DOI:10.13878/j.cnki.jnuist.2018.02.009

李玲玲[1]　杨荣妮[1]

二维切换系统 FM 状态空间模型的耗散稳定性分析与镇定控制

摘要

针对二维切换系统的 Fornasini-Marchesini(FM)状态空间模型,对系统耗散稳定性以及耗散镇定控制器的设计问题进行研究.首先,根据系统模型的特点,给出了二维系统(T,S,R)-δ-耗散性的定义,并提出二维切换系统渐近稳定和满足(T,S,R)-δ-耗散性的充分条件;然后利用稳定性条件和投影引理,设计了二维(T,S,R)-δ-耗散状态反馈控制器.最后,通过一个数值实例来验证所设计控制器的有效性.

关键词

二维切换系统;FM 状态空间模型;耗散稳定性;耗散控制

中图分类号 TM464

文献标志码 A

收稿日期 2017-12-20

资助项目 山东大学青年学者未来计划(2017WLJH27)

作者简介

李玲玲,女,硕士生,研究方向网络控制.lilingling3928@163.com

杨荣妮(通信作者),女,博士,副教授,硕士生导师,研究方向为网络化控制及多维系统.rnyang@sdu.edu.cn

1 山东大学 控制科学与工程学院,济南,250061

0 引言

由于二维系统的理论重要性和实际应用性,近些年来二维系统受到众多学者的研究和关注.在实际生活中,许多系统可以建模为二维系统,如重复过程、气体吸收、线性图像处理[1-4]和迭代学习控制[5-6].然而这些应用系统容易受到突然变化的影响,如飞行控制系统、电力电子和混沌发生器[7-8],这种现象可以通过切换模型来描述,假定系统通过切换信号在几个模型之间切换运行[9-10].切换系统是一类重要的混杂系统,它包括有限个子系统并且通过切换信号在子系统之间进行切换.近几年来二维切换系统也引起广泛关注,且得到一些初步的结果.例如,二维切换系统的稳定性分析和镇定控制问题[11-12]以及二维切换系统的异步控制问题[13].众所周知,二维系统的模型包括 FM 模型[14]、Roesser 模型[15]、Attasi 模型[16]和 Gereral 模型[17].其中,Roesser 模型、Attasi 模型和 Gereral 模型可以看作是 FM 模型的特例,因此本文针对二维切换系统的 FM 状态空间模型展开研究.

耗散性,意味着系统内部的能量不超过外部为系统所提供的能量.耗散性理论最早由 Willem[18]提出,Hill 等[19]对其进行了推广.耗散理论在控制领域至关重要,为控制系统的设计提供一个统一框架.到目前为止,已经有许多和耗散性相关的结论,如 Li 等[20]考虑了离散时间非线性切换系统的耗散性问题;Wang 等[21]研究了二维 FM 系统的耗散稳定性分析和控制问题.

在本文中,二维切换系统的 FM 状态空间模型的耗散稳定性问题以及耗散镇定控制器的设计问题得到解决.主要的研究思路为:首先给出二维(T,S,R)-δ-耗散性的定义,然后提出保证系统满足渐近稳定性和二维(T,S,R)-δ-耗散性的条件,接着进行耗散镇定控制器的设计,最后通过一个数值算例来验证所设计控制器的有效性.

1 问题描述

考虑以下二维切换系统 FM 状态空间模型:

$$\begin{aligned}x_{i+1,j+1} &= A_1(r_{i,j+1})x_{i,j+1}+A_2(r_{i+1,j})x_{i+1,j}+B_1(r_{i,j+1})u_{i,j+1}+B_2(r_{i+1,j})u_{i+1,j},\\ y_{i,j} &= C(r_{i,j})x_{i,j}+D(r_{i,j})u_{i,j},\end{aligned}\tag{1}$$

其中,$x_{i,j} \in \mathbf{R}^{n_x}$ 表示状态向量,$u_{i,j} \in \mathbf{R}^{n_u}$ 表示控制输入信号,$y_{i,j} \in \mathbf{R}^{n_y}$ 表示测量输出信号,$r_{i,j} \in N$ 表示切换信号,其中 $N = \{1,2,\cdots,M\}$,M 表示子系统的个数. 矩阵 $A_1(r_{i,j+1})$,$A_2(r_{i+1,j})$,$B_1(r_{i,j+1})$,$B_2(r_{i+1,j})$,$C(r_{i,j})$,$D(r_{i,j})$ 为已知的常系数矩阵.

根据一维系统(T,S,R)-δ-耗散性的定义[22-23],下面给出系统(1)满足二维(T,S,R)-δ-耗散性的定义:

定义 1[24] 给定标量 $\delta > 0$,给定矩阵 T,S 和 R,其中 $T \leqslant 0$,R 是实对称矩阵,且存在矩阵 T_*,使得 $-T = T_*^{\mathrm{T}} T_*$,如果不等式

$$\sum_{i=0}^{T_i}\sum_{j=0}^{T_j} y_{i,j}^{\mathrm{T}} T y_{i,j} + 2\sum_{i=0}^{T_i}\sum_{j=0}^{T_j} y_{i,j}^{\mathrm{T}} S u_{i,j} + \sum_{i=0}^{T_i}\sum_{j=0}^{T_j} u_{i,j}^{\mathrm{T}} R u_{i,j} \geqslant \delta \sum_{i=0}^{T_i}\sum_{j=0}^{T_j} u_{i,j}^{\mathrm{T}} u_{i,j} \tag{2}$$

在零边界条件下,对于任意的 $T_i \geqslant 0$ 和 $T_j \geqslant 0$ 均成立,那么就称系统(1) 是严格二维(T,S,R)-δ- 耗散的.

引理 1[11] 如果存在矩阵 $P(p) > 0$,$P(q) > 0$ 和矩阵 $Q(p) > 0$,$\forall p,q \in N$,使得以下线性矩阵不等式成立:

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}(p) P(q) \bar{A}(p) - \bar{P}(p) < 0, \tag{3}$$

其中

$$\bar{A}(p) = [A_1(p), A_2(p)],$$

$$\bar{P}(p) = \mathrm{diag}\{P(p) - Q(p), Q(p)\},$$

$\mathrm{diag}\{\cdots\}$ 表示分块对角矩阵,那么系统(1) 是渐近稳定的.

引理 2[25] 给定矩阵 X,Z,Π,如果存在一个矩阵 Y 满足 $\mathrm{sym}(X^{\mathrm{T}} Y Z) + \Pi < 0$ 当且仅当以下投影不等式成立:

$$Ж_X^{\mathrm{T}} \Pi Ж_X < 0, \quad Ж_Z^{\mathrm{T}} \Pi Ж_Z < 0, \tag{4}$$

其中 $\mathrm{sym}\{A\}$ 表示 $A + A^{\mathrm{T}}$.

2 耗散稳定性分析

基于前面讨论的二维切换系统的模型以及耗散性定义,本节主要对二维切换系统的耗散稳定性进行分析,并给出保证二维系统(1)满足(T,S,R)-δ-耗散性及稳定性的条件.

定理 1 给定标量 $\delta > 0$,给定矩阵 T,S 和 R,R 是实对称矩阵,其中 $T \leqslant 0$,且满足 $-T = T_*^{\mathrm{T}} T_*$,如果存在正定矩阵 $P(p) > 0$,$P(q) > 0$ 和 $Q(p) > 0$,$\forall p,q \in N$ 使得

$$\Psi \triangleq \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ * & \Psi_{22} \end{bmatrix} < 0, \tag{5}$$

其中

$$\Psi_{11} = \bar{A}^{\mathrm{T}}(p) P(q) \bar{A}(p) - \bar{P}(p) - \bar{C}^{\mathrm{T}}(p) T \bar{C}(p),$$

$$\Psi_{12} = \bar{A}^{\mathrm{T}}(p) P(q) \bar{B}(p) - \bar{C}^{\mathrm{T}}(p) T \bar{D}(p) - \bar{C}^{\mathrm{T}}(p) S,$$

$$\Psi_{22} = \bar{B}^{\mathrm{T}}(p) P(q) \bar{B}(p) - \bar{D}^{\mathrm{T}}(p) T \bar{D}(p) - \mathrm{sym}\{\bar{D}^{\mathrm{T}}(p) S\} - R + \delta I,$$

$$\bar{A}(p) = [A_1(p), A_2(p)], \quad \bar{B}(p) = [B_1(p), B_2(p)],$$

$$\bar{C}(p) = \mathrm{diag}\{C(p), C(p)\}, \quad \bar{D}(p) = \mathrm{diag}\{D(p), D(p)\},$$

$$\bar{P}(p) = \mathrm{diag}\{P(p) - Q(p), Q(p)\}.$$

则称系统(1)是渐近稳定和严格二维(T,S,R)-δ-耗散的.

证明

首先,构造如下指标函数:

$$J \triangleq x_{i+1,j+1}^{\mathrm{T}} P(r_{i+1,j+1}) x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1}^{\mathrm{T}} [P(r_{i,j+1}) - Q(r_{i,j+1})] x_{i,j+1} - x_{i+1,j}^{\mathrm{T}} Q(r_{i+1,j}) x_{i+1,j} - [y_{i,j+1}^{\mathrm{T}} T y_{i,j+1} + 2y_{i,j+1}^{\mathrm{T}} S u_{i,j+1} + u_{i,j+1}^{\mathrm{T}} (R - \delta I) u_{i,j+1} + y_{i+1,j}^{\mathrm{T}} T y_{i+1,j} + 2y_{i+1,j}^{\mathrm{T}} S u_{i+1,j} + u_{i+1,j}^{\mathrm{T}} (R - \delta I) u_{i+1,j}]. \tag{6}$$

根据式(1)和(6)可得:

$$J = \xi^{\mathrm{T}} \Psi \xi, \tag{7}$$

其中有

$$\xi^{\mathrm{T}} = [\bar{x}_{i,j}^{\mathrm{T}}, \bar{u}_{i,j}^{\mathrm{T}}],$$

$$\bar{x}_{i,j} = \begin{bmatrix} x_{i,j+1} \\ x_{i+1,j} \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_{i,j} = \begin{bmatrix} u_{i,j+1} \\ u_{i+1,j} \end{bmatrix}.$$

线性矩阵不等式(5)说明 $\Psi < 0$,则对于任意的 $\xi \neq 0$ 均有 $J < 0$.因此可以得到以下线性矩阵不等式

$$x_{i+1,j+1}^{\mathrm{T}} P(r_{i+1,j+1}) x_{i+1,j+1} < x_{i,j+1}^{\mathrm{T}} [P(r_{i,j+1}) - Q(r_{i,j+1})] x_{i,j+1} + x_{i+1,j}^{\mathrm{T}} Q(r_{i+1,j}) x_{i+1,j} + [y_{i,j+1}^{\mathrm{T}} T y_{i,j+1} + 2y_{i,j+1}^{\mathrm{T}} S u_{i,j+1} + u_{i,j+1}^{\mathrm{T}} (R - \delta I) u_{i,j+1} + y_{i+1,j}^{\mathrm{T}} T y_{i+1,j} + 2y_{i+1,j}^{\mathrm{T}} S u_{i+1,j} + u_{i+1,j}^{\mathrm{T}} (R - \delta I) u_{i+1,j}]. \tag{8}$$

根据式(8)可得:

$$x_{i+1,0}^{\mathrm{T}} P(r_{i+1,0}) x_{i+1,0} = x_{i+1,0}^{\mathrm{T}} P(r_{i+1,0}) x_{i+1,0},$$

$$x_{i,1}^{\mathrm{T}} P(r_{i,1}) x_{i,1} < x_{i-1,1}^{\mathrm{T}} [P(r_{i-1,1}) - Q(r_{i-1,1})] x_{i-1,1} + x_{i-1,1}^{\mathrm{T}} Q(r_{i-1,1}) x_{i-1,1} + [y_{i-1,1}^{\mathrm{T}} T y_{i-1,1} + 2y_{i-1,1}^{\mathrm{T}} S u_{i-1,1} + u_{i-1,1}^{\mathrm{T}} (R - \delta I) u_{i-1,1}] + y_{i,0}^{\mathrm{T}} T y_{i,0} + 2y_{i,0}^{\mathrm{T}} S u_{i,0} + u_{i,0}^{\mathrm{T}} (R - \delta I) u_{i,0}],$$

$$x_{i-1,2}^{\mathrm{T}} P(r_{i-1,2}) x_{i-1,2} < x_{i-2,2}^{\mathrm{T}} [P(r_{i-2,2}) - Q(r_{i-2,2})] x_{i-2,2} + x_{i-1,1}^{\mathrm{T}} Q(r_{i-1,1}) x_{i-1,1} + [y_{i-2,2}^{\mathrm{T}} T y_{i-2,2} + 2y_{i-2,2}^{\mathrm{T}} S u_{i-2,2} + u_{i-2,2}^{\mathrm{T}} (R - \delta I) u_{i-2,2} + y_{i-1,1}^{\mathrm{T}} T y_{i-1,1} + 2y_{i-1,1}^{\mathrm{T}} S u_{i-1,1} + u_{i-1,1}^{\mathrm{T}} (R - \delta I) u_{i-1,1}],$$

$$\vdots$$

$$x_{1,i}^{\mathrm{T}} P(r_{1,i}) x_{1,i} < x_{0,i}^{\mathrm{T}} [P(r_{0,i}) - Q(r_{0,i})] x_{0,i} + x_{1,i-1}^{\mathrm{T}} Q(r_{1,i+1}) x_{1,i-1} + [y_{0,i}^{\mathrm{T}} T y_{0,i} + 2y_{0,i}^{\mathrm{T}} S u_{0,i} + u_{0,i}^{\mathrm{T}} (R - \delta I) u_{0,i} + y_{1,i-1}^{\mathrm{T}} T y_{1,i-1} + 2y_{1,i-1}^{\mathrm{T}} S u_{1,i-1} + u_{1,i-1}^{\mathrm{T}} (R - \delta I) u_{1,i-1}],$$

$$x_{0,i+1}^{\mathrm{T}}P(r_{0,i+1})x_{0,i+1}=x_{0,i+1}^{\mathrm{T}}P(r_{0,i+1})x_{0,i+1}.$$

对以上线性矩阵不等式组求和得到:

$$\sum_{j=0}^{i+1}x_{i+1-j,j}^{\mathrm{T}}P(r_{i+1-j,j})x_{x+1-j,j}\leqslant\sum_{j=0}^{i}x_{i-j,j}^{\mathrm{T}}P(r_{i-j,j})x_{i-j,j}+2\sum_{j=0}^{i}[y_{i-j,j}^{\mathrm{T}}Ty_{i-j,j}+2y_{i-j,j}^{\mathrm{T}}Su_{i-j,j}+u_{i-j,j}^{\mathrm{T}}(R-\delta I)u_{i-j,j}].$$

根据求和后的线性矩阵不等式可构造如下线性矩阵不等式组:

$$x_{1,0}^{\mathrm{T}}P(r_{1,0})x_{1,0}+x_{0,1}^{\mathrm{T}}P(r_{0,1})x_{0,1}\leqslant x_{0,0}^{\mathrm{T}}P(r_{0,0})x_{0,0}+2[y_{0,0}^{\mathrm{T}}Ty_{0,0}+2y_{0,0}^{\mathrm{T}}Su_{0,0}+u_{0,0}^{\mathrm{T}}(R-\delta I)u_{0,0}],$$

$$x_{2,0}^{\mathrm{T}}P(r_{2,0})x_{2,0}+x_{1,1}^{\mathrm{T}}P(r_{1,1})x_{1,1}+x_{0,2}^{\mathrm{T}}P(r_{0,2})x_{0,2}\leqslant x_{1,0}^{\mathrm{T}}P(r_{1,0})x_{1,0}-x_{0,1}^{\mathrm{T}}P(r_{0,1})x_{0,1}+2[y_{1,0}^{\mathrm{T}}Ty_{1,0}+2y_{1,0}^{\mathrm{T}}Su_{1,0}+u_{1,0}^{\mathrm{T}}(R-\delta I)u_{1,0}]+2[y_{0,1}^{\mathrm{T}}Ty_{0,1}+2y_{0,1}^{\mathrm{T}}Su_{0,1}+u_{0,1}^{\mathrm{T}}(R-\delta I)u_{0,1}],$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=0}^{\Gamma+1}x_{\Gamma+1-j,j}^{\mathrm{T}}P(r_{\Gamma+1-j,j})x_{\Gamma+1-j,j}\leqslant\sum_{j=0}^{\Gamma}x_{\Gamma-j,j}^{\mathrm{T}}P(r_{\Gamma-j,j})x_{\Gamma-j,j}+2\sum_{j=0}^{\Gamma}y_{\Gamma-j,j}^{\mathrm{T}}Ty_{\Gamma-j,j}+2y_{\Gamma-j,j}^{\mathrm{T}}Su_{\Gamma-j,j}+u_{\Gamma-j,j}^{\mathrm{T}}(R-\delta I)u_{\Gamma-j,j}.$$

接着,对不等式两边求和得:

$$\sum_{i=0}^{\Gamma}\sum_{j=0}^{i}[y_{i-j,j}^{\mathrm{T}}Ty_{i-j,j}+2y_{i-j,j}^{\mathrm{T}}Su_{i-j,j}+u_{i-j,j}^{\mathrm{T}}(R-\delta I)u_{i-j,j}]\geqslant\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\Gamma+1}x_{\Gamma+1-j,j}^{\mathrm{T}}P(r_{\Gamma+1-j,j})x_{\Gamma+1-j,j},$$

$$\sum_{i=0}^{\Gamma}\sum_{j=0}^{i}[y_{i-j,j}^{\mathrm{T}}Ty_{i-j,j}+2y_{i-j,j}^{\mathrm{T}}Su_{i-j,j}+u_{i-j,j}^{\mathrm{T}}(R-\delta I)u_{i-j,j}]\geqslant 0.\tag{9}$$

对式(9)进行变形得:

$$\sum_{i=0}^{\Gamma}\sum_{j=0}^{i}[y_{i-j,j}^{\mathrm{T}}Ty_{i-j,j}+2y_{i-j,j}^{\mathrm{T}}Su_{i-j,j}+u_{i-j,j}^{\mathrm{T}}Ru_{i-j,j}]\geqslant\delta\sum_{i=0}^{\Gamma}\sum_{j=0}^{i}u_{i-j,j}^{\mathrm{T}}u_{i-j,j}.\tag{10}$$

最后根据定义 1 可以判断系统(1)是严格二维(T,S,R)-δ-耗散的.

下面,令系统(1)中的 $u_{i,j}=0$.根据定理 1,有

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}(p)P(q)\bar{A}(p)-\bar{P}(p)-\bar{C}^{\mathrm{T}}(p)T\bar{C}(p)<0,$$
$$\bar{A}^{\mathrm{T}}(p)P(q)\bar{A}(p)-\bar{P}(p)<\bar{C}^{\mathrm{T}}(p)T\bar{C}(p)\leqslant 0.$$

通过引理 1 可以判断系统(1)是渐近稳定的.则定理得证.

定理 2 给定标量 $\delta>0$,给定矩阵 T,S 和 R,R 是实对称矩阵,其中 $T\leqslant 0$,且满足 $-T=T_{*}^{\mathrm{T}}T_{*}$,如果存在正定矩阵 $P(p)>0$,$P(q)>0$ 和 $Q(p)>0$,$p,q\in N$ 使得:

$$\begin{bmatrix}-\bar{P}(p) & -\bar{C}^{\mathrm{T}}(p)S & \bar{A}^{\mathrm{T}}(p)P(q) & \bar{C}^{\mathrm{T}}(p)T_{*}^{\mathrm{T}}\\ * & \tilde{P}(p) & \bar{B}^{\mathrm{T}}(p)P(q) & \bar{D}^{\mathrm{T}}(p)T_{*}^{\mathrm{T}}\\ * & * & -P(q) & 0\\ * & * & * & -I\end{bmatrix}<0,\tag{11}$$

其中,

$$\tilde{P}(p)=-\operatorname{sym}\{\bar{D}^{\mathrm{T}}(p)S\}-R+\delta I,$$

则系统(1)是渐近稳定和严格二维(T,S,R)-δ-耗散的.

证明

线性矩阵不等式(5)可以写成如下形式:

$$\begin{bmatrix}-\bar{P}(p) & -\bar{C}^{\mathrm{T}}(p)S\\ * & -\operatorname{sym}\{\bar{D}^{\mathrm{T}}(p)S\}-R+\delta I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{A}(p) & \bar{B}(p)\\ T_{*}\bar{C}(p) & T\bar{D}(p)_{*}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}P(q) & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\bar{A}(p) & \bar{B}(p)\\ T_{*}\bar{C}(p) & T\bar{D}(p)_{*}\end{bmatrix}<0.\tag{12}$$

对上式运用 Schur 定理可得:

$$\begin{bmatrix}-\bar{P}(p) & -\bar{C}^{\mathrm{T}}(p)S & \bar{A}^{\mathrm{T}}(p) & \bar{C}^{\mathrm{T}}(p)T_{*}^{\mathrm{T}}\\ * & \tilde{P}(p) & \bar{B}^{\mathrm{T}}(p) & \bar{D}^{\mathrm{T}}(p)T_{*}^{\mathrm{T}}\\ * & * & -P^{-1}(q) & 0\\ * & * & * & -I\end{bmatrix}<0.\tag{13}$$

式(13)左乘对角阵 $\operatorname{diag}\{I,I,P(q),I\}^{\mathrm{T}}$,右乘对角阵 $\operatorname{diag}\{I,I,P(q),I\}$ 可以得到式(11).证毕.

3 耗散状态反馈控制器的设计

本节基于二维切换系统耗散稳定性的分析结果,为二维切换系统设计具有耗散性能的状态反馈控制器.首先考虑如下二维切换 FM 系统:

$$\begin{aligned}x_{i+1,j+1}&=A_1(r_{i,j+1})x_{i,j+1}+A_2(r_{i+1,j})x_{i+1,j}+B_1(r_{i,j+1})u_{i,j+1}+B_2(r_{i+1,j})u_{i+1,j}+G_1(r_{i,j+1})\omega_{i,j+1}+G_2(r_{i+1,j})\omega_{i+1,j},\\ z_{i,j}&=E(r_{i,j})x_{i,j}+F(r_{i,j})u_{i,j}+G_3(r_{i,j})\omega_{i,j}.\end{aligned}\tag{14}$$

其中,$x_{i,j}\in\mathbf{R}^{n_x}$ 表示状态向量,$u_{i,j}\in\mathbf{R}^{n_u}$ 表示控制输入,$\omega_{i,j}\in\mathbf{R}^{n_\omega}$ 为外部扰动,$z_{i,j}\in\mathbf{R}^{n_z}$ 是控制输出,$r_{i,j}$ 表示切换信号.矩阵 $A_1(r_{i,j+1})$,$A_2(r_{i,j+1})$,$B_1(r_{i,j+1})$,$B_2(r_{i,j+1})$,$G_1(r_{i,j+1})$,$G_2(r_{i,j+1})$,$G_3(r_{i,j})$,$E(r_{i,j})$,$F(r_{i,j})$ 为已知的常系数矩阵.设计状态反馈控制器的形式为

$$u_{i,j}=K(r_{i,j})x_{i,j},\tag{15}$$

其中 $K(r_{i,j})$ 表示控制器的增益.由(14)和(15)可得

相应的闭环系统为

$$x_{i+1,j+1} = \hat{A}(r_{i,j})\bar{x}_{i,j} + \hat{B}(r_{i,j})\overline{\omega}_{i,j},$$
$$z_{i,j} = [E(r_{i,j}) + F(r_{i,j})K(r_{i,j})]x_{i,j} + G_3(r_{i,j})\omega_{i,j}, \quad (16)$$

其中的参数矩阵为

$$\hat{A}(r_{i,j}) = [A_1(r_{i,j+1}) + B_1(r_{i,j+1})K(r_{i,j+1}), A_2(r_{i,j+1}) + B_2(r_{i,j+1})K(r_{i,j+1})],$$

$$\hat{B}(r_{i,j}) = [G_1(r_{i,j+1}), G_2(r_{i,j+1})], \quad \overline{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_{i,j+1} \\ \omega_{i+1,j} \end{bmatrix}.$$

那么,相应的二维(T,S,R)-δ-耗散性能可给定为

$$\sum_{i=0}^{T_i}\sum_{j=0}^{T_j} z_{i,j}^{\mathrm{T}} T z_{i,j} + 2\sum_{i=0}^{T_i}\sum_{j=0}^{T_j} z_{i,j}^{\mathrm{T}} S\omega_{i,j} + \sum_{i=0}^{T_i}\sum_{j=0}^{T_j} \omega_{i,j}^{\mathrm{T}} R\omega_{i,j} \geqslant \delta\sum_{i=0}^{T_i}\sum_{j=0}^{T_j} \omega_{i,j}^{\mathrm{T}}\omega_{i,j}. \quad (17)$$

然后根据定理 1 得出如下引理:

引理 3 给定标量$\delta > 0$,给定矩阵T,S和R,R是实对称矩阵,其中$T \leqslant 0$,且满足$-T = T_*^{\mathrm{T}} T_*$,如果存在正定矩阵$P(p) > 0, P(q) > 0$和$Q(p) > 0$, $\forall p,q \in N$使得:

$$\hat{\Psi} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\Psi}_{11} & \hat{\Psi}_{12} \\ * & \hat{\Psi}_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (18)$$

其中

$$\hat{\Psi}_{11} = \hat{A}^{\mathrm{T}}(p)P(q)\hat{A}(p) - \bar{P}(p) - \hat{C}^{\mathrm{T}}(p)T\hat{C}(p),$$
$$\hat{\Psi}_{12} = \hat{A}^{\mathrm{T}}(p)P(q)\hat{B}(p) - \hat{C}^{\mathrm{T}}(p)T\hat{D}(p) - \hat{C}^{\mathrm{T}}(p)S,$$
$$\hat{\Psi}_{22} = \hat{B}^{\mathrm{T}}(p)P(q)\hat{B}(p) - \hat{D}^{\mathrm{T}}(p)T\hat{D}(p) - \mathrm{sym}\{\hat{D}^{\mathrm{T}}(p)S\} - R + \delta I,$$
$$\hat{C}(p) = \mathrm{diag}\{E(p) + F(p)K(p), E(p) + F(p)K(p)\},$$
$$\hat{D}(p) = \mathrm{diag}\{G_3(p), G_3(p)\},$$
$$\bar{P}(p) = \mathrm{diag}\{P(p) - Q(p), Q(p)\},$$

则称系统(16)是渐近稳定和严格二维(T,S,R)-δ-耗散的.

注 1 由于$P(r_{i,j})$和$Q(r_{i,j})$都是多维系统矩阵,所以通常求解$K(r_{i,j})$的方法将不再有效.因此,本文将集中于解决此问题并得出如下结论:

定理 3 给定标量$\delta > 0$,给定矩阵T,S和R,R是实对称矩阵,其中$T \leqslant 0$,存在一般矩阵$R = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix}$,则下面两个条件等价:

1) 式(18)和$Ж_R^{\mathrm{T}} \Pi Ж_R < 0$,成立,其中

$$\Phi = \begin{bmatrix} P(q) & 0 & 0 & 0 \\ * & I & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{P}(p) & -\hat{C}^{\mathrm{T}}(p)S \\ * & * & * & \tilde{P}(p) \end{bmatrix} < 0, \quad (19)$$

2) 存在一个对角矩阵$J_d = \mathrm{diag}\{J, J\}$使得:

$$\begin{bmatrix} \hat{P}(q) & 0 & J\hat{A}(p) & J\hat{B}(p) \\ * & \hat{I} & JT_*\hat{C}(p) & JT_*\hat{D}(p) \\ * & * & -\bar{P}(p) & -\hat{C}^{\mathrm{T}}(p)S \\ * & * & * & \tilde{P}(p) \end{bmatrix} < 0, \quad (20)$$

其中,

$$\bar{P}(p) = \mathrm{diag}\{P(p) - Q(p), Q(p)\},$$
$$\tilde{P}(p) = -\mathrm{sym}\{\bar{D}^{\mathrm{T}}(p)S\} - R + \delta I,$$
$$\hat{P}(p) = -J - J^{\mathrm{T}} + P(p), \quad \hat{I} = -J - J^{\mathrm{T}} + I.$$

证明 线性矩阵不等式(18)可以转化为

$$\begin{bmatrix} \hat{A}(p) & \hat{B}(p) \\ T_*\hat{C}(p) & T_*\hat{D}(p) \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \Phi \begin{bmatrix} \hat{A}(p) & \hat{B}(p) \\ T_*\hat{C}(p) & T_*\hat{D}(p) \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0. \quad (21)$$

定义X,Y,Z分别为

$$X = J^{\mathrm{T}}, \quad Z = I,$$

$$Y = \begin{bmatrix} -I & 0 & \hat{A}(p) & \hat{B}(p) \\ 0 & -I & T_*\hat{C}(p) & T_*\hat{D}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

然后条件 1) 和 2) 的等价关系可以根据投影引理得到.为了得到状态反馈控制器的增益矩阵$K(r_{i,j})$,可以将矩阵T_*, S, R分割为如下形式:

$$T_* = [T_*^1 \quad T_*^2], \quad S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{bmatrix},$$
$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

基于定理 3 可得如下结论:

定理 4 给定标量$\delta > 0$,给定矩阵T,S和R,R是实对称矩阵,其中$T \leqslant 0$,且满足$-T = T_*^{\mathrm{T}} T_*$.如果存在矩阵$J, Y(p)$和正定矩阵$P(p) > 0, P(q) > 0$和$Q(p) > 0, \forall p,q \in N$使得:

$$\overline{\Phi} = [\overline{\Phi}_{i,j}]^{6\times 6} < 0, \quad (23)$$

其中

$$\overline{\Phi}_{11} = -J - J^{\mathrm{T}} + P(q), \quad \overline{\Phi}_{13} = A_1(p)J^{\mathrm{T}} + B_1(p)Y(p),$$
$$\overline{\Phi}_{14} = A_2(p)J^{\mathrm{T}} + B_2(p)Y(p), \quad \overline{\Phi}_{15} = G_1(p),$$
$$\overline{\Phi}_{16} = G_2(p), \quad \overline{\Phi}_{22} = -J - J^{\mathrm{T}} + I,$$
$$\overline{\Phi}_{23} = T_*^1[E(p)J^{\mathrm{T}} + F(p)Y(p)],$$
$$\overline{\Phi}_{24} = T_*^2[E(p)J^{\mathrm{T}} + F(p)Y(p)], \quad \overline{\Phi}_{25} = T_*^1 G_3(p),$$
$$\overline{\Phi}_{26} = T_*^2 G_3(p), \quad \overline{\Phi}_{33} = Q(p) - P(p),$$
$$\overline{\Phi}_{35} = -[E(p)J^{\mathrm{T}} + F(p)Y(p)]^{\mathrm{T}} S_1,$$

$\bar{\Phi}_{36} = -[E(p)J^{\mathrm{T}} + F(p)Y(p)]^{\mathrm{T}} S_2$,

$\bar{\Phi}_{44} = -Q(p)$, $\bar{\Phi}_{45} = -[E(p)J^{\mathrm{T}} + F(p)Y(p)]^{\mathrm{T}} S_3$,

$\bar{\Phi}_{46} = -[E(p)J^{\mathrm{T}} + F(p)Y(p)]^{\mathrm{T}} S_4$,

$\bar{\Phi}_{55} = -R_1 + \delta I - \mathrm{sym}\{G_3^{\mathrm{T}}(p)S_1\}$,

$\bar{\Phi}_{56} = -R_2 + \delta I - G_3^{\mathrm{T}}(p)S_2 - S_3^{\mathrm{T}} G_3(p)$,

$\bar{\Phi}_{66} = -R_3 + \delta I - \mathrm{sym}\{G_3^{\mathrm{T}}(p)S_4\}$,

则称系统(16)为渐近稳定和二维(T,S,R)-δ-耗散的.

另外,控制器(15)的增益矩阵被给定为$K(p)=Y(p)J^{\mathrm{T}}$.

证明 定义

$\bar{P}(p) = \mathrm{diag}\{P(p)-Q(p),Q(p)\}$, $J_d = \mathrm{diag}\{J,J\}$,

$\bar{Y}(p) = \mathrm{diag}\{Y(p),Y(p)\}$, $\bar{G}(p) = \mathrm{diag}\{G_1(p),G_2(p)\}$,

$\bar{G}_3(p) = \mathrm{diag}\{G_3(p),G_3(p)\}$, $\bar{E}(p) = \mathrm{diag}\{E(p),E(p)\}$,

$\bar{F}(p) = \mathrm{diag}\{F(p),F(p)\}$,

则不等式(23)可以写为

$$\tilde{\Phi} = [\tilde{\Phi}_{i,j}]^{4\times 4} < 0, \tag{24}$$

其中

$\tilde{\Phi}_{11} = -J - J^{\mathrm{T}} + \dot{P}(q)$, $\tilde{\Phi}_{13} = \bar{A}(p)J^{\mathrm{T}} + \bar{B}(p)\bar{Y}(p)$,

$\tilde{\Phi}_{14} = \bar{G}(p)$, $\tilde{\Phi}_{22} = -J - J^{\mathrm{T}} + I$,

$\tilde{\Phi}_{23} = T_*[\bar{E}(p)J_d^{\mathrm{T}} + \bar{F}(p)\bar{Y}(p)]$,

$\tilde{\Phi}_{24} = T_*\bar{G}_3(p)$, $\tilde{\Phi}_{33} = -\dot{\bar{P}}(p)$,

$\tilde{\Phi}_{34} = -[\bar{E}(p)J_d^{\mathrm{T}} + \bar{F}(p)\bar{Y}(p)]^{\mathrm{T}} S$,

$\tilde{\Phi}_{44} = -R + \delta I - \mathrm{sym}\{\bar{G}_3^{\mathrm{T}}(p)S_1\}$.

不等式(20)说明$J+J^{\mathrm{T}} > P(q) > 0$,$J$和$J_d$均为非奇异矩阵.相反的,不等式(24)说明$J+J^{\mathrm{T}} > P(q) > 0$,则可以确保$J$为非奇异的.定义$J=J^{-1}$,$K(p)=Y(p)J^{\mathrm{T}}$,$\dot{P}(q)=JP(q)J^{\mathrm{T}}$,$\dot{\bar{P}}(p)=J_d\bar{P}(p)J_d^{\mathrm{T}}$,不等式(20)可以通过不等式(24)分别左右乘对角阵$\mathrm{diag}\{J^{-1},J^{-1},J_d^{-1},I\}$和对角阵$\mathrm{diag}\{J^{-T},J^{-T},J_d^{-T},I\}$得到.证毕.

4 实例仿真

本节将通过一个数值实例来验证设计控制器的有效性.所选系统具有两个子系统并且具有如图1所示的切换信号.

实例1 考虑二维切换系统(14)具有两个子系统,且子系统的矩阵参数如下:

1)子系统1

$$A_1(1)=\begin{bmatrix}0.02 & 0.05\\ 0.03 & -0.02\end{bmatrix},\quad A_2(1)=\begin{bmatrix}0.02 & 0\\ 0.01 & 0.04\end{bmatrix},$$

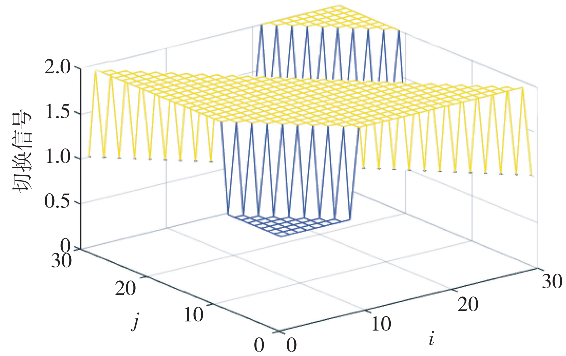

图1 切换信号

Fig. 1 Switching signal

$$B_1(1)=\begin{bmatrix}0.05\\ 0.02\end{bmatrix},\quad B_2(1)=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.05\end{bmatrix},$$

$$G_1(1)=\begin{bmatrix}0.2\\ 0.1\end{bmatrix},\quad G_2(1)=\begin{bmatrix}0.08\\ 0.1\end{bmatrix},$$

$G_3(1)=[0.5]$, $E(1)=[0.06 \quad 0.02]$,

$F(1)=[-0.1]$.

2)子系统2

$$A_1(2)=\begin{bmatrix}0.03 & 0\\ 0.025 & -0.06\end{bmatrix},\quad A_2(2)=\begin{bmatrix}0.015 & 0\\ -0.05 & 0.02\end{bmatrix},$$

$$B_1(2)=\begin{bmatrix}0.03\\ 0.02\end{bmatrix},\quad B_2(2)=\begin{bmatrix}0.06\\ 0.04\end{bmatrix},$$

$$G_1(2)=\begin{bmatrix}0.05\\ -0.01\end{bmatrix},\quad G_2(2)=\begin{bmatrix}0.02\\ -0.06\end{bmatrix},$$

$G_3(2)=[0.8]$, $E(2)=[-0.08 \quad 0.1]$,

$F(2)=[0.5]$.

二维(T,S,R)-δ-耗散性能的参数$\delta=0.2$,且参数矩阵被给定为

$$S=\begin{bmatrix}S_1 & S_2\\ S_3 & S_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.0 & 1.2\\ -2.0 & 1.5\end{bmatrix},$$

$$R=\begin{bmatrix}R_1 & R_2\\ R_3 & R_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.0 & 0.8\\ 0.8 & -1.0\end{bmatrix},$$

$$T_*=[T_*^1 \quad T_*^2]=\begin{bmatrix}1.0 & 0\\ 0 & 1.0\end{bmatrix},$$

$$T=-T_*^{\mathrm{T}}T_*=\begin{bmatrix}-1.0 & 0\\ 0 & -1.0\end{bmatrix}.$$

根据不等式(23)得到控制器的增益矩阵$K(1)$和$K(2)$分别为

$K(1)=[0.059\,5 \quad 0.019\,6]$,

$K(2)=[0.159\,5 \quad -0.199\,4]$.

为了验证所设计控制器的有效性,选择如图1所示的切换信号,其中"1"和"2"分别表示子系统1

和子系统 2.图 2 和图 3 描述了相应闭环系统的状态响应,并清楚地显示出通过耗散状态反馈控制器后系统为稳定的.

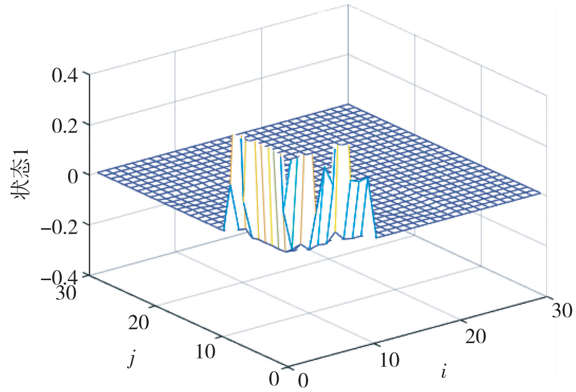

图 2 闭环系统的状态响应 $x_1(i,j)$

Fig. 2 State $x_1(i,j)$ of the closed-loop system

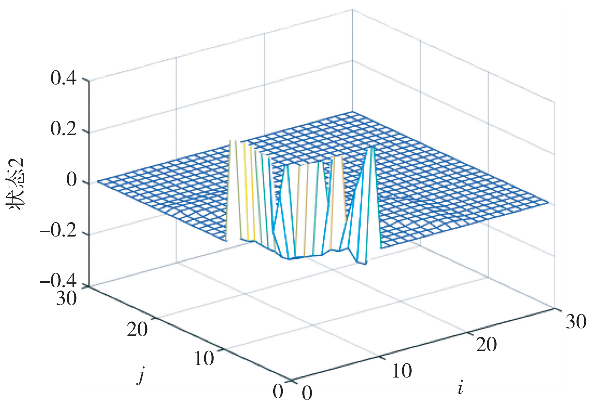

图 3 闭环系统的状态响应 $x_2(i,j)$

Fig. 3 State $x_2(i,j)$ of the closed-loop system

5 主要结论

本文主要研究了二维切换 FM 系统的耗散稳定性以及耗散镇定控制器的设计问题,并给出了二维切换系统渐近稳定和满足 (T,S,R)-δ-耗散性的充分条件.然后通过解决一系列线性矩阵不等式问题来设计耗散镇定控制器.最后给出一个数值实例来验证设计控制器的有效性.

参考文献
References

[1] Du C L,Xie L H.H-infinity control and filtering of two-dimensional systems[J].Lecture Notes in Control & Information Sciences,2002,278:1-4

[2] Dymkov M,Dymkou S.Repetitive and 2-D systems theory approach for modeling in gas networks[C]//Proceedings of 4th International Conference in Problems of Cybernetics and Informatics,2013:1-4

[3] Marszalek W. Two-dimensional state-space discrete models for hyperbolic partial differential equations[J]. Applied Mathematical Modelling,1984,8(1):11-14

[4] Cichy B,Galkowski K,Rogers E,et al.An approach to iterative learning control for spatio-temporal dynamics using n-D discrete linear systems models[J].Multidimensional Systems and Signal Processing,2011,22(1/2/3):83-96

[5] Dabkowski P, Galkowskiy K, Rogers E, et al. Iterative learning control based on relaxed 2-D systems stability criteria[J].IEEE Transactions on Control Systems Technology,2013,21(3):1016-1023

[6] Mitsubori K,Saito T.Dependent switched capacitor chaos generator and its synchronization[J].IEEE Transactions on Circuits and Systems I:Fundamental Theory & Applications,1997,44(12):1122-1128

[7] Tse C K,Bernardo M D.Complex behavior in switching power converters[J].Proceedings of the IEEE,2002,90(5):768-781

[8] Wu L G,Zheng W X.Weighted H^{∞} model reduction for linear switched systems with time-varying delay[J].Automatica,2009,45(1):186-193

[9] Wu L G,Zheng W X,Gao H J.Dissipativity-based sliding mode control of switched stochastic systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(3):785-793

[10] Lo W C,Wang L,Li B W.Thermal transistor:Heat flux switching and modulating[J].Journal of the Physical Society of Japan,2008,77(5):2092-2116

[11] Wu L G,Yang R N,Shi P,et al.Stability analysis and stabilization of 2-D switched systems under arbitrary and restricted switchings[J].Automatica,2015,59:206-215

[12] Shi S, Fei Z Y, Sun W Y, et al. Stabilization of 2-D switched systems with all modes unstable via switching signal regulation[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2017,PP(99):1-8

[13] Fei Z Y,Shi S,Zhao C,et al.Asynchronously control for 2-D switched systems with mode-deoendent average dwell time[J].Automatica,2017,79(3):198-206

[14] Fornasini E, Marchesini G. Doubly indexed dynamical systems:State-space models and structural properties[J]. Mathematical Systems Theory,1978,12(1):59-72

[15] Roesser R P. A discrete state-space model for linear image processing[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,1975,20(1):1-10

[16] Attasi S.Systems lineaires homogene deux indices[R]. Iria Papport Mavoria,1973

[17] Kurek J E.The general state-space model for a two-dimensional linear digital system[J].IEEE Transactions on Automatic Control,1985,30(6):600-602

[18] Willems J. Dissipative dynamical systems. part Ⅰ: General theory[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis,1972,45(5):321-351

[19] Hill D J, Moylan P J. Dissipative dynamical systems: Basic input-output and state properties[J].Journal of the

Franklin Institute,1980,309(5):327-357
[20] Li J, Zhao J, Chen C. Dissipativity and feedback passivation for switched discrete-time nonlinear systems [J].Systems and Control Letters,2016,87:47-55
[21] Wang L N, Chen W M, Li L Z. Dissipative stability analysis and control of two-dimensional Fornasini-Marchesini local state-space model[J].International Journal of Systems Science,2017,48(8):1744-1751
[22] Gahinet P, Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H^∞ control [J]. International Journal of Robust Nonlinear Control,1994,4(4):421-448
[23] Feng Z,Lam J,Gao H.Dissipativity analysis of singular time delay systems [J]. Automatica, 2011, 47 (11): 2548-2552
[24] Ahn C K,Shi P,Basin M V.Two-dimensional dissipative control and filtering for Roesser model[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2015,60(7):1745-1759
[25] Feng Z,Lam J.Stability and dissipativity analysis of distributed delay cellular neural networks[J].IEEE Transactions on Neural Networks,2011,22(6):976-981

Dissipativity stability analysis and stabilization control for 2D switched FM systems

LI Lingling[1] YANG Rongni[1]
1 School of Control Science and Engineering,Shandong University,Jinan 250061

Abstract This paper investigates the dissipative stability analysis and control problem for the two-dimensional (2-D) switched Fornasini-Marchesini local state-space (FMLSS) model.Firstly,the definition of 2-D (T,S,R)-δ-dissipativity is introduced for the 2-D FM systems. Secondly, the sufficient condition to guarantee the asymptotical stability and (T,S,R)-δ-dissipativity of the 2-D switched FM systems is proposed.Then the 2-D (T,S,R)-δ-dissipative state-feedback controller is designed based on the obtained dissipative stability condition and the projection lemma technique.Finally,the effectiveness of the proposed method is illustrated via a numerical example.

Key words 2-D switched system; Fornasini-Marchesini local state-space (FMLSS) model; dissipativity; stabilizaition