



# 基于复杂网络的城市公交网络研究综述

## 摘要

近年来,基于复杂网络理论的城市公交网络研究得到了人们的广泛关注,相关的研究成果有助于深入理解城市公交网络的运行机理,并为这类网络的设计、优化与控制提供帮助.首先介绍了城市公交网络的研究背景、城市公交系统的网络描述和相关的网络概念.然后从网络的静态特性分析、演化生成建模、行为研究和应用研究等方面对国内外的研究现状进行了总结和分析.最后,总结并讨论了当前基于复杂网络的城市公交网络的研究状况与发展机遇.

## 关键词

城市公交网络;复杂网络理论与工具;静态特性分析;行为研究

中图分类号 U491.1+3

文献标志码 A

收稿日期 2018-06-10

资助项目 浙江省自然科学基金(Q18F030005);中国博士后科学基金(2018M632204)

## 作者简介

陈光,男,博士,讲师,主要研究方向为复杂交通网络的分析与优化.xcgmsn@163.com

1 台州学院 电子与信息工程学院,台州,318000

2 东南大学 数学学院,南京,211189

3 东南大学 交通感知与认知研究中心,南京,211189

## 0 引言

城市公共交通(简称城市公交)一般包含巴士与地铁(轨道交通),是城市公共服务系统的重要组成部分,能为城市居民提供便捷、低成本的出行服务.近年来,随着我国城市化水平的不断提升,城市车辆保有量逐年上升,交通拥堵、尾气污染问题日趋严重.由于城市公共交通的车辆单位面积运载量大,在城市建设与发展的过程中优先发展城市公共交通,是解决城市交通拥堵、节约社会能耗与减少环境污染的有效途径.开展城市公共交通相关的基础研究,有助于理解城市公交系统的运行机理,指导这类系统的设计、优化与控制.相关的研究成果可为科学发展城市公共交通奠定重要的理论基础.

作为典型的交通系统,城市公交系统的相关研究长期受到来自交通、系统及控制等多个领域研究人员的关注.从系统学的角度看,城市公交系统属于典型的复杂网络<sup>[1-4]</sup>系统,它可以通过网络来进行抽象描述(网络的节点表征公交站点,连边表征各站点通过公交线路产生的联系).不同于早期孤立考虑单条公交线路或单个站点的研究,当前考虑网络内所有公交线路、站点间的相互协作与影响来研究城市公交系统已逐渐成为人们的共识.近年来,结合新兴的复杂网络理论<sup>[5-15]</sup>进行各类交通网络的研究吸引了大量研究人员的关注<sup>[16-21]</sup>.作为一类重要的交通网络,基于复杂网络理论的城市公交网络研究在近年得到了有效开展,主要涵盖了城市公交网络的静态分析、演化生成建模、行为研究与应用研究等多个方面.

## 1 城市公交系统的网络描述和相关网络基本概念

### 1.1 城市公交系统的网络描述

城市公交网络可以使用网络来进行抽象描述,其中公交站点被描述为网络节点,连接站点与站点的公交线路段被描述为网络连边.值得注意的是,不同于城市道路网络,城市公交网络以公交线路作为基本管理对象,这使得网络呈现出两种不同形式的拓扑,它们分别是物理连接拓扑和用户换乘拓扑,通常使用 Space-L 和 Space-P 来分别进行表示<sup>[20]</sup>.若一个站点  $j$  在一条线路中是站点  $i$  的下一站,则在物理连接拓扑中存在节点  $i$  到节点  $j$  的一条连边;若一个站点  $i$  能够通过一条线路直达站点  $j$ ,则在用户换乘拓扑中存在节点  $i$  到节点  $j$  的一条连边.图 1 展示了一个简单城市公交网络的两种拓扑.

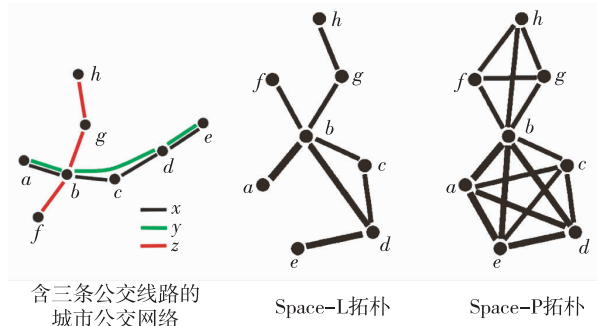


图1 一个简单城市公交网络的 Space-L 和 Space-P 拓扑<sup>[20]</sup>

Fig.1 The Space-L and Space-P topologies of a simple urban public transportation network<sup>[20]</sup>

关于 Space-L 和 Space-P 拓扑的基本理解是,在城市公交网络中乘客通常使用 Space-P 拓扑计算出换乘方案,而出行产生的交通流则具体作用于 Space-L 拓扑.例如,在图 1 的例子中,若一个乘客需要从站点 e 抵达站点 h,根据 Space-P 拓扑可以计算出乘客的最少次数换乘方案为:在站点 e 乘坐一路公交抵达站点 b,再由站点 b 乘坐一路公交抵达站点 h.按照该换乘方案,由 Space-L 拓扑可知该乘客的出行将会给 e→d、d→b(或 d→c、c→b)、b→g 与 g→h 等路段带来一份交通流量.

进一步,可以在城市公交网络 Space-L 和 Space-P 拓扑的基础上引入连边权重(或代价)的概念,将该类网络描述为加权网络.例如,可以定义在 Space-P 拓扑中连接一对站点的连边的权重为它们之间的直达公交线路的数量,如在图 1 的例子中,站点 b 与 h 仅由红色线路连接,则在 Space-P 拓扑中连边 b→h 的权重为 1;站点 b 与 d 由黑色和绿色两条公交线路连接,则在 Space-P 拓扑中连边 b→d 的权重为 2.在此定义下,连边权重反映了城市公交网络中一对直达节点间的最大交通承载量.

除了 Space-L 和 Space-P 拓扑,近年来研究人员也提出了一些包含更多信息的城市公交网络描述方法.例如,文献[22]中给出了一种用二分图描述城市公交网络的方法,如图 2 所示:二分图中使用黑色节点表示线路,使用白色节点表示站点,若一条线路包含一个站点,则在二分图中将对应的线路节点与站点节点连接.基于二分图可以计算给出任意两个站点间的详细换乘方案,如从图 2 可以直观地看出 A 站点到 E 站点的一条可行换乘方案为:在 A 站点搭乘 1 号线抵达 B 站点,再换乘 2 号线抵达 E 站点.文献[23]给出了一种称为扩展空间(extended-space)

的描述方法,该方法为 Space-L 和 Space-P 拓扑的每一条连边设置一个代价,等于对应线路段的物理长度.同时引入一个 Space-W 拓扑,同样为其中的每条连边设置一个代价,等于连边两端站点间的步行物理距离.

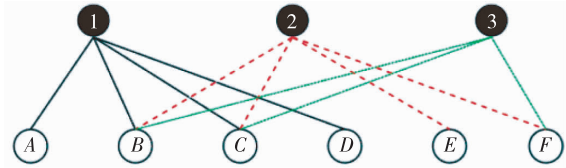


图2 一个简单城市公交网络的线路与站点二分图拓扑<sup>[22]</sup>

Fig.2 The bipartitegraph topology of bus routes and stations of a simple urban public transportation network<sup>[22]</sup>

### 1.2 相关网络基本概念

通常,在网络理论中有如下基本概念.

#### 1) 度(degree)

网络中一个节点的度被定义为该节点的邻居节点(即与它直接相连的节点)的个数,它是描述节点重要性的一种常用指标.具有较大度的节点通常被称为网络的中心(hub)节点,因此有时也称节点度为度中心性(centrality).网络的度分布  $p(k)$  被定义为网络中度为  $k$  的节点所占的比例,即有

$$p(k) = N(k)/N, \tag{1}$$

其中  $N(k)$  为网络中度值为  $k$  的节点的个数, $N$  为网络的节点总数.

在加权网络中节点度的概念可以进行推广,形成节点强度(strength)的概念.一个节点的强度被定义为与该节点直接相连的连边的权值之和.相应地,网络的节点度分布可以被推广为节点强度分布.

在网络静态特性分析中,节点度(强度)分布是一项重要统计属性,它可用于反映网络中连边资源分布的均匀性.

#### 2) 聚类系数(clustering coefficient)

网络中任意一个节点  $i$  的聚类系数  $c_i$  被定义为该节点的邻居节点间实际存在的连边数量与最大可能存在的连边数量的比值,即有

$$c_i = \frac{2x_i}{k_i(k_i - 1)}, \tag{2}$$

其中  $k_i$  为节点  $i$  的邻居个数即度值, $x_i$  为节点  $i$  的邻居节点间实际存在的连边数.从定义可知,聚类系数反映了节点的局域密集程度,聚类系数越大,节点和它的邻居节点间的联系越紧密.网络平均聚类系数  $C$  被定义为网络中所有节点的聚类系数的均值,即有

$$C = \frac{\sum_i c_i}{N}. \quad (3)$$

### 3) 最短路径(shortest path)

网络的两个节点间可能存在多条路径,最短路径长度  $l_{ij}$  是指连接节点  $i$  和节点  $j$  的所有路径中最短(代价最小)的那条路径的长度.在无权网络中,一条路径的长度等于路径途径的连边的数目;在加权网络中,一条路径的长度等于路径途径的站点与连边的代价之和.若不考虑节点代价,同时连边代价等于连边的物理长度,则路径长度即等于路径途径的连边的物理长度之和.一般使用 Dijkstra 算法或 Floyd 算法计算网络中任意节点对间的最短路径.

网络的特征路径长度(characteristic path length)  $L$  被定义为网络中所有节点对的最短路径长度的均值,即有

$$L = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} l_{ij}. \quad (4)$$

网络的直径(diameter)则被定义为网络中所有节点对的最短路径长度的最大值.

### 4) 介数(betweenness)

网络的介数可分为点介数与边介数两类.某个节点(某条连边)的介数被定义为网络中通过该节点(连边)的最短路径的条数,即一个节点(连边)  $i$  的介数  $B_i$  可以表示为

$$B_i = \sum_{o \neq d} \sigma_{od}(i), \quad (5)$$

其中当从节点  $o$  出发到节点  $d$  的最短路径经过节点(连边)  $i$  时,  $\sigma_{od}(i) = 1$ , 否则为  $\sigma_{od}(i) = 0$ . 从定义可以看出,介数是描述节点或连边上经过的交通流的一种指标.与节点度(强度)一样,节点的介数可用于描述节点的重要性,有时也称它为介数中心性.与度分布类似,可以定义网络的介数分布用于考察平均意义上的网络交通流分布均匀性.

## 2 基于复杂网络的城市公交网络研究现状

当前,基于复杂网络的城市公交网络研究大致可分为城市公交网络的静态特性分析、演化生成建模、行为研究,以及应用研究等 4 个方面.以下分别就这 4 个方面展开城市公交网络的研究现状介绍.

### 2.1 城市公交网络的静态特性分析

在对城市公交网络进行合理(例如使用前文所述的 Space-L 和 Space-P 拓扑)网络描述之后,便可开展这类网络的静态特性分析.通过这类研究,一方

面可找出城市公交网络共有的结构特征,为理解城市公交网络的演化与运行机理提供参考;另一方面可建立网络静态性能分析的基本框架,用于定量评价一个网络性能的优良,也可用于为后续深入的网络行为研究与应用研究等服务.

在 Space-L 和 Space-P 拓扑于 2003 年被首先应用于铁路网络的静态特性分析<sup>[24]</sup>之后,由于铁路网络与城市公交网络的相似性(均以线路作为基本管理对象),基于这两种拓扑的城市公交网络静态特性分析研究也得到了大量的开展.例如:文献[25]对北京公交网络进行了拓扑特性分析;文献[26]对国内 330 个城市的公交网络进行了拓扑特性分析;文献[27]对波兰 21 个城市的公交网络进行了拓扑特性分析.相关研究大多考察了网络的度分布、特征路径长度、平均聚类系数、介数分布等统计指标,结果表明多数城市公交网络表现出如下相同的静态统计特性:

1) Space-P 拓扑具有较小的特征路径长度,即城市公交网络的任意两个站点间的换乘次数较小,具有明显的“小世界”特性.例如,文献[23]的结果显示 2014 年时,北京城市公交网络 Space-P 拓扑的特征路径长度在 3.2 左右,即任意两个站点间平均只需换乘 2.2 次可抵达彼此;

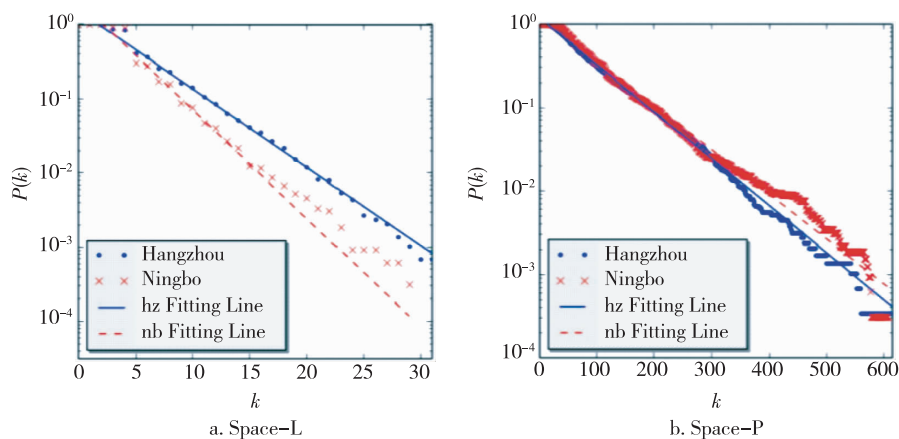
2) Space-L 和 Space-P 拓扑的累积度分布近似表现为指数形式而非在社交网络等其他复杂网络中常见的幂律形式,即满足:

$$P(k) = \sum_{x \leq k} p(x) \sim e^{-\lambda k}. \quad (6)$$

图 3 是文献[28]中给出的杭州和宁波的 Space-L 和 Space-P 拓扑的累积度分布,它们在半对数  $y$  坐标系中可较好地拟合为直线,说明它们符合式(6)的形式.

除了上述普遍观察到的静态特性,在很多研究中也包含了更为深入的城市公交网络静态特性统计.例如:文献[24]的结果显示在 Space-P 和 Space-L 拓扑中任意站点间的最短路径长度  $l$  服从  $p(l) \sim A \exp(-Bl^2 + Cl)$  的概率分布,度为  $k$  的站点到度为  $q$  的站点的平均最短路径长度  $l(k, q)$  服从  $l(k, q) \sim A - B \log(kq)$ ; 文献[29]基于实际线路段客流数据对城市公交网络的 Space-P 拓扑进行了加权处理,其中连边的代价与对应线路段上的乘客量相关,线路段上的乘客量越大(越拥堵)则连边代价越大,统计结果表明,以此定义的加权网络中任意两个节点间的最短路径长度服从高斯分布.

值得说明的是,城市公交网络属于典型的空间

图3 杭州和宁波公交网络 Space-L 和 Space-P 拓扑的累积度分布<sup>[28]</sup>Fig. 3 The degree distributions of the Space-L and Space-P topologies of the urban public transportation networks of Hangzhou and Ningbo<sup>[28]</sup>

网络(spatial network)<sup>[20]</sup>,它们的站点和线路段分布于近似二维的城市平面之中,具有站点位置、线路段长度等空间属性.对于同时包含地铁和巴士的城市公交网络而言,它们也属于双层耦合网络,如图4所示:网络中地铁层子网与巴士层子网通过临近的换乘站点耦合,共同提供乘客便捷的公交出行服务.

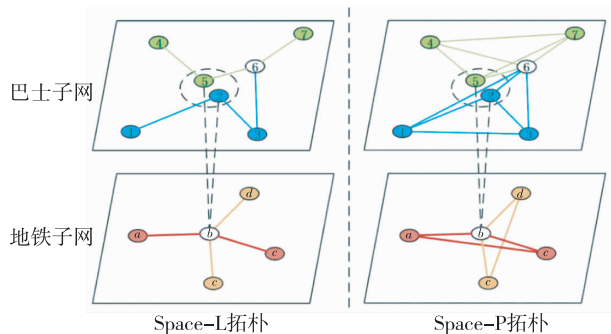


图4 一个双层耦合空间城市公交网络

Fig. 4 A two-layer coupled spatial urban public transportation network

考虑城市公交网络的空间双层耦合特性,当前已有一些网络静态特性统计分析研究得到了开展.如文献[23]在网络静态特性分析时,考虑了临近站点间的短距步行非同站换乘因素,同时探讨了该因素的引入对网络特征路径长度带来的影响;文献[30]基于广州城市公交网络发展的历史数据,通过对比分析地铁线路加入城市公交网络前后的变化,定量分析了地铁网络建设对城市公交网络可达性指标的影响.

## 2.2 城市公交网络的演化生成建模

建立城市公交网络的演化生成模型是近年来基于复杂网络的城市公交网络研究的另一个关注点.它的开展一方面有助于揭示隐藏在实际观测到的网络静态特性背后的网络演化生成机理,另一方面也可用于生成仿真网络为该类网络后续深入的研究提供服务.

文献[2]指出在网络生成过程中,若新增的节点以相同的概率与任意老节点产生连接,则网络将逐渐呈现出指数型度分布;若新增的节点更易于与大度老节点产生连接,则网络将逐渐呈现出幂律型度分布.根据前文所述,统计研究表明大多数城市公交网络的度分布近似呈现为指数型,由此可以推测均匀随机连接过程可能是城市公交网络演化生成中的一个关键因素.近年来,多数城市公交网络的演化生成建模研究引入了这一因素.以下是其中有代表性的几项研究.

文献[31]基于一条公交线路包含的站点在Space-P拓扑中彼此间相互连接构成网络的一个派系(即全连通子图)这一事实,提出了一种基于派系增长的城市公交网络生成模型:从初始仅包含一个派系(即一条公交线路)的状态开始,每个演化时间步为网络添加一个新派系,新增派系的部分节点从当前网络已有节点中按均匀分布随机选取,其余节点为新增节点.统计结果显示,该模型建立的仿真网络具有与实际城市公交网络近似的静态特性.

文献[32]基于线路择优连接和站点随机游走提出了一个城市公交网络演化模型.该模型以二维网



格网络作为嵌入空间,限定站点只能位于其中一个网格的中央.在演化的每一时间步,为网络添加一条公交线路:1)首先从已有站点中随机选出一个站点作为自身包含的站点,其中一个站点被选中的概率与其度成正比;2)然后从该站点出发沿两个方向扩展线路,直到线路包含的站点达到一定数目.线路的扩展过程如图5所示:每次以固定的概率分布随机选出当前待扩展站点所处网格的三步近邻中的一个网格,若选中的网格中已存在站点,则连接该站点与当前被扩展站点;否则,在选中的网格中添加新站点,再连接新站点与当前待扩展站点.文中使用上述模型以南京公交网络的相关统计参数建立了一个仿真城市公交网络,通过对比分析发现建立的仿真网络具有与实际网络近似的度分布特性.

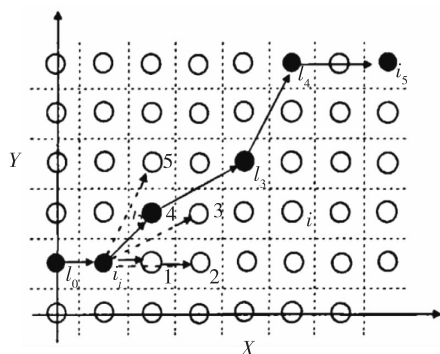


图5 文献[32]中为从一个站点出发扩展线路的过程

Fig. 5 The process of extending a route from a station designed in [32]

文献[22]同样以二维网格网络(每一行每一列均包含 $X$ 个网格)作为嵌入空间研究了城市公交网络的演化生成模型,不同的是在其模型中初始在每个网格中已设置站点,但这些站点间不存在连接.在演化的每一时间步,以自规避随机游走(self-avoiding random walk)的方式在二维规则网格中添加一条公交线路,具体操作为:1)首先从所有站点中随机选出一个站点作为当前新增公交线路的终点站,满足一个站点 $x$ 被选中的概率正比于 $k_x+a/X$ ,其中 $k_x$ 为当前通过站点 $x$ 的公交线路数;2)从选中的终点站出发逐个站点扩展线路直到线路包含的站点达到一定数目.线路扩展的具体过程是:从当前待扩展站点的邻接网格中随机选出一个未被包含在当前待扩展线路中的站点作为当前待扩展站点的下一站(即连接这两个站点),并使其成为新的待扩展站点,满足一个邻居站点 $x$ 选中的概率正比于 $k_x+b$ .该模型通

过控制 $a$ 和 $b$ 这两个自由参数的取值,可生成具有不同静态特性的仿真城市公交网络.

除了上述研究,还存在一些有特色的考虑更多因素的城市公交网络演化生成建模工作,例如:文献[33]基于多层派系理论提出了一种可使Space-P拓扑直径可控的城市公交网络演化生成模型;文献[34]基于乘客出现需求分布、乘客的出行行为模式提出了一个以交通流驱动的城市公交网络演化生成模型.

### 2.3 城市公交网络的行为研究

网络系统在运行过程中内部会发生物质、信息等的传播,并可能受到外部因素或事件的影响,由此产生一定的动态行为.网络结构作为网络系统的基础设施,影响网络的诸多行为.开展网络的行为研究,有助于理解网络的动态运行机理,为其设计、优化与控制网络结构提供帮助.当前,关于城市公交网络的行为研究主要集中于网络抗毁性能研究.

当网络中的一些节点或连边因为某些原因发生失效,例如受到物理性打击而毁坏或因发生交通拥堵而瘫痪时,它们等效于从网络中被移除,会对网络的连通性造成不良影响.较为严重(即因失效而移除过多的节点或连边)时,会使网络分割成多个彼此间相互不可达的孤立连通子图.在网络抗毁性能研究中,相同失效节点比例下网络最大连通子图包含的节点数是衡量网络抗毁性能的重要指标,该指标越大说明网络具有越好的鲁棒性.

近年来,关于城市公交网络的抗毁性能研究得到了有效开展,例如:文献[35]的研究表明,类似于无标度网络,城市公交网络对于针对大度节点的蓄意攻击具有脆弱性;文献[36]研究了多种节点公交策略下城市公交网络的抗毁性能,结果表明对Space-P拓扑中的高介数节点实施攻击可使网络最容易出现结构崩溃;文献[37]基于网络拓扑提出了城市公交网络的连接熵(connectivity entropy)指标,并据此分析了地铁网络的可靠性问题.

作为一种交通网络,城市公交网络在部分节点或连边失效时,原本经过失效节点或连边上的交通流可能会迁移到临近的节点与连边上,甚至导致它们发生交通拥堵而瘫痪,形成交通的级联失效.网络级联失效在网络中的影响范围是网络鲁棒性的另一重要体现.相同初始失效节点比例下,级联失效的节点越少说明网络具有越好的鲁棒性.当前,城市公交网络的级联失效问题研究尚处于起步阶段,比较有

代表性的如:文献[38]研究了公交-地铁耦合网络中的交通级联失效问题,发现网络失效的范围会随着公交子网与地铁子网耦合强度的增强而扩大;文献[39]同样在公交-地铁耦合网络研究中考虑了交通级联失效因素,发现公交和地铁的协作提升了城市公交网络的鲁棒性。

除了网络抗毁性能研究,当前引入复杂网络中的传染病传播行为与状态同步行为的城市公交网络研究也得到了一定开展。如:文献[40]在城市公交网络中引入 SIS 传染病传播模型,理论推导了能够使传染病在这类网络中持久存在的感染率阈值,并通过仿真验证了理论推导;文献[41]为城市公交网络定义 Space-P 拓扑与线路连接拓扑(以线路为节点,若两条线路包含相同站点则对应的节点存在连边),这两个拓扑以换乘节点产生耦合,即线路拓扑中的节点与在 Space-P 拓扑中其对应线路包含的换乘站点进行耦合。之后,作者根据双层耦合网络的同步理论研究了该网络中的状态同步行为。

#### 2.4 城市公交网络的应用研究

当前基于复杂网络理论的城市公交网络应用研究尚处于起步阶段,研究内容主要集中在如下两个方面:

##### 1) 网络中关键站点的探测

城市公交网络中部分站点对于网络的静动态性能有着重要的影响,例如:某些站点是影响网络静态鲁棒性的关键站点,它们的失效会极大地降低网络的连通性或增加网络的特征路径长度;某些站点是承担交通流中转的关键站点,它们的失效会引发网络的交通拥堵或级联失效。探测网络中的这些关键站点对网络的设计、优化与控制有积极的指导意义。部分相关研究得到了有效开展,如:文献[42]基于站点对网络路径长度与换乘次数的综合作用提出了探测网络换乘关键站点的方法,仿真结果表明该算法能有效探测出一些对网络换乘性能有重要作用但在常规节点中心性指标(如节点度指标)看来并不重要的关键节点。

##### 2) 网络的设计、优化与控制

城市公交网络的合理设计、优化与控制是提高网络服务性能,提升乘客满意度的重要工具。网络设计与优化通过调整网络的结构(即优化公交线路的设置)来达到目的。文献[43]指出城市公交线路优化问题属于 NP-hard 问题,因此大多数当前开展的城市公交网络设计与优化研究都是基于启发式的优化规则。例如,文献[44]基于物理中的相互作用

聚物理理论提出了一种可根据乘客出行需求分布数据来优化城市公交线路设置的算法,并在伦敦地铁网络上进行了仿真实验,取得了良好的优化效果。而网络控制则是在网络结构不变的情况下,通过在网络运行时对网络施加干预来达到目的,一般来说其算法的实现复杂度较小,但难点在于网络控制问题的数学建模。例如,文献[45]建立了一个时变时滞公交线路网络模型,其中以每条线路上的客流量作为节点的状态变量,推导得到公式化的复杂网络动力模型,并基于网络同步理论研究了通过以公交线路发车间隔为控制量的网络客流均衡控制问题。总体来看,当前城市公交网络的设计、优化与控制研究还存在偏理想化、算法复杂度过高等现实问题,限制了其在实际大型网络中的应用。

### 3 总结

基于复杂网络的城市公交网络研究有着广泛的应用前景,当前受到国内外学者的广泛关注,在网络静态特性分析、演化生成建模、行为研究与应用研究等多方面取得了一定的研究成果。根据当前国内外的研究现状,可以看出目前这方面的研究大多集中于网络的静态特性分析方面,关于这类网络的动态交通、设计、优化与控制方面的相关研究尚处于发展阶段,但已越来越受到研究人员的重视。特别地,随着计算机、通信技术的快速发展,当前大量的城市公交网络数据得到了存储与公开,相信未来在大数据与人工智能的支持下,相关方面的研究可取得不错的进展,为复杂网络理论的应用拓展领地,为传统城市公交网络的研究增加活力。

### 参考文献

#### References

- [1] 《中国公路学报》编辑部.中国交通工程学术综述:2016[J].中国公路学报,2016,29(6):1-161  
Editorial Department of China Journal of Highway and Transport. Review on China's traffic engineering research progress:2016[J].China Journal of Highway and Transport,2016,29(6):1-161
- [2] Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, et al. Complex networks: structure and dynamics[J].Complex Systems & Complexity Science,2006,424(4/5):175-308
- [3] 汪小帆,李翔,陈关荣.网络科学导论[M].北京:高等教育出版社,2012  
WANG Xiaofan, LI Xiang, CHEN Guanrong. Network science: an introduction [M]. Beijing: Higher Education Press, 2012
- [4] Yu W W, Cao J D, Chen G R, et al. Special focus on dis-

- tributed cooperative analysis, control and optimization in networks [J]. *Science China (Information Sciences)*, 2017, 60(11):110200
- [5] Xia Y X, Hill D J. Dynamic Braess's paradox in complex communication networks [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, 2013, 60(3):172-176
- [6] Chen S Y, Huang W, Cattani C, et al. Traffic dynamics on complex networks: a survey [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012, DOI:10.1155/2012/732698
- [7] Barrat A, Fernandez B, Lin K K, et al. Modeling temporal networks using random itineraries [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 110(15):158702
- [8] Lu J Q, Li H T, Liu Y, et al. Survey on semi-tensor product method with its applications in logical networks and other finite-valued systems [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(13):2040-2047
- [9] Fortunato S. Community detection in graphs [J]. *Physics Reports*, 2010, 486(3/4/5):75-174
- [10] Wen G H, Hu G Q, Hu J Q, et al. Frequency regulation of source-grid-load systems: a compound control strategy [J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2016, 12(1):69-78
- [11] Ruan Z Y, Iniguez G, Karsai M, et al. Kinetics of social contagion [J]. *Physical Review Letters*, 2015, 115(21):218702
- [12] Hu H X, Yu W W, Wen G H, et al. Reverse group consensus of multi-agent systems in the cooperation-competition network [J]. *IEEE Transactions on Circuits & Systems I: Regular Papers*, 2016, 63(11):2036-2047
- [13] Xuan Q, Fu C B, Yu L. Ranking developer candidates by social links [J]. *Advances in Complex Systems*, 2014, 17(7/8):1550005
- [14] Wang S L, Hong L, Ouyang M, et al. Vulnerability analysis of interdependent infrastructure systems under edge attack strategies [J]. *Safety Science*, 2014, 51(1):328-337
- [15] 吴建军,高自友,孙会君,等.城市交通系统复杂性:复杂网络方法及其应用[M].北京:科学出版社,2010  
WU Jianjun, GAO Ziyu, SUN Huijun, et al. Complexity of urban transportation systems: complex network methods and their application [M]. Beijing: Science Press, 2010
- [16] Rose A, O'Dea R, Hopcraft K I. Price of anarchy on heterogeneous traffic-flow networks [J]. *Physical Review E*, 2016, 94(3):032315
- [17] Li D Q, Fu B W, Wang Y P, et al. Percolation transition in dynamical traffic network with evolving critical bottlenecks [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2015, 112(3):669-672
- [18] Ben-Akiva M E, Song G, Zheng W, et al. A dynamic traffic assignment model for highly congested urban networks [J]. *Transportation Research Part C (Emerging Technologies)*, 2012, 24(24):62-82
- [19] He K, Xu Z Z, Wang P, et al. Congestion avoidance routing based on large-scale social signals [J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2016, 17(9):2613-2626
- [20] Barthélemy M. Spatial networks [J]. *Physics Reports*, 2013, 499(1/2/3):1-86
- [21] Morris R G, Barthelemy M. Transport on coupled spatial networks [J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109(12):128703
- [22] Von Ferber C, Holovatch T, Holovatch Y, et al. Public transport networks: empirical analysis and modeling [J]. *European Physical Journal B*, 2009, 68(2):261-275
- [23] Yang X H, Chen G, Chen S Y, et al. Study on some bus transport networks in China with considering spatial characteristics [J]. *Transportation Research Part A*, 2014, 69(C):1-10
- [24] Sen P, Dasgupta S, Chatterjee A, et al. Small-world properties of the Indian railway network [J]. *Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics*, 2003, 67(3Pt2):036106
- [25] 赵金山,狄增如,王大辉.北京市公共汽车交通网络几何性质的实证研究 [J]. *复杂系统与复杂性科学*, 2005, 2(2):45-48  
ZHAO Jinshan, DI Zengru, WANG Dahui. Empirical research on public transport network of Beijing [J]. *Complex System and Complexity Science*, 2005, 2(2):45-48
- [26] 许晴,祖正虎,徐致靖,等.330个中国城市P空间下公交复杂网络实证研究 [J]. *交通运输系统工程与信息*, 2013, 13(1):193-198  
XU Qing, ZU Zenghu, XU Zhijing, et al. Space P-based empirical research on public transport complex networks in 330 cities of China [J]. *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology*, 2013, 13(1):193-198
- [27] Sienkiewicz J, Holyst J A. Public transport systems in Poland: from Bialystok to Zielona Gora by bus and tram using universal statistics of complex networks [J]. *Acta Physica Polonica*, 2012, 36(5):310-317
- [28] Yang X H, Cheng Z, Chen G, et al. The impact of a public bicycle-sharing system on urban public transport networks [J]. *Transportation Research Part A Policy & Practice*, 2018, 107:246-256
- [29] Hu B Y, Feng S M, Li J Y, et al. Statistical analysis of passenger-crowding in bus transport network of Harbin [J]. *Physica A Statistical Mechanics & Its Applications*, 2018, 490:426-438
- [30] 黄晓燕,张爽,曹小曙.广州市地铁可达性时空演化及其对公交可达性的影响 [J]. *地理科学进展*, 2014, 33(8):1078-1089  
HUANG Xiaoyan, ZHANG Shuang, CAO Xiaoshu. Spatial-temporal evolution of Guangzhou subway accessibility and its effects on the accessibility of public transportation services [J]. *Progress in Geography*, 2014, 33(8):1078-1089
- [31] Yang X H, Wang B, Wang W L, et al. Research on some bus transport networks with random overlapping clique structure [J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2008, 50(11):1249-1254
- [32] 汪涛,许乐,张继,等.城市公交网络的拓扑结构及其演化模型研究 [J]. *公路交通科技*, 2009, 26(11):108-112  
WANG Tao, XU Le, ZHANG Ji, et al. Research on topological structure and evolution model of urban transit

- network[J]. *Journal of Highway and Transportation Research and Development*, 2009, 26(11): 108-112
- [33] Yang X H, Chen G, Sun B, et al. Bus transport network model with ideal n-depth clique network topology [J]. *Physica A Statistical Mechanics & Its Applications*, 2011, 390(23/24): 4660-4672
- [34] Huang A L, Xiong J, Shen J S, et al. Evolution of weighted complex bus transit networks with flow [J]. *International Journal of Modern Physics C*, 2016, 27(6): 1650064
- [35] 汪涛, 吴琳丽. 基于复杂网络的城市公交网络抗毁性分析[J]. *计算机应用研究*, 2010, 27(11): 4084-4086  
WANG Tao, WU Linli. Research on invulnerability of urban transit network based on complex network [J]. *Application Research of Computers*, 2010, 27(11): 4084-4086
- [36] Zhang H, Zhuge C X, Zhao X, et al. Assessing transfer property and reliability of urban bus network based on complex network theory [J]. *International Journal of Modern Physics C*, 2018, 29: 1850004
- [37] Wu L S, Tan Q M, Zhang Y H. Network connectivity entropy and its application on network connectivity reliability [J]. *Physica A Statistical Mechanics & Its Applications*, 2013, 392(21): 5536-5541
- [38] Yang Y H, Liu Y X, Zhou M X, et al. Robustness assessment of urban rail transit based on complex network theory: a case study of the Beijing subway [J]. *Safety Science*, 2015, 79: 149-162
- [39] 沈犁, 张殿业, 向阳, 等. 城市地铁-公交复合网络抗毁性与级联失效仿真 [J]. *西南交通大学学报*, 2018, 53(1): 156-163  
SHEN Li, ZHANG Dianye, XIANG Yang, et al. Simulation on survivability and cascading failure propagation of urban subway-bus compound network [J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2018, 53(1): 156-163
- [40] Yang X H, Wang B, Chen S Y, et al. Epidemic dynamics behavior in some bus transport networks [J]. *Physica A Statistical Mechanics & Its Applications*, 2012, 391(3): 917-924
- [41] 杜文举, 李引珍, 安新磊, 等. 一类新的双层耦合公交网络模型 [J]. *交通运输系统工程与信息*, 2016, 16(4): 131-138  
DU Wenju, LI Yinzen, AN Xinlei, et al. A new class of two layers public traffic coupled network model [J]. *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology*, 2016, 16(4): 131-138
- [42] Chen D M, Huang X Y, Wang D Q, et al. Public transit hubs identification based on complex networks theory [J]. *IETE Technical Review*, 2014, 31(6): 440-451
- [43] Amiripour S M M, Ceder A, Mohaymany A S. Designing large-scale bus network with seasonal variations of demand [J]. *Transportation Research Part C*, 2014, 48: 322-338
- [44] Yeung C H, Saad D, Wong K M. From the physics of interacting polymers to optimizing routes on the London underground [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2013, 110(34): 13717-13722
- [45] 刘兴伟, 张仲荣, 张建刚, 等. 复杂网络同步理论在常规公交调度中的应用 [J]. *兰州交通大学学报*, 2011, 30(1): 135-138  
LIU Xingwei, ZHANG Zhongrong, ZHANG Jiangang, et al. Application of theory of complex network synchronization to the bus conventional transit [J]. *Journal of Lanzhou Jiaotong University*, 2011, 30(1): 135-138

## A survey of studies on urban public transportation networks based on complex network

CHEN Guang<sup>1,2,3</sup> WEN Guanghui<sup>2,3</sup> YU Wenwu<sup>2,3</sup>

1 College of Electronic and Information Engineering, Taizhou University, Taizhou 318000

2 School of Mathematics, Southeast University, Nanjing 211189

3 Research Center for Transportation Perception and Cognition, Southeast University, Nanjing 211189

**Abstract** Recently, the studies of urban public transportation networks based on complex network have attracted extensive attention, relevant research findings are helpful to understand the operation mechanism of urban public transport network in depth, and will aid the design, optimization and control of such networks. This paper first introduces the research background, the network description and some related network concepts of urban public transportation networks, then summarizes and analyzes the research status from aspects of static characteristic analysis, evolutionary generation modeling, behavior study, and application research. Finally, the current research situation and development opportunities for urban public transportation networks based on complex network are summarized and discussed.

**Key words** urban public transportation networks; complex network theories and tools; static characteristic analysis; behavior study