



## 顶点 $P_k$ 覆盖问题的研究综述

### 摘要

顶点覆盖问题是经典的 NP 完全问题,在排序、计算机网络等现实生活中有许多的应用.近几年来,许多研究者开始探究它的推广形式——顶点  $P_k$  覆盖 ( $VCP_k$ ) 问题,即寻找一个顶点子集,从拓扑结构图中删除后使得剩下的顶点导出的子图不包含  $P_k$  路,其中  $P_k$  是指包含  $k$  个顶点的路.本文简单介绍了  $VCP_k$  问题的应用背景,归纳了它在近似算法、精确算法、参数化算法 3 个方面的主要研究进展,并分析了一些主要的方法和技巧.在此基础上,对  $VCP_k$  问题及其相关问题的研究前景进行了展望.

### 关键词

顶点  $P_k$  覆盖;近似算法;精确算法;参数化算法

中图分类号 TP391.7

文献标志码 A

收稿日期 2017-07-04

资助项目 国家自然科学基金(11471003, 61425024)

作者简介

王利民,男,博士生,主要研究方向为近似算法和组合优化.wanglimin0721@163.com

### 0 引言

顶点覆盖问题是一个经典的 NP 完全问题,它与团问题、独立集问题等可以互相转换,在排序、计算机网络等现实生活中有许多的应用.近几年来,许多研究者开始探究它的推广形式——顶点  $P_k$  覆盖 ( $VCP_k, k \geq 3$ ) 问题.这个问题是顶点删除问题的一个特殊类型.顶点删除问题就是寻找一个顶点子集,从拓扑图中删除这些顶点后,使得剩下的顶点导出的子图满足一个给定的特征.例如顶点  $P_k$  覆盖问题,即寻找一个顶点子集,从拓扑结构图中删除这个子集后使得拓扑图中剩下的顶点导出的子图不包含  $P_k$  路,其中  $P_k$  是指包含  $k$  个顶点的路.

无线传感器网络是当前信息领域中研究的热点之一,可用于特殊环境的信号采集、处理和发送.无线传感器网络是一种全新的信息获取和处理技术,作为一种无处不在的感知技术,无线传感器网络广泛应用于军事、环境、医疗、家庭和其他商用及工业领域.在空间探索和反恐、救灾等特殊的领域,传感器技术和节点间的无线通信能力为无线传感器网络赋予了广阔的应用前景.

在无线传感器网络越来越广泛的现实生活应用中,人们主要关注的安全特性包括机密性、可靠性和数据的完整性等.由于传感器自身的计算能力、电源储备和处理信息的能力都有限,而且,它们通常部署在易受影响的区域,很容易被攻击者攻击或信息被窃取.传统的安全协议不能直接应用到无线传感器网络中,因此,就安全研究领域来说,如何设计无线传感器网络的安全协议成为一个很大的挑战.

许多学者在这方面进行了大量探究,例如,在传感器网络中,为了确保数据的完整性或数据来源认证,文献[1]就设计了一个安全协议.为了确保数据的完整性,推广的 Canvas 协议<sup>[2]</sup>提出在传感器形成的通信图中,对于每条长度为  $k-1$  的路径中至少要有一个顶点没有被捕获.因此,在传感器网络的部署和初始化期间,应确保至少有一个受保护的顶点存在于每个长度为  $k-1$  的路径中.又由于传感器之间需要传递信息,以及对传感器加以保护是需要费用的,为此在现实应用时还需要考虑传感器节点之间的连通性,以及合理设计安全协议尽量减少费用.更多的实际应用可以参考文献[3].

一般图上的权值最小  $VCP_k$  问题和所含顶点数最少的  $VCP_k$  问题都是 NP 完全问题.本文重点介绍  $VCP_k$  问题的研究成果包括:无向图、

1 南京大学 计算机科学与技术系,南京,210023

有向图和特殊图的  $VCP_k$  问题和参数化  $VCP_k$  问题的相关算法,同时根据已有成果介绍一些可以值得研究的方向.下面给出  $VCP_k$  问题的一些相关定义.

图  $G=(V,E)$  是一个含有  $n$  个顶点的图,  $V$  是  $G$  的顶点集,  $E$  是边集.

**定义 1**(含顶点数最少的  $VCP_k$ , 简记  $MVCP_k$ ) 给定一个含有  $n$  个顶点的图  $G$ , 求一个含顶点数最少的  $VCP_k$ .

**定义 2**(权值最小的  $VCP_k$ , 简记  $MWVCP_k$ ) 给定一个顶点带权的图  $G$ , 求一个权值最小的  $VCP_k$ .

一般图上的  $MVCP_k$  和  $MWVCP_k$  问题的前期研究主要集中在一些性质、近似算法和精确算法,其中也包括顶点连通性,即使得求得的  $VCP_k$  集导出的子图是连通的.近几年,许多学者开始关注  $VCP_k$  问题的参数化,参数化  $VCP_k$  问题的定义如下:

**定义 3**(参数化不带权的  $VCP_k$ , 简记  $PVCP_k$ ) 给定含有  $n$  个顶点的图  $G$  和一个非负整数  $k$ , 能否在图中找到一个含顶点个数不超过  $k$  的  $VCP_k$ .

如果一个参数化 NP 难问题在时间  $f(k)n^{O(1)}$  内可解,其中  $f(k)$  是仅关于  $k$  的一个函数,那么称此问题是固定参数可解的(Fixed-Parameter Tractable, 简记 FPT)<sup>[4]</sup>.

本文第 1 节介绍无向图中  $VCP_k$  问题的研究现状;第 2 节主要描述无向图中  $PVCP_k$  问题的研究现状;第 3 节给出一些特殊图中  $VCP_k$  问题的研究现状;第 4 节介绍有向图中  $VCP_k$  问题的研究现状;最后通过分析和总结,给出  $VCP_k$  问题研究中可以考虑的几个方面.

## 1 无向图中的 $VCP_k$ 问题

本节主要介绍无向图中  $VCP_k$  问题的研究现状,主要包括近似算法、精确算法和  $MVCP_k$  的上下界.

### 1.1 近似算法

由于  $VCP_k$  问题是 NP 完全问题,除非  $P=NP$ , 否则  $VCP_k$  问题不可能有多项式时间算法,因此前期学者对最小  $VCP_k$  问题的研究主要集中在多项式时间可解的近似算法.近似算法主要是在最坏的情况下找到问题的近似解与最优解的比值;即算法的近似度.近似算法主要的衡量指标之一就是近似度.下面主要分析  $MVCP_k$  和  $MWVCP_k$  问题的近似算法.对于  $MWVCP_k$  问题,算法的近似度为近似解与最优解的权值的比值,对于  $MVCP_k$  问题,近似度为近似解与最优解所含顶点数目的比值.

文献[5]利用以某概率选择顶点的方法得到  $MVCP_3$  问题的一个近似比期望为  $\frac{23}{11}$  的随机算法. Tu 等<sup>[6-7]</sup>利用原始对偶算法或分层技巧分别给出权值最小的  $VCP_3$  问题的一个 2 因子近似解.文献[6]通过在原图上添加悬挂边的方法,将权值最小的顶点覆盖问题归约到权值最小的  $VCP_3$  问题,证明  $VCP_3$  问题是 NP 难解的.

文献[8]首先利用逐步删除  $P_k$  的贪婪算法和添加顶点的方法给出了最小的连通  $VCP_k$  问题的一个  $k^2$  近似解,进而结合平面的划分和转移策略给出这个问题在单位圆盘图上的一个多项式时间近似格式的算法.这个算法的整体设计思路如下:首先,定义一个正方形区域使得这个区域包含图中的所有单位圆盘,再将这个区域划分成一些小的正方形.对每一个小正方形,定义它的中心区域和边界区域.其次,对于单位圆盘图,采用一个常因子的近似算法求得图的一个连通的  $VCP_k$  集,使得这个近似解中每个顶点的权值至多是  $c$ ,这里  $c$  是一个正的常数.然后,对于每个正方形的中心区域,枚举所有的  $VCP_k$  集,仅仅考虑满足邻域条件的解,进而选择顶点权和最小的一个解,将此解记作局部最优解.通过对边界区域的选择,可以确保算法的输出结果是一个连通的  $VCP_k$  集.最后将常因子近似解落在某个划分的边界区域的顶点集合与局部最优解合并.一般地,将正方形区域的左下角沿着  $45^\circ$  角移位,每次移动  $\sqrt{2}$  个单位就得到一个新的划分.其中采用转移策略是为了选取一个划分使得常因子近似解落在这个划分的边界区域的顶点集合的权和或顶点个数尽可能小,从而使得输出结果与最优解的比更小.而划分策略或分治法主要是将一个难以直接解决的大问题,分割成一些规模较小的相同问题,各个击破,分而治之,然后再利用这些子问题的解求出原问题的解.简言之,缩小问题规模,使子问题易求解.在假设图的围长至少是  $k$  的条件下, Li 等<sup>[9]</sup>利用深度优先搜索法及逐步加点判断的方法提高了最小的连通  $VCP_k$  问题在一般图上的近似比,即给出一个  $k$  近似解,其算法时间复杂度为  $O(n^2)$ .

文献[10]提出最小连通有界  $VCP_k$  的概念,并在假设图的度有界的条件下,利用增长划分的方法得到连通的  $VCP_k$  问题在 growth-bounded 图上的一个多项式时间近似格式的算法,但是此时不需要利用常因子近似解.文献[10]的主要思想是将图划分

成一些聚类,然后对每一个聚类求局部解,进而合并这些解得到最后结果.

在假设图的最小度为 2 的情况下,Wang 等<sup>[11]</sup>首先利用原始对偶算法和有关顶点加权的斯坦纳树的一个近似算法得到权值最小的连通  $VCP_3$  问题的一个常因子近似解;其次利用文献[12]给出的最小连通顶点覆盖问题在单位圆盘图上的多项式时间近似格式算法的思想,结合一个类似  $c$ -局部问题<sup>[13]</sup>的概念( $c$  是一个正的常数),再利用平面上的划分和转移策略,给出权值最小的连通  $VCP_3$  问题在单位圆盘图上的一个多项式时间近似格式的算法.

在现实世界中,为了观察某些复杂的环境,例如高山上或水里<sup>[14]</sup>,一些传感器就被放在不同的深度,这就形成了三维空间的网络,它可以模拟的数学模型是单位球图.根据平面上研究的一些结论和受到的启发,Wang 等<sup>[15]</sup>提出一个弱  $c$ -局部问题的概念( $c$  是一个正的常数),并在顶点权值的光滑性条件下,利用高维空间的划分和转移技巧,给出权和最小的连通  $VCP_3$  问题在单位球图上的一个多项式时间近似格式的算法.当球的半径不同时,上面的方法将不起作用.然而文献[16]在球的最大半径与最小半径的比值有界的条件下,利用局部搜索的方法给出最小的  $VCP_k$  问题在球图上的一个多项式时间近似格式的算法.

注意到在处理连通的  $VCP_k$  问题时,主要包含常因子的近似解、多项式时间近似格式的算法和特殊拓扑结构图上的时间复杂度等 3 个方面.

对于求解常因子的近似解,一般地,先通过一些算法或技巧找到一个不连通的近似解,再结合求解斯坦纳树的算法或逐步添加顶点并判断的方法,进而得到连通的常因子近似解.或者,先利用深度优先搜索法或其他搜索法得到拓扑结构的支撑树,再对树的每一分支判断是否需要继续添加顶点,从而得到所求的结果.因此,以后在求解连通的常因子近似解时就可以参考这 2 种方法.而设计多项式时间近似格式的算法,主要采取划分策略和转移策略,以及增长划分策略 2 种方式,当图中顶点的位置信息已知时大部分采取划分和转移策略,这是处理这类问题常用的技巧和方法.然而在更一般的图上,如 growth-bounded 图上,不需要利用常因子近似解,只知道图的部分信息,此时多采取增长划分.不管是那种划分策略,为了达到连通都需要使划分的小区域有重叠的部分,算法最关键的地方就是处理重叠

部分.

## 1.2 精确算法

近似算法只能得到问题的近似解而无法得到精确解,甚至许多问题很难求得近似解.于是许多学者开展了对  $VCP_k$  精确算法的研究.显然,通过枚举图中  $n$  个顶点的  $2^n$  个子集就可以找到最小的  $VCP_k$ .

对于  $VCP_3$  问题,文献[5]利用分支定界法逐步减少图的顶点个数,从而求得  $MVCP_3$ ,其算法时间复杂度为  $O(1.517 1^n)$ ,其中  $n$  是图  $G$  的顶点个数.Chang 等<sup>[17]</sup>利用加权分治技术提出一个分支化简的算法,算法提高了上面的时间复杂度,其复杂度为  $O(1.465 8^n)$ .文献[18]根据给出的一些有关分散集和  $VCP_3$  结构特征,利用更多的化简规则和分支规则,提出了时间复杂度为  $O(1.465 6^n)$  的精确算法,此时需要多项式空间;进一步利用动态规划技术改进算法,其时间复杂度为  $O(1.365 9^n)$ ,但是需要指数空间.

## 1.3 $MVCP_k$ 的上下界

在一般图上,Bresar 等<sup>[19]</sup>通过将顶点覆盖问题归约到  $VCP_k$  问题,证明  $VCP_k(k \geq 2)$  问题是 NP 完全的.令  $\psi_k(G)$  表示图  $G$  的最小  $VCP_k$  集的顶点数,则对于任意图证明  $\psi_3(G) \leq \frac{(2n+m)}{6}$ ,其中  $n$  是图的顶点个数, $m$  是图的边数;对于不含孤立点的图,证明  $\psi_k(G) \leq n - \frac{k-1}{k} \sum_{u \in V} \frac{2}{1+d(u)}$ ,其中  $d(u)$  表示顶点的度.更多有关  $\psi_k(G)$  的研究结果可以参考文献[20-22],其中文献[22]除了给出  $\psi_k(G)$  的一些上界,还说明了图的  $VCP_k$  问题和  $P_k$  划分问题之间的关系,并给出某些特殊图(不含禁忌子图)上  $VCP_k$  问题 NP 复杂性的充分条件.文献[23]给出  $\psi_k(G)$  的一个下界,即  $\psi_k(G) \geq \frac{kn}{k+2} + \frac{m}{(k+1)(k+2)}$ .

## 2 无向图中的 $PVCP_k$ 问题

在实际应用中,图的结构是比较复杂的且图的顶点数  $n$  往往比较大, $VCP_k$  问题的所有精确算法都无法应用于实际.但是在很多实际应用中, $VCP_k$  的大小  $k$  比  $n$  小很多,而且有些应用不一定要找最小的  $VCP_k$ ,而只要求小于某个值的  $VCP_k$ ,于是许多研究者考虑研究  $VCP_k$  问题的参数化.下面开始介绍无

向图参数化  $VCP_k$  问题的研究现状.

文献[4]采用迭代压缩技术证明一般图上的  $PVCP_3$ 问题是固定参数可解的,即对于固定的参数  $k$ ,这个问题可以在时间  $O(2^k k^{3.376} + n^4 m)$ 内得到它的解,其中  $n$  是图的顶点个数,  $m$  是图的边数,  $VCP_3$ 问题解的顶点个数至多是  $k$ .文献[24]利用化简规则和分支搜索技术给出  $PVCP_3$ 问题的一个 FPT 算法,其时间复杂度为  $O(1.817 2^k n^{O(1)})$ .Chang 等[25]也利用化简规则和分支搜索技术在多项式空间和指数空间中分别说明  $PVCP_3$ 问题是固定参数可解的,算法所执行完成的时间至多分别为  $O^*(1.796 4^k)$ ,  $O^*(1.748 5^k)$ ,这里  $O^*$  的含义为:对于 2 个函数  $f$  和  $g$ ,如果  $f(k, n) = O(g(k) \cdot poly(n))$ ,那么  $f(k, n) = O^*(g(k))$ ,其中  $poly(n)$  是  $n$  的多项式函数.对于  $VCP_4$ 问题, Tu 等[26]也利用迭代压缩技术证明一般图上的  $PVCP_4$ 问题是固定参数可解的,时间复杂度为  $O(3^k n^4)$ .

$VCP_k$  问题核心化是参数化  $VCP_k$  问题的重要研究内容.如果在求解  $VCP_k$  问题之前,利用核心化算法对问题规模进行简化,将大大提高求解  $PVCP_k$  的效率.对于  $VCP_3$ 问题,文献[27]得到一个大小为  $15k$  的核,文献[28]利用 2 次简化规则提高这个核到  $6k-6$ , Brause 等[29]利用皇冠分解给出一个计算核的多项式时间的算法,通过算法得到图的 2 个不交的集合  $T_1, T_2$ , 满足  $|T_2| \leq 6 \cdot \psi_3(G[T_2])$ ,其中  $T_2$  为图  $G$  的核,可以看出此处核的上界为  $6k$ .最近,通过改进化简规则,文献[30]将该问题的核大小提高到  $5k$ .

### 3 特殊图中的 $VCP_k$ 问题

对于特殊图上的  $VCP_k$  问题,许多学者也进行了大量的研究.某些特殊的应用对应一些在具有特殊性质的图上的  $VCP_k$  问题,而特殊图上的  $VCP_k$  问题比一般图上的  $VCP_k$  问题更容易,使得在特定条件下解决  $VCP_k$  问题显得更有意义.本节简要阐述各类特殊图中  $VCP_k$  问题的研究现状.

#### 1) 三正则图上的 $VCP_k$ 问题

三正则图是指图中所有顶点的度均为 3 的图,也称为立方图.在三正则图中,文献[31]给出了一些有关  $VCP_3$ 问题的结论:首先,利用归约证明在围长为 3 的三正则平面图中,最小  $VCP_3$ 问题的判定问题是 NP 完全的;其次,令  $\psi_3(G)$  表示图  $G$  的最小  $VCP_3$ 集的顶点数,得出  $\frac{2n}{5} \leq \psi_3(G) \leq \frac{n}{2}$ ;最后,利用逐步

删除顶点度为 3 的顶点的贪婪算法,给出最小  $VCP_3$ 问题的一个近似度为 1.57 的近似算法.在三正则图中,文献[32]给出了一些有关  $VCP_4$ 问题的结论:首先,利用归约证明最小  $VCP_4$ 问题的判定问题是 NP 完全的;其次,令  $\psi_4(G)$  表示图  $G$  的最小  $VCP_4$ 集的顶点数,得出  $\frac{n}{4} \leq \psi_4(G) \leq \frac{n}{2}$ ;最后,利用 Lovasz 分解,给出最小  $VCP_4$ 问题的一个近似度为 2 的近似算法.

#### 2) 完全图、路、圈、树上的 $VCP_k$ 问题

文献[33]从时间复杂度的角度考虑,在完全图、路和圈上分别可以在  $O(n \cdot k)$ 、 $O(n \cdot k)$  和  $O(n \cdot k^2)$  时间内求出权值最小的  $VCP_k$  问题的最优解,而在树上的时间和空间复杂度均为  $O(n \cdot k)$ .文献[9]采取逐步判断树的分支是否含有  $P_k$  的方法,得到在树上可以在  $O(n^2)$  时间内求出最小连通的  $VCP_k$  问题的最优解.文献[34]通过寻找最长路以及逐步加点判断的方法可以在  $O(n)$  时间内找到权和最小的连通  $VCP_k$  问题的最优解;进一步得到在包含唯一圈(圈的长度为  $r$ )的图上可以在  $O(nr)$  时间内找到这个问题的最优解.

#### 3) 树宽有界的图的 $VCP_k$ 问题

在树宽有界的图中,文献[35]设计了一个动态规划算法可以求得  $MVCP_3$ ,其时间复杂度为  $4^p \cdot n^{O(1)}$ ,其中树宽至多是  $p$ .文献[36]不仅提高了求  $MVCP_3$ 问题的时间复杂度  $3^p \cdot n^{O(1)}$ ,而且针对连通的  $VCP_3$ 问题给出一个时间复杂度为  $4^p \cdot n^{O(1)}$  的随机算法.

### 4 有向图中的 $VCP_k$ 问题

众多研究者探究  $VCP_k$  的相关问题主要集中在无向的拓扑结构图上,对有向图的  $VCP_k$  问题的研究进展较为缓慢,主要是考虑方向后难度会更大.然而,近年来,文献[3,37]分别从现实的生活环境和需求出发介绍了  $VCP_k$  问题在有向图环境中的一些应用实例(图 1).例如:人们在远足旅行时会通过一些网站查询一下路线图,网站会发送几条建议远足路线,路线中的每个节点都标记的话会浪费很多带宽,因此,可以考虑只发送几个关键的节点信息,删除重叠的部分,使得路线图显得更清晰,便于出行者选择合适的路线.如图 1,有 2 条出行路线红色  $s' \rightarrow t$  和绿色  $s \rightarrow t$  可供选择,只需选用灰圆圈标记的节点即可覆盖整个图( $k=6$  时的情形).在超大规模的图中,文

献[3,37]均利用剪枝方法可以得到求极小的  $VCP_k$  集的算法,并通过实验验证了其算法的有效性.

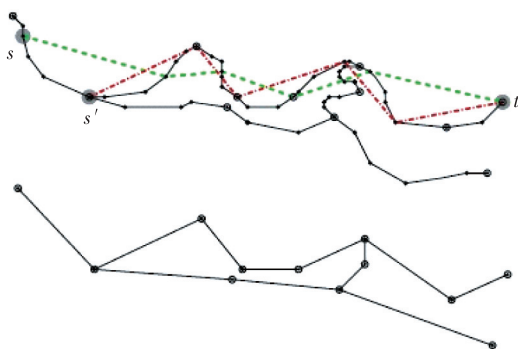


图1 简化的远足旅行路线  
Fig. 1 A simplified hiking map

## 5 总结与展望

顶点覆盖问题是一类重要的 NP 完全问题,在排序、计算机网络等现实生活中有许多的应用.近几年来,人们开始关注它的推广形式—— $VCP_k (k \geq 3)$  问题.本文着重阐述无向图中  $VCP_k$  问题的研究现状.从中可以看出,前期较多的研究关注点是  $VCP_k$  问题的性质和近似算法,而随着参数计算理论的产生,推动了  $VCP_k$  问题的发展,使之成为目前阶段的研究热点.

通过对  $VCP_k$  问题研究现状的总结和分析,可以使学者对  $VCP_k$  问题有更全面的理解.当然对于  $VCP_k$  问题,依然还有许多方面有待于我们进一步探究,主要可以从以下几个角度进行研究.

### 1) $VCP_k$ 问题的算法研究

在一般图上对于权和最小的连通  $VCP_k$  问题尚未有常因子近似解,是否可以根据已有结果及问题的自身特征寻求新颖的算法去求解,进而给出相应问题的一个多项式时间近似格式算法呢? 处理这个问题的难点是如何使其连通.

对于权和最小的连通  $VCP_3$  问题,所求的近似解是在最小度为 2 的情况下得到的,那么是否可以通过寻求新算法将图的最小度降为 1? 求解这个问题的多项式时间近似格式的算法时,有假设条件  $c$ -局部或弱  $c$ -局部以及顶点权值是光滑性的等,考虑到现实环境,不太实用,能否采用其他的方法将  $c$ -局部等条件去掉?

### 2) $VCP_k$ 问题的核心化

许多学者对无向图上  $VCP_k$  问题的核心化研究

已取得了一些结果,通过一系列局部简化规则和对图结构的分析,对核大小不断进行改进.希望能够通过深入分析已有结论和  $VCP_k$  问题的结构,构造出更多的简化规则,从而提出更好的核心化算法.

### 3) $VCP_k$ 问题的变形

近年来,一部分研究者探究  $VCP_k$  问题的一个变体—— $k$  连通子图覆盖问题,即寻找一个顶点子集,从图中删除后使得图中剩下的顶点导出的子图不包含  $k$  个顶点导出的连通子图.可以看出这个问题比  $VCP_k$  问题更具有一般性.在这方面的主要结论有:在假设图是连通的条件下,文献[9]利用深度优先搜索法、生成树及逐步加点判断的方法给出顶点连通的  $k$  连通子图覆盖问题的一个  $k$  近似算法.利用线性规划舍入方法很容易得到权和最小的  $k$  连通子图覆盖问题的一个  $k$  近似解.然而在假设图的围长至少是  $k$  的情况下,文献[38]提高了这个问题的近似比,首先利用图的拓扑结构,并结合顶点的度权函数给出一个近似比,其次,利用类似分层的方法又得到一个近似比,两者均为  $k-1$ .除了这 2 种情况有以上结果外,顶点不连通、不加重和顶点连通以及加权等情况尚未有人探讨,而且就现阶段的研究现状来看,对于有关  $k$  连通子图覆盖问题的多项式时间近似格式算法还没有研究者去探索,这可能也是一个比较好的研究方向.

### 4) $VCP_k$ 问题的随机算法

随机化是现代计算机科学最重要的方法之一,近几十年来被广泛地应用于计算机科学的各个领域.在这些应用的背后,是一些共通的随机化原理.我们是否可以利用一些重要的随机算法的设计思想和理论分析,借助一些概率论工具及其在算法分析中的应用,从新的角度探索  $VCP_k$  问题或  $k$  连通子图覆盖问题呢?

### 5) 特殊图上的 $VCP_k$ 问题

根据一些特定的应用,对于特殊图上  $VCP_k$  问题的研究也很有意义.本文列举了一些特殊图上的  $VCP_k$  问题,可以对这些问题的算法做进一步的研究,提出更有效的算法,或者对由实际应用而转化的特殊  $VCP_k$  问题进行研究.

## 参考文献

### References

- [1] Menezes A J, Van Oorschot P C, Vanstone S A. Handbook of applied cryptography [M]. Boca Raton: CRC Press, 1996

- [ 2 ] Novotny M. Design and analysis of a generalized canvas protocol [ C ] // IFIP International Workshop on Information Security Theory and Practices, 2010:106-121
- [ 3 ] Funke S, Nusser A, Storandt S. On  $k$ -path covers and their applications [ J ]. The VLDB Journal, 2014, 25 ( 1 ) : 103-123
- [ 4 ] Tu J H. A fixed-parameter algorithm for the vertex cover  $P_3$  problem [ J ]. Information Processing Letters, 2015, 115 ( 2 ) : 96-99
- [ 5 ] Kardos F, Katrenic J, Schiermeyer I. On computing the minimum 3-path vertex cover and dissociation number of graphs [ J ]. Theoretical Computer Science, 2011, 412 ( 50 ) : 7009-7017
- [ 6 ] Tu J H, Zhou W L. A primal-dual approximation algorithm for the vertex cover  $P_3$  problem [ J ]. Theoretical Computer Science, 2011, 412 ( 50 ) : 7044-7048
- [ 7 ] Tu J H, Zhou W L. A factor 2 approximation algorithm for the vertex cover  $P_3$  problem [ J ]. Information Processing Letters, 2011, 111 ( 14 ) : 683-686
- [ 8 ] Liu X L, Lu H L, Wang W, et al. PTAS for the minimum  $k$ -path connected vertex cover problem in unit disk graphs [ J ]. Journal of Global Optimization, 2013, 56 ( 2 ) : 449-458
- [ 9 ] Li X S, Zhang Z, Huang X H. Approximation algorithm for the minimum connected  $k$ -path vertex cover problem [ C ] // International Conference on Combinatorial Optimization and Applications, 2014:764-771
- [ 10 ] Chu Y, Fan J X, Liu W J, et al. PTAS for minimum  $k$ -path connected vertex cover in growth-bounded graphs [ C ] // International Conference on Algorithms and Architectures for Parallel Processing, 2014:114-126
- [ 11 ] Wang L M, Zhang X Y, Zhang Z, et al. A PTAS for the minimum weight connected vertex cover  $P_3$  problem on unit disk graphs [ J ]. Theoretical Computer Science, 2015, 571 : 58-66
- [ 12 ] Zhang Z, Gao X F, Wu W L. PTAS for connected vertex cover in unit disk graphs [ J ]. Theoretical Computer Science, 2009, 410 ( 52 ) : 5398-5402
- [ 13 ] Jiang T, Wang L S. An approximation scheme for some steiner tree problems in the plane [ J ]. Networks, 1996, 28 ( 4 ) : 187-193
- [ 14 ] Akyildiz I F, Pompili D, Melodia T. Underwater acoustic sensor networks: Research challenges [ J ]. Ad Hoc Network, 2005, 3 ( 3 ) : 257-279
- [ 15 ] Wang L M, Du W X, Zhang Z, et al. A PTAS for minimum weighted connected vertex cover  $P_3$  problem in 3-dimensional wireless sensor networks [ J ]. Journal of Combinatorial Optimization, 2017, 33 ( 1 ) : 106-122
- [ 16 ] Zhang Z, Li X T, Shi Y S, et al. PTAS for minimum  $k$ -path vertex cover in ball graph [ J ]. Information Processing Letters, 2017, 119:9-13
- [ 17 ] Chang M S, Chen L H, Hung L J, et al. An  $O^*(1.4658^n)$ -time exact algorithm for the maximum bounded-degree-1 set problem [ C ] // Proceedings of the 31st Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory, 2014:9-18
- [ 18 ] Xiao M Y, Kou S W. Exact algorithms for the maximum dissociation set and minimum 3-path vertex cover problems [ J ]. Theoretical Computer Science, 2017, 657 ( A ) : 86-97
- [ 19 ] Bresar B, Kardos F, Katrenic J, et al. Minimum  $k$ -path vertex cover [ J ]. Discrete Applied Mathematics, 2011, 159 ( 12 ) : 1189-1195
- [ 20 ] Jakovac M. The  $k$ -path vertex cover of rooted product graphs [ J ]. Discrete Applied Mathematics, 2015, 187 ( C ) : 111-119
- [ 21 ] Zuo L C, Zhang B T, Zhang S Q. The  $k$ -path vertex cover in product graphs of stars and complete graphs [ J ]. International Journal of Applied Mathematics, 2016, 46: 97-103
- [ 22 ] Brause C, Krivos-Bellus R. On a relation between  $k$ -path partition and  $k$ -path vertex cover [ J ]. Discrete Applied Mathematics, 2017, 223:28-38
- [ 23 ] Bhavani P D, Kumar K V, Satyanarayana S. An investigation on some theorems on  $k$ -Path vertex cover [ J ]. Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 2016, 12 ( 2 ) : 1403-1412
- [ 24 ] Katrenic J. A faster FPT algorithm for 3-path vertex cover [ J ]. Information Processing Letters, 2016, 116 ( 4 ) : 273-278
- [ 25 ] Chang M S, Chen L H, Hung L J, et al. Fixed-parameter algorithms for vertex cover  $P_3$  [ J ]. Discrete Optimization, 2016, 19:12-22
- [ 26 ] Tu J H, Jin Z M. An FPT algorithm for the vertex cover  $P_4$  problem [ J ]. Discrete Applied Mathematics, 2016, 200 ( C ) : 186-190
- [ 27 ] Fellows M R, Guo J, Moser H, et al. A generalization of Nemhauser and Trotter's local optimization theorem [ J ]. Journal of Computer and System Sciences, 2011, 77 ( 6 ) : 1141-1158
- [ 28 ] Chen J E, Fernau H, Shaw P, et al. Kernels for packing and covering problems [ C ] // Frontiers in Algorithmics and Algorithmic Aspects in Information and Management, 2012:199-211
- [ 29 ] Brause C, Schiermeyer I. Kernelization of the 3-path vertex cover problem [ J ]. Discrete Mathematics, 2016, 339:1935-1939
- [ 30 ] Xiao M Y, Kou S W. Kernelization and parameterized algorithms for 3-path vertex cover [ C ] // International Conference on Theory and Applications of Models of Computation, 2017:654-668
- [ 31 ] Tu J H, Yang F M. The vertex cover  $P_3$  problem in cubic

- graphs [J]. Information Processing Letters, 2013, 113 (13):481-485
- [32] Li Y C, Tu J H. A 2-approximation algorithm for the vertex cover  $P_4$  problem in cubic graphs[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2014, 91 (10): 2103-2108
- [33] Bresar B, Krivos-Bellus R, Semanisin G, et al. On the weighted  $k$ -path vertex cover problem [J]. Discrete Applied Mathematics, 2014, 177: 14-18
- [34] Li X S, Zhang Z, Huang X H. Approximation algorithms for minimum (weight) connected  $k$ -path vertex cover [J]. Discrete Applied Mathematics, 2016, 205: 101-108
- [35] Tu J H, Wu L D, Yuan J, et al. On the vertex cover  $P_3$  problem parameterized by treewidth [J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2016, 31(1): 1-12
- [36] Bai Z W, Tu J H, Shi Y T. An improved algorithm for the vertex cover  $P_3$  problem on graphs of bounded treewidth [J]. arXiv e-print, 2016, arXiv: 1603. 09448
- [37] Bhavan P D, Krishna G V, Thota N. Minimum  $k$ -path vertex using pruning algorithm [J]. International Journal of Scientific Engineering and Technology Research, 2014, 3(46): 9419-9422
- [38] Zhang Y P, Shi Y S, Zhang Z. Approximation algorithm for the minimum weight connected  $k$ -subgraph cover problem [J]. Theoretical Computer Science, 2014, 535: 54-58

## A survey on vertex cover $P_k$ problem

WANG Limin<sup>1</sup> HUA Jingyu<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department of Computer Science and Technology, Nanjing University, Nanjing 210023

**Abstract** Vertex cover problem is a classical NP complete problem, which has many applications in areas of sorting, computer network, etc. In recent years, many researchers begin to explore its generalized form, namely vertex cover  $P_k$  problem, which requires to find a subset of vertices such that the induced subgraphs by the rest vertices of the topological structure do not include any  $P_k$  path, where  $P_k$  is the path on  $k$  vertices. This paper firstly introduces the application background of vertex cover  $P_k$  problem, then summarizes current researches in approximation algorithms, exact algorithms and parameter algorithms, and analyzes some commonly used methods and techniques. On this basis, we point out the direction for further research on the vertex cover  $P_k$  problem and its related issues.

**Key words** vertex cover  $P_k$ ; approximation algorithms; exact algorithms; parameter algorithms