DOI:10.13878/j.cnki.jnuist.2017.04.010

夏卫锋[1]　徐胜元[1]

基于积分不等式的时滞 Markovian 跳变系统的稳定性分析和镇定

摘要

文章研究了时滞 Markovian 跳变系统的稳定性和镇定问题.首先,运用一个新的积分不等式,得到了保守性更小的稳定性判据;其次,基于此判据,获得了一个状态反馈控制器存在的充分条件,使得闭环系统具有随机稳定性并满足扩展耗散性;最后,两个实际例子说明了设计方法的可行性和有效性.

关键词

Markovian 跳变系统;稳定性;镇定;扩展耗散性

中图分类号 TP13

文献标志码 A

收稿日期 2017-04-07

资助项目 国家自然科学基金(61374087,61673215,61673169)

作者简介

夏卫锋,男,博士,副教授,研究方向为鲁棒控制和滤波设计.xwf212@163.com

徐胜元(通信作者),男,博士,教授,博士生导师,国家杰出青年基金获得者,长江学者特聘教授,研究方向为鲁棒控制和滤波设计.syxu@njust.edu.cn

1 南京理工大学 自动化学院,南京,210094

0 引言

近年来,对 Markovian 跳变系统的研究得到了越来越多的学者的关注,这是由于 Markovian 跳变系统能够很好地描述系统结构或参数突变的现象.目前,Markovian 跳变系统已被用来描述大量的实际系统,如金融系统、化学过程、电力系统以及飞行器控制系统.同时,由于时滞现象广泛存在于实际系统中,并且往往造成系统的不稳定和性能降低,因此,对时滞 Markovian 跳变系统的研究也吸引着广大学者的兴趣.文献[1]通过引入松弛矩阵变量得到了时滞 Markovian 跳变系统的时滞相依稳定性判据和 H_∞ 控制条件;文献[2]运用时滞分割技术,研究了时滞 Markovian 跳变系统的镇定问题,同时得到了比文献[1]保守性更小的稳定性判据;文献[3-4]通过构造不同的 Lyapunov-Krasovskii 函数,从而进一步降低了时滞 Markovian 跳变系统的稳定性判据的保守性.由于在解决时滞 Markovian 跳变系统时,往往需要处理含有导数的积分项,上述文献主要采用了 Jensen 不等式或引入松弛矩阵变量的方法.因此,采用新的技术或比 Jensen 不等式更精确的估计不等式来得到保守性更低的稳定性条件一直是研究者努力的方向.本文将利用文献[5]中的一个积分不等式,研究时滞 Markovian 跳变系统的稳定性判据,并得到一个具有扩展耗散性的镇定条件.

1 问题的描述

本文考虑一类具有时滞的线性 Markovian 跳变系统:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=&\boldsymbol{A}(r(t))\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_d(r(t))\boldsymbol{x}(t-h)+\\&\boldsymbol{B}(r(t))\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{D}(r(t))\boldsymbol{\omega}(t),\end{aligned}\tag{1}$$

$$\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{L}(r(t))\boldsymbol{x}(t),\tag{2}$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t),\quad t\in[-h,0],\tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 是状态向量,$\boldsymbol{z}(t)\in\mathbf{R}^p$ 是控制输出,$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^q$ 是控制输入,$\boldsymbol{\omega}(t)\in\mathbf{R}^l$ 是外部扰动且满足 $\boldsymbol{\omega}(t)\in L_2(0,\infty)$,$d>0$ 是常数时滞,$\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是初始条件,$r(t)$ 表示取值于集合 $S=\{1,2,\cdots,s\}$ 的一个右连续 Markovian 链,其生成元矩阵 $\boldsymbol{\Pi}=(\pi_{ij})_{s\times s}$ 为

$$P_r\{r(t+h)=j|r(t)=i\}=\begin{cases}\pi_{ij}h+o(h), & i\neq j,\\1+\pi_{ii}h+o(h), & i=j,\end{cases}$$

式中 h 为时间增量且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{o(h)}{h}=0$.当 $i\neq j$ 时,$\pi_{ij}\geqslant 0$ 是从模态 i 到模态 j 的转移速率,其中 $\pi_{ii}=-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{s}\pi_{ij}$.

为简化符号,当 $r(t)=i\in S$ 时,记

$\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{A}(r(t))$,$\boldsymbol{A}_{di}=\boldsymbol{A}_d(r(t))$,$\boldsymbol{B}_i=\boldsymbol{B}(r(t))$,

$\boldsymbol{D}_i=\boldsymbol{D}(r(t))$,$\boldsymbol{L}_i=\boldsymbol{L}(r(t))$.

本文主要考虑系统(1)—(2)的具有如下形式的状态反馈镇定问题:

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{x}(t), \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{K}_i$ 是状态反馈增益矩阵.由(1)和(4)可得闭环系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_{di}\boldsymbol{x}(t-h)+\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{\omega}(t). \tag{5}$$

为了得到本文的主要结果,引入如下定义和引理:

定义 1[1] 当 $\boldsymbol{u}(t)=0$ 时,对任意有限 $\boldsymbol{\varphi}(t)\in\mathbf{R}^n$ 和 $r_0\in S$,如果

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon\left\{\int_0^t\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t\mid\boldsymbol{\varphi},r_0\right\}<\infty,$$

则称 Markovian 跳变系统(1)是随机稳定的.

定义 2[6-7] 当 $\boldsymbol{u}(t)=0$ 时,对给定对称矩阵 $\boldsymbol{\Psi}_0\geqslant 0,\boldsymbol{\Psi}_1\leqslant 0,\boldsymbol{\Psi}_3>0$ 和任意矩阵 $\boldsymbol{\Psi}_2$,满足 $(\|\boldsymbol{\Psi}_1\|+\|\boldsymbol{\Psi}_2\|)\|\boldsymbol{\Psi}_0\|=0$,如果对任意 $t_f\geqslant 0$ 和 $\boldsymbol{\omega}(t)\in L_2(0,\infty)$ 有

$$\varepsilon\left\{\int_0^{t_f}\boldsymbol{J}(t)\mathrm{d}t\right\}-\sup_{0\leqslant t\leqslant t_f}\varepsilon\{z(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}_0 z(t)\}\geqslant 0, \tag{6}$$

式中

$$\boldsymbol{J}(t)=z(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}_1 z(t)+2z(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}_2\boldsymbol{\omega}(t)+\boldsymbol{\omega}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}_3\boldsymbol{\omega}(t),$$

则称系统(1)—(2)是扩展耗散的.

注 1 周知,常见的控制系统性能指标主要有 H_∞ 性能、无源性(passivity)、L_2-L_∞ 性能和耗散性(dissipativity)等.其中耗散性包含了 H_∞ 性能和无源性,但是无法包含 L_2-L_∞ 性能.文献[6]首次提出了扩展耗散性(extended dissipativity)的概念,使得耗散性和 L_2-L_∞ 性能成为了它的一种特殊情况.这样就可以在一个统一的框架下研究耗散性和 L_2-L_∞ 性能,从而提高了研究效率.

注 2 由于 $\boldsymbol{\Psi}_0\geqslant 0,\boldsymbol{\Psi}_1\leqslant 0$,因此总存在 $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_0\geqslant 0$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_1\geqslant 0$,使得 $\boldsymbol{\Psi}_0=\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_0^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_0,\boldsymbol{\Psi}_1=-\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_1^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_1$.

引理 1[5] 设 $x:[a,b]\to\mathbf{R}$ 是可导函数,对于矩阵 $\boldsymbol{Z}\in\mathbf{R}^{n\times n}>0$ 和 $\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2,\boldsymbol{N}_3\in\mathbf{R}^{4n\times n}$,有下式成立

$$-\int_a^b\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\leqslant\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\theta},$$

其中

$$\boldsymbol{X}=(b-a)\left(\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}}+\frac{1}{3}\boldsymbol{N}_2\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}}+\frac{1}{5}\boldsymbol{N}_3\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{N}_3^{\mathrm{T}}\right)+\mathrm{sym}\{\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{\Pi}_1+\boldsymbol{N}_2\boldsymbol{\Pi}_2+\boldsymbol{N}_3\boldsymbol{\Pi}_3\},$$

$$\boldsymbol{\Pi}_1=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2,\quad\boldsymbol{\Pi}_2=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3,\quad\boldsymbol{\Pi}_3=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2-6\boldsymbol{e}_3+6\boldsymbol{e}_4,$$

$$\boldsymbol{\theta}=\left[\boldsymbol{x}(b)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}(a)^{\mathrm{T}},\frac{1}{b-a}\int_a^b\boldsymbol{x}(\alpha)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\alpha,\frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^s\boldsymbol{x}(\alpha)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}s\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{e}_i=[\boldsymbol{0}_{n,(i-1)n},\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{0}_{n,(4-i)n}],\quad i=1,2,3,4.$$

注 3 当 $\boldsymbol{N}_1=\dfrac{1}{b-a}[-\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Z},0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{N}_2=\boldsymbol{N}_3=0$ 时,引理 1 成为 Jensen 不等式[8];当 $\boldsymbol{N}_1=\dfrac{1}{b-a}[-\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Z},0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{N}_2=\dfrac{3}{b-a}[-\boldsymbol{Z},-\boldsymbol{Z},2\boldsymbol{Z},0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{N}_3=0$ 时,引理 1 成为 Wirtinger 不等式[9].因此引理 1 是比 Jensen 不等式和 Wirtinger 不等式更精确的估计不等式.

2 主要结论

首先,运用引理 1 中的积分不等式给出下述系统的稳定性判据:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_{di}\boldsymbol{x}(t-h). \tag{7}$$

定理 1 对给定的 $h>0$,如果存在正定矩阵 $\boldsymbol{P}_i,\boldsymbol{Q}_i,\boldsymbol{Q},\boldsymbol{Z}_i,\boldsymbol{Z}$ 和任意矩阵 $\boldsymbol{N}_{1i},\boldsymbol{N}_{2i},\boldsymbol{N}_{3i}$,使得对任意的 $i\in S$,有下列线性矩阵不等式成立:

$$\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{Q}_j-\boldsymbol{Q}<0, \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{Z}_j-\boldsymbol{Z}<0, \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Omega} & h\boldsymbol{N}_{1i} & h\boldsymbol{N}_{2i} & h\boldsymbol{N}_{3i}\\ * & -\boldsymbol{Z}_i & 0 & 0\\ * & * & -3\boldsymbol{Z}_i & 0\\ * & * & * & -5\boldsymbol{Z}_i\end{bmatrix}<0, \tag{10}$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Pi}_{5i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{\Pi}_4+\boldsymbol{\Pi}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{\Pi}_{5i}+\boldsymbol{\Pi}_4^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_j\Big)\boldsymbol{\Pi}_4+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_i+h\boldsymbol{Q})\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{\Phi}_i^{\mathrm{T}}\Big(h^2\boldsymbol{Z}_i+\frac{1}{2}h^3\boldsymbol{Z}\Big)\boldsymbol{\Phi}_i+h\,\mathrm{sym}\{\boldsymbol{N}_{1i}\boldsymbol{\Pi}_1+\boldsymbol{N}_{2i}\boldsymbol{\Pi}_2+\boldsymbol{N}_{3i}\boldsymbol{\Pi}_3\},$$

$$\boldsymbol{\Pi}_4=\left[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}},h\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}},\frac{1}{2}h^2\boldsymbol{e}_4^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}},\quad\boldsymbol{\Pi}_5=[\boldsymbol{\Phi}_i^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}},h\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}-h\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\Phi}_i=[\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{A}_{di},\boldsymbol{0}_{n,2n}],$$

则系统(7)是随机稳定的.

证明 设 $\boldsymbol{x}_t=\boldsymbol{x}(t+\sigma),-2h\leqslant\sigma\leqslant 0$,

$$\boldsymbol{v}_1(t)=\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}(\alpha)\mathrm{d}\alpha,\quad \boldsymbol{v}_2(t)=\int_{t-h}^{t}\int_{t-h}^{s}\boldsymbol{x}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}s,$$

$$\boldsymbol{\delta}(t)=[\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{v}_1(t)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{v}_2(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}.$$

考虑如下 Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$V(\boldsymbol{x}_t,r(t),t)=\sum_{i=1}^{3}V_i(t),\tag{11}$$

其中

$$V_1(t)=\boldsymbol{\delta}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{\delta}(t),$$

$$V_2(t)=\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}(\alpha)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}(\alpha)\mathrm{d}\alpha+\int_{-h}^{0}\int_{t+\beta}^{t}\boldsymbol{x}(\alpha)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta,$$

$$V_3(t)=h\int_{t-h}^{t}\int_{t+\beta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_i\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta+h\int_{t-h}^{t}\int_{\sigma}^{0}\int_{t+\beta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\sigma.$$

设

$$\boldsymbol{\xi}(t)=\left[\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}(t-h)^{\mathrm{T}},\frac{1}{h}\boldsymbol{v}_1(t)^{\mathrm{T}},\frac{2}{h^2}\boldsymbol{v}_2(t)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}},$$

F 表示随机过程$\{r(t),t\}$的无穷小算子,则对(11)求无穷小算子得

$$\mathrm{F}V_1(t)=2\boldsymbol{\delta}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\dot{\boldsymbol{\delta}}(t)+\boldsymbol{\delta}(t)^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_j\Big)\boldsymbol{\delta}(t)=$$

$$\boldsymbol{\xi}(t)^{\mathrm{T}}\Big(\boldsymbol{\Pi}_{5i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{\Pi}_4+\boldsymbol{\Pi}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{\Pi}_{5i}+\boldsymbol{\Pi}_4^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_j\Big)\boldsymbol{\Pi}_4\Big)\boldsymbol{\xi}(t).\tag{12}$$

$$\mathrm{F}V_2(t)=\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-h)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}(t-h)+\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}(\alpha)^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{Q}_j\Big)\boldsymbol{x}(\alpha)\mathrm{d}\alpha+h\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}x(t)-\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}(\alpha)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(\alpha)\mathrm{d}\alpha=$$

$$\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_i+h\boldsymbol{Q})\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-h)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t-h)+\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}(\alpha)^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{Q}_j-\boldsymbol{Q}\Big)\boldsymbol{x}(\alpha)\mathrm{d}\alpha.\tag{13}$$

$$\mathrm{F}V_3(t)=h^2\dot{\boldsymbol{x}}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_i\dot{\boldsymbol{x}}(t)-h\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_i\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha+h\int_{-h}^{0}\int_{t+\beta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{Z}_j\Big)\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta+\frac{1}{2}h^3\dot{\boldsymbol{x}}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{x}}(t)-h\int_{-h}^{0}\int_{t+\beta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta=$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)^{\mathrm{T}}\Big(h^2\boldsymbol{Z}_i+\frac{1}{2}h^3\boldsymbol{Z}\Big)\dot{\boldsymbol{x}}(t)-h\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_i\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha+h\int_{-h}^{0}\int_{t+\beta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{Z}_j-\boldsymbol{Z}\Big)\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta.\tag{14}$$

由式(8)和(13)得

$$\mathrm{F}V_2(t)\leqslant\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_i+h\boldsymbol{Q})\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-h)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t-h)=\boldsymbol{\xi}(t)^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_i+h\boldsymbol{Q})\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{e}_2]\boldsymbol{\xi}(t).\tag{15}$$

根据式(9)和式(15),以及引理 1 得

$$\mathrm{F}V_3(t)\leqslant\boldsymbol{\xi}(t)^{\mathrm{T}}\Big[\boldsymbol{\Phi}_i^{\mathrm{T}}\Big(h^2\boldsymbol{Z}_i+\frac{1}{2}h^3\boldsymbol{Z}\Big)\boldsymbol{\Phi}_i+h^2\Big(\boldsymbol{N}_{1i}\boldsymbol{Z}_i^{-1}\boldsymbol{N}_{1i}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{3}\boldsymbol{N}_{2i}\boldsymbol{Z}_i^{-1}\boldsymbol{N}_{2i}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{5}\boldsymbol{N}_{3i}\boldsymbol{Z}_i^{-1}\boldsymbol{N}_{3i}^{\mathrm{T}}\Big)+h\mathrm{sym}\{\boldsymbol{N}_{1i}\boldsymbol{\Pi}_1+\boldsymbol{N}_{2i}\boldsymbol{\Pi}_2+\boldsymbol{N}_{3i}\boldsymbol{\Pi}_3\}\Big]\boldsymbol{\xi}(t).\tag{16}$$

由式(12),(15)和(16)得

$$\mathrm{F}V(\boldsymbol{x}_t,i,t)\leqslant\boldsymbol{\xi}(t)^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{\xi}(t),\tag{17}$$

其中

$$\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}=\boldsymbol{\Pi}_{5i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{\Pi}_4+\boldsymbol{\Pi}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{\Pi}_{5i}+\boldsymbol{\Pi}_4^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_j\Big)\boldsymbol{\Pi}_4+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_i+h\boldsymbol{Q})\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{\Phi}_i^{\mathrm{T}}\Big(h^2\boldsymbol{Z}_i+\frac{1}{2}h^3\boldsymbol{Z}\Big)\boldsymbol{\Phi}_i+h^2\Big(\boldsymbol{N}_{1i}\boldsymbol{Z}_i^{-1}\boldsymbol{N}_{1i}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{3}\boldsymbol{N}_{2i}\boldsymbol{Z}_i^{-1}\boldsymbol{N}_{2i}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{5}\boldsymbol{N}_3\boldsymbol{Z}_i^{-1}\boldsymbol{N}_{3i}^{\mathrm{T}}\Big)+h\mathrm{sym}\{\boldsymbol{N}_{1i}\boldsymbol{\Pi}_1+\boldsymbol{N}_{2i}\boldsymbol{\Pi}_2+\boldsymbol{N}_{3i}\boldsymbol{\Pi}_3\}.$$

对矩阵不等式(10)运用 Schur 补引理可得 $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}<0$,即 $\mathrm{F}V(x_t,i,t)<0$.运用类似与文献[1]中的方法可证得系统(7)是随机稳定的.证毕.

下面的定理 2 给出了系统(1)—(2)具有扩展耗散性的随机稳定性判据.

定理 2 对给定的 $h>0$ 和常数矩阵 $\boldsymbol{\Psi}_0\geqslant0$, $\boldsymbol{\Psi}_1\leqslant0$, $\boldsymbol{\Psi}_3<0$ 以及 $\boldsymbol{\Psi}_2$,满足$(\|\boldsymbol{\Psi}_1\|+\|\boldsymbol{\Psi}_2\|)\|\boldsymbol{\Psi}_0\|=0$,如果存在正定矩阵 $\boldsymbol{P}_i,\boldsymbol{Q}_i,\boldsymbol{Q},\boldsymbol{Z}_i,\boldsymbol{Z}$ 和任意矩阵 $\boldsymbol{N}_{1i},\boldsymbol{N}_{2i},\boldsymbol{N}_{3i}$,对任意的 $i\in S$,使得下列线性矩阵不等式以及式(8)—(9)成立:

$$\begin{bmatrix}-\tilde{\boldsymbol{e}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\tilde{\boldsymbol{e}}_1 & \boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_0^{\mathrm{T}}\\ * & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0,\tag{18}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}_{1i} & \boldsymbol{\Gamma}_{2i} & h\boldsymbol{N}_{1i} & h\boldsymbol{N}_{2i} & h\boldsymbol{N}_{3i}\\ * & \boldsymbol{\Gamma}_{3i} & 0 & 0 & 0\\ * & * & -\boldsymbol{Z}_i & 0 & 0\\ * & * & * & -3\boldsymbol{Z}_i & 0\\ * & * & * & * & -5\boldsymbol{Z}_i\end{bmatrix}<0,\tag{19}$$

其中

$$\boldsymbol{\Gamma}_{1i}=\boldsymbol{\Pi}_{5i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{\Pi}_4+\boldsymbol{\Pi}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{\Pi}_{5i}+\boldsymbol{\Pi}_4^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{j=1}^{s}\pi_{ij}\boldsymbol{P}_j\Big)\boldsymbol{\Pi}_4+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_i+h\boldsymbol{Q})\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{\Phi}_i^{\mathrm{T}}\Big(h^2\boldsymbol{Z}_i+\frac{1}{2}h^3\boldsymbol{Z}\Big)\boldsymbol{\Phi}_i+h\mathrm{sym}\{\boldsymbol{N}_{1i}\boldsymbol{\Pi}_1+\boldsymbol{N}_{2i}\boldsymbol{\Pi}_2+\boldsymbol{N}_{3i}\boldsymbol{\Pi}_3\}-\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}_1\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{e}_1,$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{2i}=\boldsymbol{\Pi}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\widetilde{\boldsymbol{D}}_i+\boldsymbol{\Phi}_i^{\mathrm{T}}\Big(h^2\boldsymbol{Z}_i+\frac{1}{2}h^3\boldsymbol{Z}\Big)\boldsymbol{D}_i-\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}_2,$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{3i}=\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}\Big(h^2\boldsymbol{Z}_i+\frac{1}{2}h^3\boldsymbol{Z}\Big)\boldsymbol{D}_i-\boldsymbol{\Psi}_3,\quad \tilde{\boldsymbol{e}}_1=[\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{0}_{n,2n}]^{\mathrm{T}},$$

则系统(1)—(2)是随机稳定的且满足扩展耗散性.

证明 采用相同的 Lyapunov-Krasovskii 泛函(11),沿着系统(1)—(2)的轨迹求无穷小算子,并运用完全类似于定理 1 的证明可得

$$\mathrm{F}V(\boldsymbol{x}_t,i,t)-J(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}(t)\\ \boldsymbol{\omega}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{1i} & \boldsymbol{\Gamma}_{2i}\\ * & \boldsymbol{\Gamma}_{3i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}(t)\\ \boldsymbol{\omega}(t)\end{bmatrix},\quad(20)$$

其中

$$\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{1i}=\boldsymbol{\Gamma}_{1i}+h^2\left(\boldsymbol{N}_{1i}\boldsymbol{Z}_i^{-1}\boldsymbol{N}_{1i}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{3}\boldsymbol{N}_{2i}\boldsymbol{Z}_i^{-1}\boldsymbol{N}_{2i}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{5}\boldsymbol{N}_{3i}\boldsymbol{Z}_i^{-1}\boldsymbol{N}_{3i}^{\mathrm{T}}\right).$$

对式(19)运用 Schur 补引理可得 $\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{1i} & \boldsymbol{\Gamma}_{2i}\\ * & \boldsymbol{\Gamma}_{3i}\end{bmatrix}<0$,即 $\mathrm{F}V(\boldsymbol{x}_t,i,t)-J(t)<0$.从而可以断定必存在一个标量 $\lambda>0$,使得

$$\mathrm{F}V(\boldsymbol{x}_t,i,t)-J(t)\leqslant-\lambda|\boldsymbol{x}(t)|^2,\quad(21)$$

从而有 $J(t)>\mathrm{F}V(\boldsymbol{x}_t,i,t)$,故对任意 $t\geqslant0$,运用 Dynkin 公式可得

$$\varepsilon\left\{\int_0^t J(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right\}\geqslant\varepsilon\{V(\boldsymbol{x}_t,r(t),t)\}-V(\boldsymbol{x}_0,r_0,0).$$

对式(18) 运用 Schur 补引理可得

$$\bar{\boldsymbol{e}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\bar{\boldsymbol{e}}_1>\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}_0\boldsymbol{L}_i,$$

考虑到零初始条件可得

$$\varepsilon\left\{\int_0^t J(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right\}\geqslant\varepsilon\{\boldsymbol{\delta}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{\delta}(t)\}\geqslant \varepsilon\{z(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}_0 z(t)\}.\quad(22)$$

下面分两种情形证明系统(1)—(2)满足扩展耗散性,即不等式(6)成立.

情形 1:$\|\boldsymbol{\Psi}_0\|=0$.由式(22)可知不等式(6)自然成立.

情形 2:$\|\boldsymbol{\Psi}_0\|\neq0$.由条件$(\|\boldsymbol{\Psi}_1\|+\|\boldsymbol{\Psi}_2\|)\|\boldsymbol{\Psi}_0\|=0$ 可知 $\boldsymbol{\Psi}_1=0$ 和 $\boldsymbol{\Psi}_2=0$.注意到 $\boldsymbol{\Psi}_3>0$,从而有 $\boldsymbol{J}(\alpha)=\boldsymbol{\omega}(\alpha)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}_3\boldsymbol{\omega}(\alpha)\geqslant0$.再结合式(22)可得

$$\varepsilon\left\{\int_0^{t_f}J(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right\}\geqslant\varepsilon\left\{\int_0^{t}J(\alpha)\mathrm{d}\alpha\right\}\geqslant\varepsilon\{z(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}_0 z(t)\}\geqslant0$$

对所有的 $t_f>t>0$ 成立.

综合情形 1 和情形 2,以及定义 2 可知,系统(1)—(2)满足扩展耗散性.

最后,我们证明当 $\boldsymbol{\omega}(t)=0$ 时系统(1)—(2)是随机稳定的.此时,$J(t)=z(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}_1 z(t)\leqslant0$,由式(21)可得

$$\mathrm{F}V(\boldsymbol{x}_t,i,t)\leqslant-\lambda|\boldsymbol{x}(t)|^2.$$

运用类似与文献[1]的方法可以证明系统(1)—(2)是随机稳定的,证毕.

定理 3 对给定的 $h>0$ 和常数矩阵 $\boldsymbol{\Psi}_0\geqslant0$,$\boldsymbol{\Psi}_1\leqslant0$,$\boldsymbol{\Psi}_3<0$ 以及 $\boldsymbol{\Psi}_2$,满足

$$(\|\boldsymbol{\Psi}_1\|+\|\boldsymbol{\Psi}_2\|)\|\boldsymbol{\Psi}_0\|=0,$$

如果存在正定矩阵 $\boldsymbol{X}_i$,$\hat{\boldsymbol{P}}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_i & \rho_{1i}\boldsymbol{X}_i & \rho_{2i}\boldsymbol{X}_i\\ \rho_{1i}\boldsymbol{X}_i & \hat{\boldsymbol{P}}_{2i} & \hat{\boldsymbol{P}}_{3i}\\ \rho_{2i}\boldsymbol{X}_i & \hat{\boldsymbol{P}}_{3i}^{\mathrm{T}} & \hat{\boldsymbol{P}}_{4i}\end{bmatrix}$,$\hat{\boldsymbol{Q}}_i,\hat{\boldsymbol{Q}},\hat{\boldsymbol{Z}}_i,\hat{\boldsymbol{Z}}$ 和任意矩阵 $\hat{\boldsymbol{N}}_{1i}$,$\hat{\boldsymbol{N}}_{2i},\hat{\boldsymbol{N}}_{3i},\boldsymbol{Y}_i$,标量 ρ_{1i},ρ_{2i},对任意的 $i\in S$,使得下列线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_1 & \boldsymbol{M}\\ * & \boldsymbol{Y}_2\end{bmatrix}<0,\quad(23)$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_1 & \boldsymbol{M}\\ * & \boldsymbol{\Lambda}_2\end{bmatrix}<0,\quad(24)$$

$$\begin{bmatrix}-\bar{\boldsymbol{e}}_1^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{P}}_i\bar{\boldsymbol{e}}_1 & \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_0^{\mathrm{T}}\\ * & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0,\quad(25)$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{1i} & \boldsymbol{\Sigma}_{2i}\\ * & \boldsymbol{\Sigma}_{3i}\end{bmatrix}<0,\quad(26)$$

其中

$\boldsymbol{Y}_1=\pi_{ii}\hat{\boldsymbol{Q}}_i+\hat{\boldsymbol{Q}}-2\boldsymbol{X}_i$,

$\boldsymbol{Y}_{2i}=\mathrm{diag}(-\hat{\boldsymbol{Q}}_1,\cdots,-\hat{\boldsymbol{Q}}_{i-1},-\hat{\boldsymbol{Q}}_{i+1},\cdots,-\hat{\boldsymbol{Q}}_s)$,

$\boldsymbol{\Lambda}_1=\pi_{ii}\hat{\boldsymbol{Z}}_i+\hat{\boldsymbol{Z}}-2\boldsymbol{X}_i$,

$\boldsymbol{\Lambda}_{2i}=\mathrm{diag}(-\hat{\boldsymbol{Z}}_1,\cdots,-\hat{\boldsymbol{Z}}_{i-1},-\hat{\boldsymbol{Z}}_{i+1},\cdots,-\hat{\boldsymbol{Z}}_s)$,

$\boldsymbol{M}=[\sqrt{\pi_{i,1}}\boldsymbol{X}_i,\cdots,\sqrt{\pi_{i,i-1}}\boldsymbol{X}_i,\sqrt{\pi_{i,i+1}}\boldsymbol{X}_i,\cdots,\sqrt{\pi_{i,s}}\boldsymbol{X}_s]$,

$$\boldsymbol{\Sigma}_{1i}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11i} & \boldsymbol{\Sigma}_{12i} & \boldsymbol{\Sigma}_{13i} & \boldsymbol{\Sigma}_{14i} & \boldsymbol{\Sigma}_{15i}\\ * & -\boldsymbol{\Psi}_3 & \boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}} & 0\\ * & * & \hat{\boldsymbol{Z}}_i-2\boldsymbol{X}_i & 0 & 0\\ * & * & * & -2h\hat{\boldsymbol{Z}} & 0\\ * & * & * & * & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Xi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Y}_i & \boldsymbol{0}_{n,3n}\\ \rho_{1i}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Y}_i & \boldsymbol{0}_{n,3n}\\ \rho_{2i}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Y}_i & \boldsymbol{0}_{n,3n}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{2i}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{21i} & \boldsymbol{\Sigma}_{22i} & h\hat{\boldsymbol{N}}_{1i} & h\hat{\boldsymbol{N}}_{2i} & h\hat{\boldsymbol{N}}_{3i}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{\Sigma}_{3i}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_{31i},-\hat{\boldsymbol{Q}},-\hat{\boldsymbol{Z}}_i,-3\hat{\boldsymbol{Z}}_i,-5\hat{\boldsymbol{Z}}_i)$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}_{11i}=&\boldsymbol{\Pi}_4^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{\Pi}_{5i}+\boldsymbol{\Pi}_{5i}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{\Pi}_4+\boldsymbol{\Pi}_4^{\mathrm{T}}\pi_{ii}\hat{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{\Pi}_4+\\ &\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{Q}}_i\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{Q}}_i\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{\Pi}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}+\boldsymbol{\Xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}_4+\\ &h\mathrm{sym}\{\hat{\boldsymbol{N}}_{1i}\boldsymbol{\Pi}_1+\hat{\boldsymbol{N}}_{2i}\boldsymbol{\Pi}_2+\hat{\boldsymbol{N}}_{3i}\boldsymbol{\Pi}_3\},\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\Sigma}_{12i}=\boldsymbol{\Pi}_4^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}},\rho_{1i}\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}},\rho_{2i}\boldsymbol{D}_i^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}_2$,

$\boldsymbol{\Sigma}_{13i}=h[\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Y}_i,\boldsymbol{A}_{di}\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{0}_{n,2n}]^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{\Sigma}_{14i}=h^2[\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Y}_i,\boldsymbol{A}_{di}\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{0}_{n,2n}]^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{\Sigma}_{15i}=e_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{L}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_1^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\Sigma}_{21i}=\boldsymbol{\Pi}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M},\quad \boldsymbol{\Sigma}_{22i}=\sqrt{h}\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_i$,

$\boldsymbol{\Sigma}_{31i}=\mathrm{diag}(-\boldsymbol{X}_1,\cdots,-\boldsymbol{X}_{i-1},-\boldsymbol{X}_{i+1},\cdots,-\boldsymbol{X}_s)$.

此时,所求的状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}_i$ 可表示为

$$\boldsymbol{K}_i=\boldsymbol{Y}_i\boldsymbol{X}_i^{-1}.$$

证明 不妨假设 $\boldsymbol{P}_{1i}>0$,构造定理2中的

$$\boldsymbol{P}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{1i} & \rho_{1i}\boldsymbol{P}_{1i} & \rho_{2i}\boldsymbol{P}_{1i}\\ \rho_{1i}\boldsymbol{P}_{1i} & \boldsymbol{P}_{2i} & \boldsymbol{P}_{3i}\\ \rho_{2i}\boldsymbol{P}_{1i} & \boldsymbol{P}_{3i}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}_{4i}\end{bmatrix}>0,$$

令 $\boldsymbol{P}_{1i}^{-1}=\hat{\boldsymbol{P}}_{1i}=\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{P}_{2i}\boldsymbol{X}_i=\hat{\boldsymbol{P}}_{2i},\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{P}_{3i}\boldsymbol{X}_i=\hat{\boldsymbol{P}}_{3i},\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{P}_{4i}\boldsymbol{X}_i=\hat{\boldsymbol{P}}_{4i},\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{X}_i=\hat{\boldsymbol{Q}}_i,\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{X}_i=\hat{\boldsymbol{Z}}_i,\boldsymbol{Q}^{-1}=\hat{\boldsymbol{Q}},\boldsymbol{Z}^{-1}=\hat{\boldsymbol{Z}}$,对 $\boldsymbol{P}_i$ 施行合同变换 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{X}_i)$ 得到

$$\hat{\boldsymbol{P}}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_i & \rho_{1i}\boldsymbol{X}_i & \rho_{2i}\boldsymbol{X}_i\\ \rho_{1i}\boldsymbol{X}_i & \hat{\boldsymbol{P}}_{2i} & \hat{\boldsymbol{P}}_{3i}\\ \rho_{2i}\boldsymbol{X}_i & \hat{\boldsymbol{P}}_{3i}^{\mathrm{T}} & \hat{\boldsymbol{P}}_{4i}\end{bmatrix}>0.$$

对不等式(8),(9),(18)分别施行合同变换 $\boldsymbol{X}_i$,$\boldsymbol{X}_i$ 和 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{I})$,并结合 Schur 补引理可得等价不等式(23),(24)和(25).同理,对(19)运用 Schur 补引理,并施行类似合同变换可得(26).证毕.

3 仿真算例

例1 考虑具有如下参数的时滞 Markovian 跳变系统(7):

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}-3.4888 & 0.8057\\ -0.6451 & -3.2684\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}-2.4898 & 0.2895\\ 1.3396 & -0.0211\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{d1}=\begin{bmatrix}-0.8620 & -1.2919\\ -0.6841 & -2.0729\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{d2}=\begin{bmatrix}-2.8306 & 0.4978\\ -0.8436 & -1.0115\end{bmatrix}.$$

假定 $\pi_{22}=-0.8$,对于不同的 π_{11} 值,通过解定理1中线性矩阵不等式(8)—(10)可得到保证系统(7)随机稳定的时滞上界最大允许值 $h_{\max}$.表1比较了已有文献[1-2,4]结果与本文定理1得到的 $h_{\max}$,从表1中可以看出定理1的稳定性条件比文献[1-2,4]具有较小的保守性.

例2 考虑具有如下参数的时滞 Markovian 跳变系统(1)—(2):

表1 时滞上界最大允许值 $h_{\max}$ 的比较结果

Table 1 Comparisons of maximum allowed $h_{\max}$ in Example 1

方法	$\pi_{11}=-0.1$	$\pi_{11}=-0.5$	$\pi_{11}=-0.8$	$\pi_{11}=-1$
文献[1]	0.6797	0.5794	0.5562	0.5465
文献[2](m=5)	0.8232	0.7327	0.7039	0.6934
文献[4]	1.1103	0.7718	0.6887	0.6563
本文定理1	1.7624	1.2849	1.2141	1.1887

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 0.5 & -0.1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0 & 1.3\\ -0.17 & -0.1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{d1}=\begin{bmatrix}-0.2 & -0.3\\ 0.1 & 0.1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_{d2}=\begin{bmatrix}-0.3 & 0.2\\ -0.3 & 0.1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{bmatrix}-0.4\\ 0.8\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}_2=\begin{bmatrix}0.8\\ -1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{L}_1=[0.5\quad -0.3],\quad \boldsymbol{L}_2=[0.2\quad -0.7],$$

$$\boldsymbol{\Pi}=\begin{bmatrix}-0.2 & 0.2\\ 0.8 & -0.8\end{bmatrix},\quad h=0.6.$$

1) L_2-L_∞ 性能.设 $\Psi_0=1,\Psi_1=0,\Psi_2=0,\Psi_3=\gamma^2$,应用定理3中的线性矩阵不等式条件解得 $\gamma_{\min}=0.7448$ 和状态反馈增益矩阵:

$\boldsymbol{K}_1=[-0.8287\quad -3.2778]$,

$\boldsymbol{K}_2=[-0.2614\quad -1.6445]$.

2) 耗散性.令 $\Psi_0=0,\Psi_1=-1,\Psi_2=1,\Psi_3=\gamma$,同样应用定理3中的条件解得 $\gamma_{\min}=1.2194$ 和状态反馈增益矩阵:

$\boldsymbol{K}_1=[-1.1100\quad -3.4497]$,

$\boldsymbol{K}_2=[-0.5597\quad -9429]$.

取初始条件为 $\boldsymbol{\varphi}(t)=[-0.2,0.2]$,外部扰动为 $\tilde{\omega}(t)=0.7(\sin t)\mathrm{e}^{-0.2t}$,图1给出了开环系统(1)的状态响应,图2和图3分别是满足 L_2-L_∞ 性能和耗散性的闭环状态响应.仿真结果也验证了本文方法的可行性.

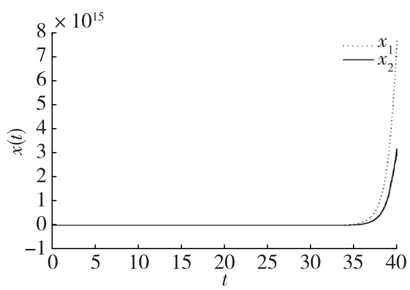

图1 开环系统的状态响应

Fig. 1 Response of the states of open-loop system

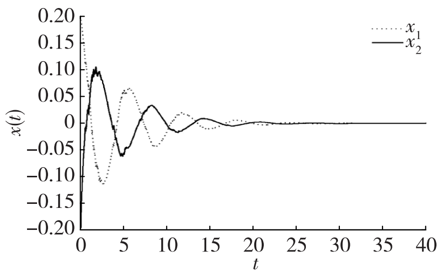

图 2　具有 L_2-L_∞ 性能的闭环状态响应

Fig. 2　Response of the states of closed-loop system with L_2-L_∞ performance

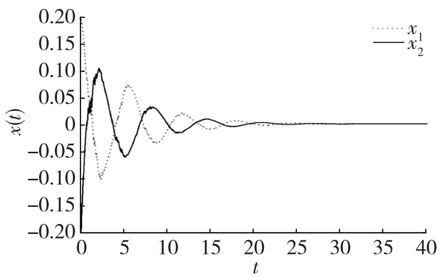

图 3　具有耗散性能的闭环状态响应

Fig. 3　Response of the states of closed-loop system with dissipative performance

4　结论

本文研究了时滞 Markovian 跳变系统的稳定性和镇定问题,利用文献[5]的一个精确积分不等式,得到了保守性较小的稳定性判据.基于此稳定性判据,设计了一个状态反馈控制器,使得闭环系统同时满足随机稳定性和扩展耗散性.仿真结果验证了本文设计方法的可行性和有效性.

参考文献
References

[1] Xu S Y, Lam J, Mao X R. Delay-dependent H_∞ control and filtering for uncertain Markovian jump systems with time-varying delays[J].IEEE Transactions on Circuits & Systems I:Regular Papers,2007,54(9):2070-2077

[2] Fei Z Y,Gao H J,Shi P.New results on stabilization of Markovian jump systems with delay[J]. Automatica, 2009,45(10):2300-2306

[3] Zhao X D,Zeng Q S.Delay-dependent H_∞ performance analysis and filtering for Markovian jump systems with interval time-varying delays[J]. International Journal of Adaptive Control & Signal Process, 2010, 24(8): 633-642

[4] Zhang B Y,Zheng W X,Xu S Y.On robust H_∞ filtering of uncertain Markovian jump time-delay systems[J].International Journal of Adaptive Control & Signal Process, 2012,26(2):138-157

[5] Zeng H B,He Y,Wu M,et al.New results on stability analysis for systems with discrete distributed delay[J]. Automatica,2015,60:189-192

[6] Zhang B Y,Zheng W X,Xu S Y.Filtering of Markovian jump delay systems based on a new performance index [J].IEEE Transactions on Circuits & Systems I:Regular Papers,2013,60(5):1250-1263

[7] Feng Z G,Zheng W X.On extended dissipativity of discrete-time neural networks with times delay[J].IEEE Transactions on Neural Networks & Learning Systems, 2015,26(12):3293-3300

[8] Gu K.An integral inequality in the stability problem of time-delay systems[C]//Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision Control,2000,3:2805-2810

[9] Seuret A,Gouaisbaut F.Wirtinger-based integral inequality:Application to time-delay systems[J]. Automatica, 2013,49(9):2860-2866

Stability analysis and stabilization for Markovian jump system with time delays via integral inequality

XIA Weifeng[1]　XU Shengyuan[1]

1　School of Automation,Nanjing University of Science and Technology,Nanjing　210094

Abstract　This paper deals with the problem of stability analysis and stabilization for Markovian jump systems with time delays.Firstly,a stability criterion is derived by employing a new integral inequality.Secondly,based on the stability criterion,a sufficient condition,which ensures the existence of state feedback controllers such that the resulting closed-loop system is stochastically stable while satisfying extended dissipativity.Finally,two numerical examples are given to illustrate the effectiveness of the proposed methods.

Key words　Markovian jump systems;stability;stabilization;extended dissipativity