [ 19 ] Wei Y H,Tse P W,Yao Z,et al.The output feedback control synthesis for a class of singular fractional order systems[J].ISA Transactions,2017,69:1-9
- [ 20 ] Yu Y,Jiao Z,Sun C Y.Sufficient and necessary condition of admissibility for fractional-order singular systems[J].Acta Automatica Sinica,2013,39(12):2160-2164
- [ 21 ] N'Doye I,Zasadzinski M,Darouach M,et al.Stabilization of singular fractional-order system;an LMI approach[C]//Proceeding of the IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation,2010:209-213
- [ 22 ] Boyd S,Vandenberghe L.Convex optimization[M].Cambridge,UK:Cambridge University Press,2004
- [ 23 ] Macduffee C C.The theory of matrices[M].New York:Dover Publications,2004

## Leader-following consensus of fractional-order singular linear multi-agent systems based on output feedback

PAN Huan<sup>1,2,3</sup> HU Gangdun<sup>1,2,3</sup> XUE Li<sup>1,2,3</sup>

1 School of Physics and Electronic-Electrical Engineering,Ningxia University,Yinchuan 750021

2 Ningxia Key Laboratory of Intelligent Sensing for Desert Information,Yinchuan 750021

3 Ningxia Key Laboratory of Electrical Energy Security,Yinchuan 750004

**Abstract** The leader-following consensus of multi-agent systems is analyzed,where the dynamic of each agent is modeled by a fractional-order singular linear system in this paper.A new control protocol is designed based on the information of outputs.A sufficient condition of leader-following consensus is derived through some proof.Furthermore,the consensus condition is expressed by LMI via singular value decomposition technique (SVD).When the communication topology is assumed to be an undirected graph,the consensus condition is simplified as several simple LMIs.A simulation example is given to show how to solve feedback gain.It can be seen that the results in the paper are correct and effective from the pictures.

**Key words** multi-agent systems;fractional-order systems;leader-following consensus;singular value decomposition (SVD);graph;LMIs