DOI:10.13878/j.cnki.jnuist.2017.04.002

周正新[1]

微分系统的等价性及其应用研究综述

摘要

自 Mironenko 教授创建反射函数理论以来,人们采用该理论定义了微分系统间的新的等价关系,由此建立了复杂微分系统与简单微分系统、非自治微分系统与自治微分系统的等价性,应用它将复杂系统的几何性态的研究可转化为简单或自治系统的几何性态的研究.经过专家们的共同研究取得了若干极具理论和应用价值的好成果.

关键词

反射函数;等价性;几何性态;反射积分

中图分类号 0175.12

文献标志码 A

收稿日期 2017-03-08

资助项目 国家自然科学基金(61374010,11571301);江苏省自然科学基金(BK20161327);扬州大学教改基金(YZUJX2016-4A)

作者简介

周正新,女,博士,教授,主要研究方向微分系统理论及其应用.zxzhou@yzu.edu.cn

1 扬州大学 数学科学学院,扬州,225002

0 引言

众所周知,研究客观世界中一些物体的运动规律,可归结为研究微分系统

$$x' = X(t,x),\quad t \in \mathbf{R},\quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n \tag{1}$$

解的定性性态.在一般情况下,微分系统(1)为不可积系统,而实际问题需要我们去研究其解的性态,那只能直接根据函数 $X(t,x)$ 本身来研究.当系统(1)为自治系统,特别为多项式系统时,其解的定性和稳定性态的研究已经取得了丰富的成果[1-5].对于一般时变微分系统,其周期解的存在性、个数及稳定性是一个很重要的问题.Poincaré 曾说过:“这些周期解的重大意义在于,它是唯一缺口,通过它我们方可步入那些被认为不可达到的领域.”当(1)为 2ω -周期系统时,在研究其周期解的性态的过程中,Poincaré 映射起着很大的作用[6-8].若 $\varphi(t;\tau,x)$ 为(1) 过(t,τ) 的解,则周期系统(1)的 Poincaré 映射 T 可定义为 $T(x) = \varphi(\tau + 2\omega;\tau,x)$, $\forall \tau \in \mathbf{R}$.由此看来,似乎给我们这样一种错觉,好像也只有在系统(1)的通解表达式已知的情况下,方可找到其 Poincaré 映射,其实不然.为了寻找 Poincaré 映射,我们可以借助适当的辅助函数,它不是处处等于系统(1)的通解 $\varphi(t;\tau,x)$,而仅仅是在超平面 $t = \tau$ 和 $t = \tau + 2\omega$ 上相等.若这样的函数能找出,那同时系统(1)的 Poincaré 映射就找到了.Mironenko 在文献[7-8]中建立了一个被称为反射函数的函数,人们可以借此来建立周期系统的 Poincaré 映射,这给研究周期系统解的性态开辟了一条新的道路.应用反射函数理论研究微分系统解的性态,目前国内外已有许多专家在此方面做了深入研究并取得了丰富的结果.Mironenko[7-8]创建了反射函数理论,并应用反射函数理论研究了微分系统的等价性、奇偶性及系统解的一些几何性态,建立了微分系统的各种等价关系,研究了微分系统积分流型及嵌入系统解的性态[9-17];Verecovich[18-19]研究了非自治二次微分系统与线性系统的等价性;Alisevich[20-21]研究了微分系统具有三角型、线性等特殊类型的反射函数的充要条件;Musafirov[22-23]研究了线性微分系统的相关性质,给出微分系统具有指数形式反射函数的充要条件;Maiorovskya[24-25]研究了微分系统解的有界性以及具有线性反射函数的二次微分系统;Varenikova[26]研究了非自治二维微分系统与其相应的线性近似方程组的等价性问题,并给出系统边值问题的解的定性性态;Bel'skii[27-28]研究了多项式方程和二次多项式微分系

统的等价性;Zhou 等[29-41]研究了微分系统反射函数的结构及微分系统间的等价性,并利用所得结论研究了一些复杂微分系统解的定性性态,应用反射函数法研究了平面系统的中心焦点问题及微分方程的可积性问题.

1 反射函数的定义及性质[7-8]

考虑微分系统(1),假设 $X(t,x)$ 有连续的偏导数,其 Cauchy 问题的解为 $\varphi(t;\tau,x)$, I_x 为解 $\varphi(t;0,x)$ 的存在区间.记 $\bar{I}_x=\{t\mid -t\in I_x\}$;$D=\{(t,x)\mid x\in\mathbf{R}^n,t\in I_x\cap\bar{I}_x\}$.

定义 1 称可微函数 $F(t,x)=\varphi(-t;t,x)$, $(t,x)\in D$ 或者 $F(t,x)=\varphi_{(-t,t)}(x)=\varphi(-t;0,\varphi(0;t,x))$ 为微分系统(1)的反射函数.

反射函数具有下列性质:

1) 对微分系统(1)的任一解 $x(t)$, $t\in I,t_0\in I$ 有 $F(t,x(t))\equiv x(-t)$;

2) 对任一反射函数 F 有恒等式 $F(-t;F(t,x))\equiv F(0,x)\equiv x$;

3) 可微函数 $F:D\to\mathbf{R}^n$ 为微分系统(1)的反射函数,当且仅当,它为偏微分方程

$$\begin{cases}F_t+F_xX(t,x)+X(-t,F)=0,\\F(0,x)\equiv x\end{cases}\tag{2}$$

的解.

引理 1(基本引理) 若 $X(t+2\omega,x)=X(t,x)$,则微分系统(1)的 Poincaré 映射 $T(x)$ 可以定义为 $T(x)=F(-\omega,x)=\varphi(\omega;-\omega,x)$,从而系统(1)的解 $\varphi(t;-\omega,x)$ 为 2ω-周期解,当且仅当 x 为方程 $F(-\omega,x)=x$ 的解.

2 等价性及相关结论

定义 2[7-8] 若微分系统

$$\dot{x}=Y(t,x)\tag{3}$$

与微分系统(1)具有相同的反射函数,则称它们是等价的.具有相同反射函数的微分系统称为同一等价类.

定理 1[7-8] 微分系统(3)等价于(1),当且仅当,(3)可表示为

$$\dot{x}=Y(t,x)=X(t,x)+F_x^{-1}R(t,x)-R(-t,F),\tag{4}$$

这里 F 为(1)的反射函数,R 为任意连续可微函数,且保证(4)的右端关于 x 连续可微.

定理 2[7-8] 若微分系统(1)为 2ω-周期系统,且它与微分系统(3)等价,它们的解在 $[-\omega,\omega]$ 上存在,则系统(1)的 2ω-周期解与系统(3)满足 $x(-\omega)=x(\omega)$ 的解一一对应.

推论 1[7-8] 若微分系统(1)为 2ω-周期系统,它与(3)等价,且它们的解在 $[-\omega,\omega]$ 上存在,则系统(1)的 2ω-周期解 $\varphi(t;-\omega,x)$ 与(3)的 2ω-周期解 $\psi(t;-\omega,x)$ 相对应.

定理 3[7-8] 若微分系统(1)与某一自治系统等价,则该自治系统为 $\dot{x}=X(0,x)$.

定义 3[7-8] 称微分系统

$$\dot{x}=-(F_x+E)^{-1}F_t\tag{5}$$

为以 $F(t,x)$ 为反射函数的最简单系统.

由定理 2 知,任何以 $F(t,x)$ 为反射函数的微分系统均可表示为

$$\dot{x}=-(F_x+E)^{-1}F_t+F_x^{-1}R(t,x)-R(-t,F(t,x)).\tag{6}$$

注 1 要研究以 $F(t,x)$ 为反射函数的微分系统等价类中的微分系统解的性态,只需研究该类中最简单系统解的定性性态.由此我们可以用自治系统解的性态去研究非自治系统解的定性性态,用简单微分系统去研究复杂系统解的性态.

问题 1 如何判定任意两个系统等价?

一般情况下,通过求解偏微分方程(2)以获得反射函数 $F(t,x)$ 的表达式是非常困难的.但是 Mironenko[7-8]、Alisevich[20-21]、Musafirov[22-23]、Zhou[29-33]等还是做了很大努力,研究了微分系统具有线性、三角型、对称型等各种特殊类型的反射函数的充分条件,并应用他们研究了若干非自治微分系统解的定性性态.

问题 2 若(1)的反射函数未知,又如何来判定(1)(3)等价?

Mironenko 倾注了若干精力,写了 4 篇文章[13-16]回答了这个问题.笔者等[39-41]对他们的结果进行了推广.

定义 4[39] 称满足方程

$$\Delta_t+\Delta_xX=X_x\Delta\tag{7}$$

的非零解向量函数 $\Delta(t,x)$ 为微分系统(1)的反射积分.

定理 4[14] 若向量函数 $\Delta(t,x)$ 为(1)的反射积分,则微分系统(1)等价于微分系统

$$\dot{x}=X(t,x)+\alpha(t)\Delta(t,x),\tag{8}$$

其中 $\alpha(t)$ 为任意连续可微的纯量奇函数.

推论 2[14] 设 $\Delta_k(t,x)$ 为(1)的反射积分,则微分系统(1)等价于微分系统

$$\dot{x}=X(t,x)+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(t)\Delta_k(t,x),$$

其中 $\alpha_k(t)$ $(k=1,2,\cdots)$ 为任意连续可微的纯量奇函数,且上述微分系统的右端收敛于一个连续可微函数.

注 2 由定理 4 看出,要写出与(1)等价的微分系统,只需要求出其反射积分即可.

Bel'skii[27-28]研究了与 Riccati 方程、Abel 方程及一般多项式方程的反射积分和等价性. Zhou 等[33-41]研究了几类微分系统间的等价性关系,并应用所得结果研究了这类系统周期解的定性性态.

3 反射积分的结构

在求反射积分之前,我们先得搞清楚它具有什么样的结构形式.

定理 5[27] 若 $\Delta(t,x)=\sum_{i=0}^{m}r_i(t)x^i$ 为多项式微分方程 $x'=\sum_{i=0}^{n}a_i(t)x^i$ 的反射积分,则 $m=n$.

定理 6[39] 设 $u_i(t,x)(i=1,2,\cdots,n)$ 为(1) 的 n 个独立首次积分,则向量函数 $\Delta(t,x)$ 为(1) 的反射积分的充要条件是,存在连续可微的向量函数 $\alpha(U)(U=(u_1,u_2,\cdots,u_n))$ 使得 $\Delta=U_x^{-1}\alpha(U)$.

特别地,对于一维($n=1$) 的微分方程,我们有下面结论:

定理 7[39] 若函数 $\Delta(t,x)$ 为微分方程($n=1$) 的反射积分,则 $\mu=\dfrac{1}{\Delta}$ 为(1) 的积分因子,且 $u=\int_{x_0}^{x}\dfrac{1}{\Delta(t,x)}\mathrm{d}x-\int_{t_0}^{t}\dfrac{X(t,x_0)}{\Delta(t,x_0)}\mathrm{d}t$ 为(1)的首次积分.

定理 8[39] 若函数 $\Delta_1(t,x)$ 为(1)($n=1$) 的反射积分,则函数 $\Delta_2(t,x)$ 也是(1) 的反射积分的充要条件是存在连续可微函数 φ 使得 $\Delta_2(t,x)=\Delta_1(t,x)\varphi(u)$,其中 $u=u(t,x)$ 为(1)的首次积分.

注 3 定理 7 和定理 8 告诉了我们一个微分方程的任意两个反射积分之间的关系,及反射积分与首次积分及积分因子之间的关系,这意味着求反射积分,不但对研究微分系统的等价性至关重要,同时对研究微分系统的可积性也具积极意义.

例 1 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{x^2\cos t}{2+2x\sin t+x^2\sin^2 t}\tag{9}$$

具有两个反射积分:

$$\Delta_1=\frac{(1+x\sin t)^2}{1+(1+x\sin t)^2},$$

$$\Delta_2=\frac{(1+x\sin t)(2+x\sin t)}{1+(1+x\sin t)^2}x,$$

则由定理 7 和定理 8 知,$\mu_1=\dfrac{1}{\Delta_1}$,$\mu_2=\dfrac{1}{\Delta_2}$ 为(9)的两个积分因子,$u=\dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}=\dfrac{2+x\sin t}{1+x\sin t}x$ 为微分方程(9)的首次积分.

笔者在文献[39]中将 Mironenko 的定理 6 进行了深入推广,得到了(1)的更广泛的等价微分系统类,及等价系统的结构形式,并且得到了与自治系统等价的自治系统类,在后面将会看到,这个结论在研究 Poincaré 中心焦点问题中有着很有意义的应用.

定理 9 微分系统(3)等价于(1),当且仅当,(3)可表示为

$$\dot{x}=X(t,x)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(t,U)\Delta_k(t,x),$$

其中向量函数 $\Delta_k(t,x)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 为(1)的 n 个线性无关的反射积分,$U(t,x)=C$ 为(1)的通积分,且 $\det U_x\neq 0$,$\alpha(t,U)$ 为连续可微的纯量函数且 $\alpha(t,U)+\alpha(-t,U)=0$.

注 4 这个定理完全地告诉我们与(1)等价的微分系统的结构形式,及这些反射积分 $\Delta_k(t,x)$ 之间的关系.

推论 3 一阶微分方程(3)等价于(1)($n=1$),当且仅当,(3)可表示为

$$\dot{x}=X(t,x)+\alpha(t,u)\Delta(t,x),$$

其中函数 $\Delta(t,x)$ 为微分方程(1)($n=1$) 的反射积分,且 $u=\int_{x_0}^{x}\dfrac{1}{\Delta(t,x)}\mathrm{d}x-\int_{t_0}^{t}\dfrac{X(t,x_0)}{\Delta(t,x_0)}\mathrm{d}t$ 为(1)的首次积分,$\alpha(t,u)$ 为连续可微的纯量函数且 $\alpha(t,u)+\alpha(-t,u)=0$.

注 5 这个推论不但回答了与一个一阶微分方程等价的方程的结构形式,同时还揭示了反射积分与首次积分之间的关系.

例 2 由推论 3 可得,与微分方程(9)等价的微分方程均可表示为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{x^2\cos t}{2+2x\sin t+x^2\sin^2 t}+\alpha(t,u)\frac{(1+x\sin t)^2}{1+(1+x\sin t)^2}.\tag{10}$$

取 $\alpha=\lambda u^2\sin t$,方程(10)变为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{x^2\cos t}{2+2x\sin t+x^2\sin^2 t}+\lambda\sin t\frac{(2+x\sin t)^2}{1+(1+x\sin t)^2}x^2,$$

该方程的通积分为

$$(1+x\sin t)-(c+\lambda\cos t)(2+x\sin t)x=0,$$

其中 c 为任意常数.

4 等价性的应用

在微分系统定性理论的研究过程中,中心焦点的判定是一个极为重要的研究课题.焦点量的阶数决定了在微小扰动下奇点邻域内极限环的个数,中心焦点的判别也与研究 Hilbert 第 16 问题密切相关.经过国内外数学工作者的不懈努力,二次多项式系统以及一些特殊三次系统的中心焦点问题被解决[42-43].虽然,对于平面 n 次多项式系统,根据 Hilbert 有限基定理,其中心焦点的判定必定可以在有限步内解决,但是随着阶数的增加,焦点量的计算也就更为复杂,一般的三次微分系统焦点量的计算至今尚未完全解决.目前国内外数学家大多通过将三次系统特殊化来研究某些特殊三次系统中心焦点,并取得一些重要的结论[2-3,5].

我们知道微分系统

$$\begin{cases} x'=-y+\sum\limits_{k=2}^{n}P_k(x,y)=P(x,y), \\ y'=x+\sum\limits_{k=2}^{n}Q_k(x,y)=Q(x,y), \end{cases} \tag{11}$$

其中

$$P_k(x,y)=\sum_{i+j=k}a_{ij}x^iy^j,$$

$$Q_k(x,y)=\sum_{i+j=k}b_{ij}x^iy^j,\quad a_{ij},b_{ij}\text{ 为常数}.$$

在极坐标 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$ 下该系统(11)化为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\sum\limits_{k=2}^{n}A_k(\theta)r^k, \\ \dfrac{d\theta}{dt}=1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}B_k(\theta)r^k, \end{cases} \tag{12}$$

其中

$$A_k(\theta)=\cos\theta P_k(\cos\theta,\sin\theta)+\sin\theta Q_k(\cos\theta,\sin\theta),$$

$$B_k(\theta)=\cos\theta Q_k(\cos\theta,\sin\theta)-\sin\theta P_k(\cos\theta,\sin\theta).$$

由(12)得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}A_k(\theta)r^k}{1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}B_k(\theta)r^k}=R(\theta,r). \tag{13}$$

由文献[42-43]知,微分系统(11)以(0,0)为中心,当且仅当,方程(13)以 $r=0$ 为中心,即,方程(13)在 $r=0$ 附近全是周期解.我们知道研究(13)是否以 $r=0$ 为中心,已有若干方法可实施,例如经典的有 Poincaré 后继函数法、Lyapunov 形式幂级数法、不变代数曲线法等[1-3,5,42-43].笔者在文献[35]中首次介绍了如何应用反射函数法研究中心焦点问题,并阐述了这个新方法与传统方法的优势;在文献[41]中应用这个方法给出了具有一般形式的三次微分系统的中心条件.根据定理 2,与微分方程(13)等价的 2π-周期方程的周期解的个数及稳定性态相同.

设方程(13)以 $r=0$ 为中心.

1)若我们能求出(13)的反射函数 $F(\theta,r)$,则与(13)等价的微分方程均可表示为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=R(\theta,r)+F_r^{-1}(\theta,r)G(\theta,r)-G(-\theta,F(\theta,r)), \tag{14}$$

其中 $G(\theta,r)$ 为任意连续可微函数.若方程(14)为 2π-周期方程,且 $r=0$ 为其解,则方程(14)也以 $r=0$ 为中心.

2)若我们能求出(13)的一个反射积分 $\Delta(\theta,r)$,则与(13)等价的微分方程均可表示为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=R(\theta,r)+\alpha(\ ,u)\Delta(\theta,r), \tag{15}$$

其中 $\alpha(\theta,u)+\alpha(-\theta,u)=0$,且保证(15)的解存在唯一.

$$u=u(\theta,r)=\int_{(\theta_0,r_0)}^{(\theta,r)}\frac{1}{\Delta(\theta,r)}\mathrm{d}r-\frac{R(\theta,r)}{\Delta(\theta,r)}\mathrm{d}\theta$$

为(13)的首次积分.若方程(15)为 2π-周期方程,且 $r=0$ 为其解,则它也以 $r=0$ 为中心.

由 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,从(14)、(15)分别推得相对应的微分系统:

$$\begin{cases} x'=P(x,y)+\cos\theta(F_r^{-1}G(\theta,r)- \\ \qquad G(-\theta,F(\theta,r))), \\ y'=Q(x,y)+\sin\theta(F_r^{-1}G(\theta,r)- \\ \qquad G(-\theta,F(\theta,r))), \end{cases} \tag{14'}$$

$$\begin{cases} x'=P(x,y)+\cos\theta\alpha(\theta,u(\theta,r))\Delta(\theta,r), \\ y'=Q(x,y)+\sin\theta\alpha(\theta,u(\theta,r))\Delta(\theta,r) \end{cases} \tag{15'}$$

以(0,0)为中心,这里 $\theta=\arctan\dfrac{y}{x},r=\sqrt{x^2+y^2}$.

由此看出,从一个系统(11)的中心性质,通过等价性,我们知道了无穷个等价系统(14')和(15')也以(0,0)为中心,而且这些系统也不一定是多项式微分系统,这显示应用反射函数的等价性来研究中心

问题具有有别于其他传统方法更有利的优越性.

例 3 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\frac{r^2\cos\theta}{2+2r\sin\theta+r^2\sin^2\theta} \tag{16}$$

具有反射函数 $F(\theta,r)=\dfrac{r}{1+r\sin\theta}$,$F(-\pi,r)\equiv r$,则由引理 1,该方程以 $r=0$ 为中心,则相对应的三次微分系统

$$\begin{cases}x'=-y+\dfrac{1}{2}x^2-y^2-\dfrac{1}{2}y^3,\\ y'=x+\dfrac{3}{2}xy+\dfrac{1}{2}xy^2.\end{cases} \tag{16'}$$

以(0,0)为中心.

又由定理 1 和推论 3 和例 1 知,与(16)等价的微分方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\frac{r^2\cos\theta}{2+2r\sin\theta+r^2\sin^2\theta}+(1+r\sin\theta)^2G(\theta,r)-G\left(-\theta,\frac{r}{1+r\sin\theta}\right), \tag{17}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\frac{r^2\cos\theta}{2+2r\sin\theta+r^2\sin^2\theta}+\alpha(\theta,u)\frac{(1+r\sin\theta)^2}{1+(1+r\sin\theta)^2}, \tag{18}$$

这里 $u=\dfrac{2+r\sin\theta}{1+r\sin\theta}r$.

取 $G=\dfrac{r^{2k-1}}{(1+r\sin\theta)(1+(1+r\sin\theta)^2)^k}$,$k\geqslant 1$,式(17)变为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=(r^2\cos\theta(1+(1+r\sin\theta)^2)^{k-1}+r^{2k-1}(1+r\sin\theta-(1+r\sin\theta)^2))/(1+(1+r\sin\theta)^2)^k, \tag{17'}$$

则与此相对应的平面系统

$$\begin{cases}x'=\left(-y+\dfrac{1}{2}x^2-y^2-\dfrac{1}{2}y^3\right)\left(1+y+\dfrac{1}{2}y^2\right)^{k-1}-\dfrac{1}{2^k}xy(x^2+y^2)^{k-1}(1+y),\\ y'=\left(x+\dfrac{3}{2}xy+\dfrac{1}{2}xy^2\right)\left(1+y+\dfrac{1}{2}y^2\right)^{k-1}-\dfrac{1}{2^k}y^2(x^2+y^2)^{k-1}(1+y)\end{cases} \tag{17''}$$

以(0,0)为中心.取 $k=1$ 得三次系统

$$\begin{cases}x'=-y+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}xy-y^2-\dfrac{1}{2}xy^2-\dfrac{1}{2}y^3,\\ y'=x+\dfrac{3}{2}xy-\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{1}{2}xy^2-\dfrac{1}{2}y^3\end{cases} \tag{19}$$

也以(0,0)为中心.

取 $\alpha=\lambda u^2\sin\theta$,相对应方程(18)的四次平面微分系统

$$\begin{cases}x'=-y+\dfrac{1}{2}x^2-y^2-\dfrac{1}{2}y^3+\dfrac{1}{2}xy(2+y)^2,\\ y'=x+\dfrac{3}{2}xy+\dfrac{1}{2}xy^2+\dfrac{1}{2}y^2(2+y)^2\end{cases} \tag{18'}$$

也以(0,0)为中心.

由例 3 可看出,一旦知道一个系统以(0,0)为中心,同时我们就知道了与此等价的无穷个微分系统以(0,0)为中心.这充分说明研究两个微分系统的等价性的重要性.由前述可知,要研究与(1)等价的微分系统类,关键是求出反射函数或反射积分,而且研究反射积分与研究微分系统的可积性密切相关,目前这方面的工作还不太多,希望有兴趣的同行来研究这些问题.

参考文献

References

[1] 张锦炎.常微分方程几何理论与分支问题[M].北京:北京大学出版社,1981
ZHANG Jinyan. Geometric theory and bifurcation problems of ordinary differential equations[M].Beijing:Peking University Press,1981

[2] 叶彦谦.多项式微分系统定性理论[M].上海:上海科学出版社,1995
YE Yanqian.Qualitative theory of polynomial differential systems[M].Shanghai:Shanghai Science Press,1995

[3] 张芷芬,丁同仁,黄文灶,等.微分方程定性理论研究[M].北京:科学出版社,1985
ZHANG Zhifen,DING Tongren,HUANG Wenzao,et al. Research on qualitative theory of differential equations[M].Beijing:Science Press,1985

[4] 廖晓昕.稳定性的理论、方法和应用[M].武汉:华中师范大学出版社,2001
LIAO Xiaoxin. Theory, methods and applications of stability[M]. Wuhan: Huazhong Normal University Press,2001

[5] 刘一戎,李继彬.平面向量场的若干经典问题[M].北京:科学出版社,2010
LIU Yirong,LI Jibin.Some classical problems of plane vector field[M].Beijing:Science Press,2010

[6] 周正新.微分系统的反射函数理论及其应用[M].北京:机械工业出版社,2014
ZHOU Zhengxin.The theory of reflecting function of differential equations and applications[M].Beijing:China

Machine Press,2014

[7] Mironenko V I.Reflective function and periodic solution of the differential system[M].Minsk:Minsk University Press,1986

[8] Mironenko V I.Analysis of reflective function and multivariate differential system[M].Gomel:Gomel University Press,2004

[9] Mironenko V I.A method that allows one to determine the initial data of periodic solutions of differential systems and to compare the mappings for a period[J].Differentsialnye Uravneniya,1980,14(11):1985-1994

[10] Mironenko V I.Reflecting function and classification of periodic differential systems [J]. Differentsialnye Uravneniya,1984,20(9):1603-1610

[11] Mironenko V I.Simple systems and periodic solutions of differential equations[J].Differentsialnye Uravneniya,1989,25(12):2109-2114

[12] Mironenko V I.Method of reflective function for boundary problem[J].Differentsialnye Uravneniya,1996,32(8):774-779

[13] Mironenko V I.A reflecting function of a family of functions[J].Differentsialnye Uravneniya,2000,36 (12):1794-1800

[14] Mironenko V I.Time symmetry preserving perturbations of differential systems [J]. Differentsialnye Uravneniya,2004,40(10):1395-1403

[15] Mironenko V I, Mironenko V V. Time symmetry preserving perturbations of systems, and Poincare mapping [J]. Differentsialnye Uravneniya, 2008, 44 (10):1347-1352

[16] Mironenko V I,Mironenko V V.How to construct equivalent differential systems [J]. Applied Mathematics Letters,2009,22(3):1356-1359

[17] Mironenko V V.Even integrals of differential systems[J].Dokl Nats Akad Nauk Belarusi,2003,47 (4):34-37

[18] Verecovich P P.Nonautonomous second order quadric system equivalent to linear system[J].Differentsialnye Uravneniya,1998,34(12):2257-2259

[19] Verecovich P P. Nonautonomous two-dimensional quadratic systems that are equivalent to linear systems [J]. Differentsialnye Uravneniya, 1998, 34 (10):1420-1422

[20] Alisevich L A.On linear system with triangular reflective function[J].Differentsialnye Uravneniya,1989,25(3):1446-1449

[21] Alisevich L A.Differential system with linear diagonal reflective function[J].Sci.Rep.Belarus.,1983,27:4-5

[22] Musafirov E V.Simplicity of linear differential systems [J].Differentsialnye Uravneniya,2002,38(4):605-607

[23] Musafirov E V.Differential systems,the mapping over period for which is represented by product of three exponential matrixes [J].Journal of Mathematical Analysis & Applications,2007,329(1):647-654

[24] Maiorovskaya S V. The inverting function and boundedness of solutions of differential systems [J].Differentsialnye Uravneniya,2000,36(1):156-158

[25] Maiorovskaya S V.Quadratic systems with a linear reflecting function [J].Differentsialnye Uravneniya,2009,45(2):271-273

[26] Varenikova E V.Reflecting function and solutions of two-point boundary value problems for nonautonomous two-dimensional differential systems [J]. Differentsialnye Uravneniya,2012,48(1):147-152

[27] Bel'skii V A.On the construction of first-order polynomial differential equations equivalent to a given equation in the sense of having the same reflecting function [J].Differentsialnye Uravneniya,2012,48(1):11-18

[28] Bel'skii V A.On quadratic differential systems with equal reflecting functions [J]. Differentsialnye Uravneniya,2013,49(12):1639-1644

[29] Zhou Z X. On the Poincaré mapping and periodic solutions of nonautonomous differential systems[J].Communications on Pure & Applied Analysis,2007,6(2):541-547

[30] Zhou Z X. The structure of reflecting function of polynomial differential systems[J].Nonlinear Analysis,2009,71(1):391-398

[31] Zhou Z X.The reflective function represented by three exponential matrixes [J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society,2010,47(1):53-61

[32] Zhou Z X.Research on the properties of some planar polynomial differential equations [J].Applied Mathematics & Computation,2012,218(9):5671-5681

[33] Zhou Z X.Subharmonic solutions of Hill's equation[J].Applied Mathematics & Computation, 2015, 253 (C):17-22

[34] Zhou Z X.On the first symmetry and periodicity of solutions of differential systems[J].Nonlinear Analysis:Real Word Applications,2014,17(1):64-70

[35] Zhou Z X.A new method for research on the center-focus problem of differential systems[J].Abstract and Applied Analysis,2014(2):1-5

[36] Zhou Z X.On the equivalence of differential systems[J].Math Anal Appl,2012,2(2):241-249

[37] Zhou Z X,Tai R C,Wang F,et al.On the equivalence of differential equations [J].Journal of Applied Analysis & Computation,2014,4(1):103-114

[38] Zhou Z X.On the first integral and equivalence of nonlinear differential equations[J].Applied Mathematics & Computation,2015,268(C):295-302

[39] Zhou Z X.On the structure of the equivalent differential systems and their reflecting integrals [J]. Bulletin Brazilian Mathematical Society,2016:1-9

[40] Zhou Z X.On the equivalence and qualitative behavior of the rational differential equations[J].Filomat,Accepted

[41] Zhou Z X,Mao F F,Yan Y X.Research on the Poincaré center-focus problem of some cubic differential systems by using a new method[J].Advances in Differences Equations,2017,DOI:10.1186/s13662-017-1107-4

[42] Alwash M A M,Lloyd N G.Periodic solutions of a quartic nonautonomous equation[J].Nonlinear Analysis,1987,11(7):809-820

[43] Devlin J,Lloyd N G,Pearson I M.Cubic systems and Abel equations [J].Journal of Differential Equations,1998,147(2):435-454

A survey of equivalence of differential systems and its applications

ZHOU Zhengxin[1]
1 School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou 225002

Abstract A relation of equivalence for the differential systems has been found since the establishment of reflecting theory by Professor Mironenko. Then the equivalence between complicated systems and simple systems, between nonautonomous differential systems and autonomous differential systems has been established, which can be employed to study the qualitative behavior of a complicated or nonautonomous differential system by discussing a simple or autonomous differential system. Many good results with theoretical and practical value have been obtained by researchers.

Key words reflecting function; equivalence; geometric property; reflecting integral