DOI:10.13878/j.cnki.jnuist.2017.04.007

徐道义[1]

中立型随机发展系统的适定性

摘要

针对中立型随机发展系统的温和解与轨道温和解,给出了其存在唯一性与渐近估计的充分条件,推广了经典的 Pazy 定理与一些近期文献的主要工作.

关键词

随机发展方程;中立型;脉冲;适定性;渐近性

中图分类号 O211.63;O175.21;O175.29;O175.15

文献标志码 A

收稿日期 2017-05-11

资助项目 国家自然科学基金(11271270,11471061)

作者简介

徐道义,男,教授,博士生导师,研究方向为随机、脉冲与泛函微分动力系统.daoyixu@126.com

1 四川大学 数学研究所,成都,610064

0 引言与系统描述

近年来对随机微分方程的研究已成为学术界的一个热门方向[1-14].中立型随机发展系统更集中代表了随机常微分方程[5]、随机泛函微分方程[3,7,9-13]、Banach 空间中抽象随机微分方程表示的数学物理方程等[1-2,4,6,14].其中一种经典的研究是利用数学期望将 Itô 积分转换普通积分,再利用处理微分方程的技巧与方法来获得其解的各种性态[3-13].这样获得方程的解只能在样本空间 Ω 中几乎必然(a.s.,即以概率 1)成立.最近,人们对具有可加噪声与一些乘积噪声[1,4]或对具有光滑扩散项的发展方程[2,14],利用积分或微分变换将 Itô 随机(滞后)微分方程化为仅其系数含随机量的(滞后)微分方程,研究了这些方程对所有样本点 $\omega\in\Omega$ 都成立的轨道温和解的适定性与渐近性.本文则进一步针对中立型随机发展系统,研究这两类解,给出了其温和解与轨道温和解存在唯一性与渐近估计的充分条件,推广了一个经典的 Pazy 定理[15]与一些近期文献的主要工作[2,7-14].下面将给出主要结果与证明的思路,其准确的概念与证明的细节可类似于文献[2,6-14]获得.

为了便于研究,我们令 $\mathbf{R}_+=\{x\in\mathbf{R}:x\geqslant0\}$,$\mathbf{N}$ 表示自然数集,$(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant0},P)$ 表示一个完备的概论空间,$\mathbb{X}$,$\mathbb{Y}$ 是 Banach 空间,$\mathcal{L}(\mathbb{X};\mathbb{Y})$ 是 $\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 的所有有界线性算子形成的 Banach 空间.$|\cdot|$,$|\cdot|_{\mathbb{Y}}$ 与 $|\cdot|_{\mathcal{L}(\mathbb{X};\mathbb{Y})}$ 分别表示空间 $\mathbb{X}$,$\mathbb{Y}$ 与 $\mathcal{L}(\mathbb{X};\mathbb{Y})$ 的范数.特别地记 $\mathcal{L}(\mathbb{X})=\mathcal{L}(\mathbb{X},\mathbb{X})$.我们说 $\phi:[a,b]\to\mathbb{X}$ 是逐段连续若 $\phi(t)$ 有至多有限个不连续点且 $\phi(t^+)$ 与 $\phi(t^-)$ 存在并对任意 $t\in(a,b]$ 有 $\phi(t^-)=\phi(t)$. $PC(X;Y)$ 与 $C(X;Y)$ 分别表示 $X\to Y$ 的逐段连续与连续集,特别地,$PC\triangleq PC([-\tau,0];X)$ 与 $C\triangleq C([-\tau,0];X)$ 其范数都记为 $\|\phi\|=\sup\limits_{-\tau\leqslant s\leqslant0}|\varphi(s)|<\infty$,$\tau>0$ 是常数或 $\tau=\infty$. 当 $\tau=\infty$,$PC\triangleq\{\phi:(-\infty,0]\to\mathbb{X}|\phi\in PC([-r,0];\mathbb{X}),\forall r\in(0,\infty)$ 且 $\|\varphi\|=\sup\limits_{-\infty<s\leqslant0}|\varphi(s)|<\infty\}$.

本文研究如下中立型随机发展系统的温和解与轨道温和解:

$$\begin{cases}\mathrm{d}[u(t)-G(t,u_t)]=[A(t)u(t)+f(t,u_t)]\mathrm{d}t+g(t,u_t)\mathrm{d}W(t),\\ \qquad t\in[0,a),\\ u_0=\xi\in PC,\quad \xi(t)=\xi(t,\omega)\text{是一个随机过程},\\ \qquad t\in[-\tau,0],\end{cases}\tag{1}$$

其中 a 是常数或 $a=\infty$,$A(t):\mathcal{D}\subset\mathbb{X}\to X$ 是一个稠定闭线性算子族,$\mathcal{D}$

独立于 t 且在 $\mathbb{X}$ 中稠密,非线性项 f 与 g 分别被称为漂移与扩散项. $u_t(s)=u(t+s)(s\in[-\tau,0])$. W 是一个取值于可分 Hilbert 空间 U 的双边 Wiener 过程[2]. $Q\in\mathcal{L}(U)$ 是 $W(t)$ 的一个迹类协方差算子. 记 $U_0=Q^{\frac{1}{2}}U$,则 $L_2^0=L_2(U_0;\mathbb{X})$ 配以范数 $|\Psi|_{L_2^0}^2=Tr(\Psi Q\Psi^*)$ 是一个可分的 Hilbert 空间[6]. 下面用 $\omega(t),t\in\mathbf{R}$ 表示过程 W 的规范形式及它的 Wiener 转换:

$$\theta_t\omega(\cdot)=\omega(\cdot+t)-\omega(t),\quad \omega\in C(\mathbf{R};U),\tag{2}$$

且其轨道集对于 $\beta\in(0,1/2)$ 在任意区间 $[-k,k]$, $k\in\mathbf{N}$ 上有 β-Hölder 半范数(记作 $\|\cdot\|_\beta$).

设 $A(\cdot)$ 生成发展算子 $\mathbb{T}(t,s)\in\mathcal{L}(\mathbb{X})$, $0\leqslant s\leqslant t<a$. 即 $\mathbb{T}(t,s)$ 满足如下条件[15]:

(i) $\mathbb{T}(s,s)=\mathbb{I}$($\mathbb{X}$ 中的恒等映射), $\mathbb{T}(t,r)\mathbb{T}(r,s)=\mathrm{T}(t,s)$, $0\leqslant s\leqslant r\leqslant t<a$;

(ii) $(t,s)\to\mathbb{T}(t,s)$ 对于 $0\leqslant s\leqslant t<a$ 强连续;

(iii) $\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{T}(t,s)u=A(t)\mathbb{T}(t,s)u$, $\quad\frac{\partial}{\partial s}\mathbb{T}(t,s)u=-\mathbb{T}(t,s)A(s)u$, $\quad\forall u\in D(A(t))\subset\mathbb{X}$.

定义 1 令 $\mathcal{L}$ 是一个具有范数 $|\cdot|_{\mathcal{L}}$ 的 Banach 空间. 记 $L^p(J;\mathcal{L})=\{f:J\to\mathcal{L}|\int_J|f(t)|_{\mathcal{L}}^p\mathrm{d}t<\infty,p>0,J\subseteq\mathbf{R}\}$. 若对于任意 $b\in(t_0,a)$ 及 $n\in\mathbf{N}$ 都有 $p>0$ 及函数 $L_n^{\mathcal{L}}\in L^1([t_0,b];\mathbf{R}_+)$ 使得对任意 $\varphi,\psi\in PC$,当 $\|\varphi\|\vee\|\psi\|\leqslant n$ 时有

$$|F(t,\varphi)-F(t,\psi)|_{\mathcal{L}}^p\leqslant L_n^{\mathcal{L}}(t)\|\varphi-\psi\|^p,\quad \forall t\in[t_0,b],\tag{3}$$

则称 $F:[t_0,a)\times PC\to\mathcal{L}$ 满足广义 p 阶局部 Lipschitz 条件,并记为 $F\in Lip^p_{[t_0,a)}[L_n^{\mathcal{L}}(t)]$.

特别地,若有与 n 无关的函数 $L_\infty^{\mathcal{L}}\in L^1([t_0,b];\mathbf{R}_+)$ 代替(3)中的 $L_n^{\mathcal{L}}$,使得它对于所有 $\varphi,\psi\in PC$ 都成立,称说 F 满足广义 p 阶全局 Lipschitz 条件. 于是 $L_\infty^{\mathcal{L}}(t)\equiv L_\infty^{\mathcal{L}}$(常数), $F\in Lip^1_{[t_0,a)}[L_\infty^{\mathcal{L}}]$ 成为了通常的全局 Lipschitz 条件[8].

我们假设有 Banach 空间 $\mathbb{Y}$ 紧嵌入 $\mathbb{X}$ 且其范数满足 $|x|_{\mathbb{Y}}\leqslant\eta|x|$ ($\eta>0$ 常数)并使得:

(S_1) 对给定 $t\in(0,a)$,函数 $\mathbb{T}(t,s)A(s)\in C([0,t],\mathcal{L}(\mathbb{Y};\mathbb{X}))$ 且有 $S\in L^1([0,t];\mathbf{R}_+)$ 使得 $|\mathbb{T}(t,s)A(s)|_{\mathcal{L}(\mathbb{Y};\mathbb{X})}\leqslant S(t,s)/\eta,\quad\forall s\in[0,t]$.

注 1 由条件(S_1)及 $u\in PC([0,t];\mathbb{X})$,应用 Bochner 对可积函数判别法及估计

$$|\mathbb{T}(t,s)A(s)u(s)|\leqslant|\mathbb{T}(t,s)A(s)|_{\mathcal{L}(\mathbb{Y};\mathbb{X})}|u(s)|_{\mathbb{Y}}\leqslant S(t,s)|u(s)|,\quad\forall s\in[0,t],\tag{4}$$

则有函数 $s\to\mathbb{T}(t,s)A(s)u(s)$ 在 $[0,t]$ 上可积.

(S_2) 对 $u\in PC([-\tau,a);\mathbb{X})$,函数 $g(t,u_t)\in C^1([0,a)\times PC;\mathcal{L}(U;\mathbb{X}))$ 满足:

$\frac{\mathrm{d}g(t,u_t)}{\mathrm{d}t}=K(t,u_t)$,算子 $K:[0,a)\times PC\mapsto\mathcal{L}(U;\mathbb{X})$.

1 轨道温和解

条件(S_2)使得

$$\mathrm{d}[g(t,u_t)\omega(t)]=K(t,u_t)\omega(t)\mathrm{d}t+g(t,u_t)\mathrm{d}\omega,$$

那么(1)成为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}[u(t)-G(t,u_t)-g(t,u_t)\omega(t)]=\{&A(t)[u(t)-G(t,u_t)-g(t,u_t)\omega(t)]+A(t)[g(t,u_t)\omega(t)+\\&G(t,u_t)]-K(t,u_t)\omega(t)+f(t,u_t)\}\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{5}$$

于是在(S_2)条件下,(1)的轨道温和解由下面积分方程定义:

$$\begin{aligned}u(t)=&\mathbb{T}(t,0)[\xi(0)-G(0,\xi)]+\\&\int_0^t\mathbb{T}(t,s)[f(s,u_s)-K(s,u_s)\omega(s)]\mathrm{d}s+\\&G(t,u_t)+g(t,u_t)\omega(t)+\\&\int_0^t\mathbb{T}(t,s)A(s)[g(s,u_s)\omega(s)+G(s,u_s)]\mathrm{d}s,\\&\forall\omega\in\Omega.\end{aligned}\tag{6}$$

定理 1 若条件(S_1)与(S_2)成立. 设对任意 $b\in[0,a)$ 有

$$\begin{cases}f(t,0)\in L^1([0,b];\mathbb{X}),\quad K(t,0)\in L^1([0,b];\\\qquad\mathcal{L}(U;\mathbb{X})),\quad K\in Lip^1_{[0,a)}[L_n^{\mathcal{L}(U;\mathbb{X})}(t)],\\f\in Lip^1_{[0,a)}[L^{\mathbb{X}}(t)],\quad g\in Lip^1_{[0,a)}[L_n^{\mathcal{L}(U;\mathbb{Y})}(t)],\\\qquad G\in Lip^1_{[0,a)}[L_\infty^{\mathcal{L}(\mathbb{X};\mathbb{Y})}\vee L_\infty^{\mathbb{X}}]\ (L_\infty^{\mathbb{X}}<1);\end{cases}\tag{7}$$

$$\begin{cases}G\in PC([0,a)\times PC,\mathbb{X});\\g\in PC([0,a)\times PC,\mathcal{L}(U;\mathbb{Y})).\end{cases}\tag{8}$$

则必定存在一个停时 $\beta=\beta(\omega)\in(0,a]$ 使得方程(1)有唯一最大局部轨道温和解 $u(t)\in PC([0,\beta);\mathbb{X})$. 即对所有 $\omega\in\Omega$, $u(t)$ 是(1)的温和解,若有某些 $\omega\in\Omega$ 具有 $\beta(\omega)<a$,则其样本轨道 $u(t)=u(t,\omega)$ 必在 $\beta(\omega)$ 爆破(i.e., $\overline{\lim}_{t\to\beta^-}|u(t,\omega)|=\infty$),并称 $\beta(\omega)$ 为样本轨道 $u(t,\omega)$ 的爆破时间. 进而,如果条件(8)被 $G\in C([0,a)\times PC,\mathbb{X})$ 与 $g\in C([0,a)\times PC,\mathcal{L}(U;\mathbb{Y}))$ 代替,则有 $u(t)\in C([0,\beta);\mathbb{X})$.

证明 因为 G,g 都逐段连续,必定存在 $\bar{b}\in(0,b]$ 使得 $G(t,u_t)$ 与 $g(t,u_t)\omega(t)$ 在 $[0,\bar{b}]$ 上连续,且至少二者之一在 $\bar{b}$ 间断. 对于 $T_1\in(0,\bar{b}]$(T_1 将由后面压缩映射的需要给定,对最后由 G,g 都连续而得的结论不受 $\bar{b}$ 限制),我们考虑 $C([0,T_1];\mathbb{X})$ 的完备度量子空间

$C_{T_1}^{\xi}=\{u\in C([0,T_1];\mathbb{X}):u(s)=\xi(s)\in PC\}$，其范数 $\|u\|_{C_{T_1}^{\xi}}=\sup_{t\in[-\tau,T_1]}|u(t)|<\infty$.

定义算子 $\Gamma:C_{T_1}^{\xi}\to C_{T_1}^{\xi}$ 如下：

$$\Gamma(u)(t)-G(t,\Gamma u_t)=\mathbb{T}(t,0)[\xi(0)-G(0,\xi)]+\int_0^t\mathbb{T}(t,s)[f(s,u_s)-K(s,u_s)\omega(s)]\mathrm{d}s+g(t,u_t)\omega(t)+G(t,u_t)+\int_0^t\mathbb{T}(t,s)A(s)[g(s,u_s)\omega(s)+G(s,u_s)]\mathrm{d}s.$$

由条件(7)及注1，按照文献[11]引理2.2序列 $J_n(t)$ 连续性的方式可以证明(9)中的积分是连续的，再由 $G(t,u_t)$ 与 $g(t,u_t)\omega(t)$ 的连续性，易知 $t\to\Gamma(u)(t)$ 在 $[0,\bar{b}]$ 上连续.结合文献[13-14]的方法，我们能证明 f,g,G,K 满足相应广义全局 Lipschitz 条件下，必定有 $T_1\in(0,\bar{b}]$ 使得算子 Γ 在 $C_{T_1}^{\xi}$ 中是一个压缩映射，即(6)有唯一连续解 $u(t)$ $(t\in[0,T_1])$. 因为 $u_{T_1^+}\in PC$ 进而按前面的方式解同样的问题，我们能证明(6)在 $[T_1,T_2]$，…有连续解且必定有 $T_i\geqslant\bar{b}$ (见文献[2,14]). 式(1)有唯一连续轨道温和解 $u(t)$ $(t\in[t_0^+,\bar{b}])$.因为 $u_{\bar{b}^+}\in PC$，重复上面的过程，我们能获得解 $u(t)\in PC([0,b];\mathbb{X})$.由 b 的任意性，则在 f,g,G,K 满足广义全局 Lipschitz 条件下，(1)有唯一全局轨道温和解 $u(t)\in PC([0,a);\mathbb{X})$.

为了证明定理，对任意 $n\in\mathbf{N}$，我们定义函数 $\vartheta_n:\mathbf{R}_+\to[0,1]$ 如下：

$$\vartheta_n(s)=\begin{cases}1, & 0\leqslant s\leqslant n,\\ n/s, & s>n.\end{cases}$$

对于任意 $t\in[0,b]\subset[0,a)$，我们考虑方程

$$u_n(t)=\mathbb{T}(t,0)[\xi(0)-G(0,\xi)]+\int_0^t\mathbb{T}(t,s)[f_n(s,(u_n)_s)-K_n(s,(u_n)_s)\omega(s)]\mathrm{d}s+g_n(t,(u_n)_t)\omega(t)+G(t,(u_n)_t)+\int_0^t\mathbb{T}(t,s)A(s)[g_n(s,(u_n)_s)\omega(s)+G(s,(u_n)_s)]\mathrm{d}s,$$

其中

$$f_n(t,u_t)=f(t,\vartheta_n(\|u_t\|)u_t),$$
$$g_n(t,u_t)=g(t,\vartheta_n(\|u_t\|)u_t),$$
$$K_n(t,u_t)=K(t,\vartheta_n(\|u_t\|)u_t).$$

显然 f_n,g_n 及 K_n 在 $[0,b]\times C$ 上满足广义全局 Lipschitz 条件.则由上面的结论，(1)有唯一全局轨道温和解 $u_n(t)\in C([-\tau,b];\mathbb{X})$.

定义停时序列 β_n 如下：

$$\beta_n=b\wedge\inf\{t\in(0,b]:|u_n(t)|\geqslant n\}.$$

则 β_n 是 n 递增序列，于是可以定义 $\beta(w)=\lim_{n\to+\infty}\beta_n$. 令 $u_n(t)=u_n(t\wedge\beta_n)$，则 $u(t)=\lim_{n\to+\infty}u_n(t)$ $(t\in[0,\beta))$ 是(1)唯一最大局部轨道温和解.

注 2 定理1是经典的 Pazy 最大局部温和解存在唯一性定理的推广[文献23，定理6.1.4]).实际上对能由相应广义全局 Lipschitz 条件获得其各种全局解唯一存在的方程(如由 Lévy 过程或分数阶 Brownian 运动驱动的随机泛函发展方程等)，一般都可以用上面的方法得到其最大局部解存在唯一性定理.

定理 2 若定理1的所有条件成立，且

$$|\mathbb{T}(t,s)|_{\mathcal{L}(\mathbb{X})}\leqslant\mathcal{N}\mathrm{e}^{-\int_s^t r(u)\mathrm{d}u},\ \mathcal{N}\text{为正常数}, \tag{10}$$

其中 $r(\cdot):J\to\mathbf{R}_+$ 是有限可测函数且 $\sup_{0\leqslant t<a}\int_{t-\tau}^t r(s)\mathrm{d}s\equiv r<\infty$，$\sup_{t\in[0,a)}\mathrm{e}^{-\zeta\int_0^t r(s)\mathrm{d}s}t<\infty$ $(\zeta\in(0,1))$.假定有函数 $m_1(\cdot)\in L^1(\mathbf{R}_+;\mathbf{R}_+)$ 及常数 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\geqslant 0$ 使得

$$|f(t,u_t)|\leqslant m_1(t)\|u_t\|+\alpha_1,\ \sup_{t\in[0,a)}|G(t,0)|<\infty, \tag{11}$$

$$|g(t,u_t)|_{\mathcal{L}(U;\mathbb{Y})}\leqslant\alpha_2,\ |K(t,u_t)|_{\mathcal{L}(U;\mathbb{X})}\leqslant\alpha_3, \tag{12}$$

且有常数 $\sigma\in(0,1-\zeta)$ 和 $\pi\in(0,1)$ 使得

$$\kappa+\int_0^t[|\mathbb{T}(t,s)|_{\mathcal{L}(\mathbb{X})}m_1(s)+\kappa S(t,s)]\mathrm{e}^{\sigma\int_s^t r(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}s\leqslant\pi<1, \tag{13}$$

则式(1)有唯一全局轨道温和解 $u(t)$ 并有如下估计

$$|u(t)|\leqslant N\mathrm{e}^{-\lambda\int_0^t r(s)\mathrm{d}s}+\frac{I}{1-\pi},\quad t\in[-\tau,a), \tag{14}$$

其中 $I,\lambda\in(0,1-\zeta)$，$N>\mathcal{N}\|\xi\|$ 是正常数且

$$I=\sup_{0\leqslant t<a}\left\{\int_0^t[(\alpha_1+\alpha_3|\omega(s-t)|_U)\mathcal{N}\mathrm{e}^{-\int_s^t r(u)\mathrm{d}u}+S(t,s)(\alpha_2|\omega(s-t)|_U+|G(s,0)|)]\mathrm{d}s+|G(t,0)|\right\}<\infty. \tag{15}$$

证明 定理1已保证了(1)最大局部轨道温和解 $u(t)$ 的存在性.只要证明了估计(14)，自然就获得其轨道温和解 $u(t)$ 的全局存在性.按文献[2,14]的方式，对于 $\mu\geqslant 0$ 我们考虑 Wiener 转换 $\theta_{-t}\omega$，则有

$$u(\mu)=\mathbb{T}(\mu,0)[\xi(0)-G(0,\xi)]+g(\mu,u_\mu)\theta_{-t}\omega(\mu)+G(\mu,u_\mu)+\int_0^\mu\mathbb{T}(\mu,s)[f(s,u_s)-K(s,u_s)\theta_{-t}\omega(s)]\mathrm{d}s+\int_0^\mu\mathbb{T}(\mu,s)A(s)[g(s,u_s)\theta_{-t}\omega(s)+G(s,u_s)]\mathrm{d}s. \tag{16}$$

进而，

$$-\int_0^\mu\mathbb{T}(\mu,s)A(s)g(s,u_s)\omega(-t)\mathrm{d}s=\int_0^\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbb{T}(\mu,s)g(s,u_s)\omega(-t)\mathrm{d}s=$$

$$g(\mu,u_\mu)\omega(-t)-\mathbb{T}(\mu,0)g(0,u_0)\omega(-t)-\int_0^\mu \mathbb{T}(\mu,s)K(s,u_s)\omega(-t)\mathrm{d}s, \tag{17}$$

那么,由(2),(11),(12)及(17),有

$$|u(\mu)|\leqslant \mathcal{N}\mathrm{e}^{-\int_0^\mu r(s)\mathrm{d}s}|\xi(0)-G(0,\xi)|+ \alpha_2|\omega(\mu-t)|_U+\alpha_2\mathcal{N}\mathrm{e}^{-\int_0^\mu r(s)\mathrm{d}s}|\omega(-t)|_U+ \int_0^\mu\{[|\mathbb{T}(\mu,s)|_{\mathcal{L}(\mathbb{X})}m_1(s)+\kappa S(\mu,s)]\|u_s\|+ \alpha_1|\mathbb{T}(\mu,s)|_{\mathcal{L}(\mathbb{X})}\}\mathrm{d}s+\kappa\|u_\mu\|+|G(\mu,0)|+ \alpha_3\int_0^\mu \mathcal{N}\mathrm{e}^{-\int_s^\mu r(u)\mathrm{d}u}|\omega(s-t)|_U\mathrm{d}s+ \int_0^\mu S(\mu,s)[\alpha_2|\omega(s-t)|_U+|G(s,0)|]\mathrm{d}s. \tag{18}$$

在上式中取$\mu=t$并利用$\omega(0)=0$,有

$$|u(t)|\leqslant \mathcal{N}\mathrm{e}^{-\int_0^t r(s)\mathrm{d}s}|\xi(0)-G(0,\xi)|+ \alpha_2\mathcal{N}\mathrm{e}^{-\int_0^t r(s)\mathrm{d}s}|\omega(-t)|_U+\int_0^t\Big[|\mathbb{T}(t,s)|_{\mathcal{L}(\mathbb{X})}m_1(s)+ \kappa S(t,s)]\|u_s\|+\alpha_1\mathcal{N}\mathrm{e}^{-\int_s^t r(u)\mathrm{d}u}\Big]\mathrm{d}s+ \alpha_3\int_0^t\mathcal{N}\mathrm{e}^{-\int_s^t r(u)\mathrm{d}u}|\omega(s-t)|_U\mathrm{d}s+\kappa\|u_t\|+|G(t,0)|+ \int_0^t S(t,s)[\alpha_2|\omega(s-t)|_U+|G(s,0)|]\mathrm{d}s.$$

因为对任意$r<0$,$\sup\limits_{r\leqslant s\leqslant 0}|\omega(s)|_U$是亚线性的[2],那么必存在常数$d>0$与$I\geqslant 0$使得(15)成立且

$$\mathcal{N}\mathrm{e}^{-\int_0^t r(s)\mathrm{d}s}|\xi(0)-G(0,\xi)|+\alpha_2\mathcal{N}\mathrm{e}^{-\int_0^t r(s)\mathrm{d}s}|\omega(-t)|_U\leqslant d\mathrm{e}^{-(1-\zeta)\int_0^t r(s)\mathrm{d}s}. \tag{19}$$

结合(19)与(15),我们获得

$$|u(t)|\leqslant \kappa\|u_t\|+d\mathrm{e}^{-(1-\zeta)\int_0^t r(s)\mathrm{d}s}+ \int_0^t[|\mathbb{T}(t,s)|_{\mathcal{L}(\mathbb{X})}m_1(s)+\kappa S(t,s)]\|u_s\|\mathrm{d}s+I. \tag{20}$$

由条件(13),应用文献[14]的引理4.1(取其中$c(t)\equiv\kappa,\bar{t}=a$),我们获得式(14).

注3 定理2是文献[14]定理4.2与文献[23]引理13的推广.对中立型系统,自然能获得文献[23]引理13类似的吸引集.

显然定理1能应用如下脉冲中立型随机发展系统轨道温和解的存在性:

$$\begin{cases}\mathrm{d}[u(t)-G(t,u_t)]=[A(t)u(t)+f(t,u_t)]\mathrm{d}t+\\ \qquad g(t,u_t)\mathrm{d}W(t),\quad t\in[0,a),\quad t\neq t_k,\\ u(t_k^+)-u(t_k)=I_k(u(t_k)),I_k:\mathbb{X}\to\mathbb{X},\quad k\in\mathbf{N},\\ u(t)=\xi(t)\in PC,\quad t\in[-\tau,0],\quad \text{点集}\{t_k|t_k\in[0,t],\\ \qquad \forall t\in[0,a)\}\text{是有限集}.\end{cases} \tag{21}$$

定理3 在定理1的条件下,对任意$t\in[0,a)$,(1)的最大局部轨道温和解$u(t)=u(t,\xi)$有先验估计:

$$|u(t)|\leqslant L_\xi(t),\text{且}|I_k(u(t_k))|<\infty,t_k\in[0,a), \tag{22}$$

其中$L_\xi:[0,a)\to\mathbf{R}_+$且$\sup\limits_{s\in[0,t]}L_\xi(s)<\infty$.则(21)存在唯一全局轨道温和解$u(t)\in PC([0,a);\mathbb{X})$.

事实上,定理1及条件(22)的第一个不等式保证了(21)的轨道温和解$u(t)$在$[0,t_1]$上存在唯一.而(22)的第二个不等式保证了$u_{t_1^\dagger}\in PC$,同样地,(21)的轨道温和解$u(t)$在$[t_1,t_2]$存在唯一,重复上面的过程,我们能获得解$u(t)\in PC([0,a);\mathbb{X})$.

2 温和解

令(1)中初始函数$\xi\in PC_{\mathbb{E}}=\{\phi:[-\tau,0]\to\mathbb{X}$是逐段连续的随机过程且$E\|\phi\|^2<\infty\}$.其温和解由下面方程定义:

$$u(t)=\mathbb{T}(t,0)[\xi(0)-G(0,\xi)]+G(t,u_t)+ \int_0^t\mathbb{T}(t,s)f(s,u_s)\mathrm{d}s+\int_0^t\mathbb{T}(t,s)A(s)G(s,u_s)\mathrm{d}s+ \int_0^t\mathbb{T}(t,s)g(s,u_s)\mathrm{d}W(t),\text{a.s.} \tag{23}$$

定理4 若条件(S_1)成立,且对任意$b\in[0,a)$,

$$f(t,0)\in L^1([0,b];\mathbb{X}),g(t,0)\in L^2([0,b];L_2^0), G\in PC([0,a)\times PC;\mathbb{X}). \tag{24}$$

假设$f\in Lip^1_{[0,a)}[L_n^{\mathbb{X}}(t)]$,$g\in Lip^2_{[0,a)}[L_n^{L_2^0}(t)]$,$G\in Lip^1_{[0,a)}[L_\infty^{\mathcal{L}(\mathbb{X};\mathbb{Y})}\vee L_\infty^{\mathbb{X}}]$ ($L_\infty^{\mathbb{X}}<1$).则必定存在一个停时$\beta=\beta(\omega)\in(0,a]$使得方程(1)有唯一最大局部温和解$u(t)\in PC([0,\beta);\mathbb{X})$.进而如果(24)中最后一个条件被$G\in C([0,a)\times PC,\mathbb{X})$代替,则有$u(t)\in C([0,\beta);\mathbb{X})$.

证明 证明与定理1基本相同,除了空间$C_{T_1}^\xi$与算子Γ分别被下面$\mathcal{H}_{T_1}$与$\widetilde{\Gamma}$代替

$$\mathcal{H}_{T_1}=\{u\in C([0,T_1];\mathbb{X}):u(s)=\xi(s)\in PC_{\mathbb{E}}\},$$

$$\|u\|_{\mathcal{H}_{T_1}}=(\mathbb{E}\sup_{t\in[-\tau,T_1]}|u(t)|^2)^{1/2}<\infty;$$

$$\widetilde{\Gamma}(u)(t)-G(t,\widetilde{T}u_t)=\mathbb{T}(t,0)[\xi(0)-G(0,\xi)]+ \int_0^t\mathbb{T}(t,s)f(s,u_s)\mathrm{d}s+G(t,u_t)+ \int_0^t\mathbb{T}(t,s)A(s)G(s,u_s)\mathrm{d}s+ \int_0^t\mathbb{T}(t,s)g(s,u_s)\mathrm{d}W(s). \tag{25}$$

定理1是利用条件(S_2)将(1)中对布朗运动的微分转化为对t微分,布朗运动成为微分系数.这里是对方程(25)两边取数学期望后,建立类似于文献[13]引理3.2的不等式,将其中最后一个积分放大,化为普通积分.再利用处理确定性微分方程的技巧

来获得其解的存在性.这样空间 $\mathcal{H}_{T_1}$ 由数学期望定义的范数,在压缩映射下导出算子 $\tilde{T}$ 的不动点,只能几乎必然满足方程(23).

注 4 定理 4 同样推广了经典的 Pazy 定理[文献 23 定理 6.1.4])及文献[7-9,11-12]的相关工作. 结合文献[11-13]的方法,我们可获得方程(1)温和解全局存在唯一性相应的充分条件.

定理 5 令 $D=D(t,u_t)=u(t)-G(t,u_t)$. 在定理 4 的条件下,若有函数 $V\in C([-\tau,a)\times\mathbb{X};\mathbf{R}_+)$ 具有 $\lim\limits_{|D|\to\infty}[\inf\limits_{-\tau\leqslant t<a}V(t,u_t)]=\infty$ 使得(1)的最大局部温和解 $u(t)$ 满足先验估计

$$\mathbb{E}V(t,u(t))\leqslant L_{\xi}(t),\quad \forall t\in[0,a),\text{且}$$

$$\mathbb{E}|I_k(u(t_k))|<\infty,\quad t_k\in[0,a),\tag{26}$$

其中 $L_{\xi}(t)$ 的定义与定理 3 相同.则(21)有唯一全局温和解 $u(t)$ $(t\in[-\tau,a))$.

证明 定理 4 保证了(1)最大局部温和解 $u(t)$ 的存在性. 令

$$\|\varphi\|_{[a,b]}=\sup_{a\leqslant s\leqslant b}|\varphi(s)|,$$

$$\xi(\theta)\equiv\xi(-\tau)(\forall\theta\in[-2\tau,-\tau]),$$

我们有

$$\|D\|_{[-\tau,t]}\geqslant\|u\|_{[-\tau,t]}-\kappa\|u\|_{[-\tau,t]}-\|G(\cdot,0)\|_{[-\tau,t]},\quad t\in[0,a).$$

这就推得对任意 $t\in[0,a)$,

$$\|u\|_{[-\tau,t]}\leqslant\frac{1}{1-\kappa}\|D\|_{[-\tau,t]}+\|G(\cdot,0)\|_{[-\tau,t]}\triangleq N(\|D\|_{[-\tau,t]}).\tag{27}$$

运用(26)及 Chebyshev 不等式,对任意 $t\in[0,a)$,

$$P\{\omega:|u(t,\omega)|>N(n)\}\leqslant P(|D|>n)\leqslant\frac{\sup\limits_{s\in[0,t]}L(s)}{\inf_{s\in[0,a),|D|\geqslant n}V(s,u_s)}\to 0,\text{当 } n\to\infty.$$

这说明 $u(t)$ 在 $[-\tau,t_1]$ 几乎必然存在. 记 $\xi_k=u_{t_k^{\dagger}}$,则(26)的第二个不等式保证了

$$\mathbb{E}\|\xi_1\|=\mathbb{E}\|u_{t_1^{\dagger}}\|\leqslant\mathbb{E}\|u_{t_1}\|+\mathbb{E}|I_1(u(t_1))|<\infty,$$

即 $\xi_1\in PC_{\mathbb{E}}$. 重复上面的过程,我们能证明 $u(t)$ 在 $[t_k,t_{k+1}]$ $(k\in\mathbf{N})$ 上几乎必然存在且唯一.

注 5 通常研究稳定性、吸引性、有界性与矩估计等的结果一般都能保证定理 3 或定理 5 的条件成立[1-14],故其解的全局存在性是不言而喻的. 对于脉冲方程当 $|u(t)|$ 有界时,

$$|I_k(u(t))|<\infty\ (\forall t_k\in[0,a)),$$

则方程(21)解的全局存在性完全由其第一个方程的全局存在性决定.

注 6 运用文献[11-12]方法,我们同样可给出方程(21)温和解渐近估计类似的充分条件.

参考文献
References

[1] Bates P W,Lu K N,Wang B X.Random attractors for stochastic reaction-diffusion equations on unbounded domains[J].J Differential Equations,2009,246:845-869
[2] Bessaih H,Garrido-Atienza M J,Schmalfuss B.Pathwise solutions and attractors for retarded SPDES with time smooth diffusion cofficients[J].Disc Contin Dyn Syst,2014,34(10):3945-3968
[3] Liao X X,Mao X R.Exponential stability of stochastic delay interval systems[J].System Control Lett,2000,40:171-181
[4] Lu K N,Schmalfuss B.Invariant manifolds for stochastic wave equations[J].J Differential Equations,2007,236:460-492
[5] Mao X R. Stochastic differential equations and applications[M].2nd ed,Horwood,Chichester,2007
[6] Prato G D,Zabczyk J.Stochastic equations in infinite dimensions [M]. Cambridge: Cambridge University Press,1992
[7] Xu D Y,Li B,Long S J,et al.Moment estimate and existence for solutions of stochastic functional differential equations[J].Nonlinear Analysis,2014,108:128-143
[8] Xu D Y, Wang X H, Yang Z G. Existence-uniqueness problems for infinte dimensional stochastic differential equations with delays[J].J Appl Anal Comput,2012,2(4):449-463
[9] Xu D Y,Wang X H,Yang Z G.Further results on existence-uniqueness for stochastic functional differential equation[J].Sci China Math,2013,56:1169-1180
[10] Xu D Y,Yang Z G,Huang YM.Existence-uniqueness and continuation theorems for stochastic functional differential equations [J]. J Differential Equations, 2008, 245:1681-1703
[11] Xu D Y, Li B, Long S J, et al. Existence and moment estimates for solutions to neutral stochastic functional differential equations[J].Ann Diff Eqs,2014,30:62-84
[12] Teng L Y,Long S J,Xu D Y.On solvability of neutral stochastic functional differential equations with infinity delay [J]. Communications in Applied Analysis, 2014, 18:325-344
[13] Teng L Y,Xiang L,Xu D Y.Existence-uniqueness af the solution for neutral stochastic functional differential equations[J].Rocky Mountain J Math,2013,43(2):619-644
[14] Xu D Y,Zhou W S.Existence-uniqueness and exponential estimate of pathwise solutions and attractors for retarded stochastic evolution systems with time smooth diffusion coefficients [J]. Disc Contin Dyn Syst, 2017, 37:2161-2180
[15] Pazy A.Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations [M]. New York: Springer-Verlag,1983

Wellposedness and asymptotic behavior of neutral stochastic evolution systems

XU Daoyi[1]

1 Institute of Mathematics, Sichuan University Chengdu 610064

Abstract Some sufficient conditions are given for the existence-uniqueness and asymptotic estimate of the pathwise mild solutions and mild solutions of neutral stochastic evolution systems, which extend the classical Pazy theorem and some related main results in several recently references.

Key words stochastic evolution equations; neutral; impulsive; wellposedness; asymptotic behavior