DOI:10.13878/j.cnki.jnuist.2017.04.001

卢剑权[1]　李海涛[2]　刘洋[3]　李芳菲[4]　曹进德[1]

矩阵半张量积方法在逻辑网络和相关系统中的应用综述

摘要

本文介绍了近期关于逻辑网络及其应用的一些最近的结果,包括逻辑网络的背景、矩阵半张量积(STP)的新矩阵乘积的理论、逻辑网络的一些基本研究以及一些当前的重要工作.特别介绍了逻辑网络的一些基本问题,比如可控性、可观性、稳定性、镇定、同步、最优控制以及扰动解耦等.由于在处理逻辑网络问题方面具有很大的潜力和优势,STP 方法被海内外很多学者关注并将其用于相关问题的研究.目前,一些新的领域被广泛研究,包括牵引控制、函数扰动、系统解耦、输出追踪、符号动力学等.本文主要对基于 STP 方法研究逻辑网络以及 STP 方法的其他相关应用进行了综述.

关键词

矩阵半张量积;逻辑网络;布尔网络

中图分类号　TP13

文献标志码　A

收稿日期　2017-03-08

资助项目　国家自然科学基金(61573102,11671361,61374065,61403139,61503225)

作者简介

卢剑权,男,博士,教授,博士生导师,主要研究布尔控制网络、复杂动态网络、多智能体系统等.jqluma@ seu.edu.cn

其他作者简介见正文后.

1　东南大学　数学学院,南京,210096

2　山东师范大学　数学与统计学院,济南,250014

3　浙江师范大学　数理与信息工程学院,金华,321004

4　华东理工大学　理学院,上海,200237

0　逻辑网络的背景介绍

0.1　引言

逻辑网络是一种离散时间非线性系统,它的状态、输入和输出都只能取有限值.逻辑网络动力学的主要特点是无参数的,因此逻辑网络可以用来对大规模系统进行建模和分析.逻辑网络在系统生物学[1]、博弈论[2]、数字电路[3]、模糊控制[4]、有限自动机[5]、信息安全[6]等方面都有着广泛的应用.

当状态、输入和输出都只能取两个值的时候,逻辑网络就是布尔网络.布尔网络是在 1969 年第一次由 Kauffman 提出的,并被用于研究基因调控网络[1].自此,布尔网络引起了很多学者的研究兴趣.在 2002 年,Shmulevich 等[7]为了对基因调控网络的不确定性进行建模,将确定性布尔网络推广了到概率布尔网络.最近的一些工作研究了布尔网络带有其他特性的动力学性质,包括时滞、脉冲效应、切换现象、奇异结构以及异步行为[8-27].

在已有文献中,存在几种不同的方法来表征布尔网络的动态行为.例如,计算代数几何方法在文献[28]中被用来识别吸引子;文献[29-30]提出了利用符号动力学的方法来研究布尔网络;文献[8-9]提出了一种新的矩阵乘法,即半张量积(STP),这种新的矩阵乘法可以将布尔网络系统转化为等价的代数形式的离散时间线性系统,与计算代数几何方法和符号动力学方法相比较,STP 方法在研究布尔网络的控制问题以及其他问题上更加方便和系统.

通过利用 STP 方法,人们研究了布尔网络的一些理论问题,包括稳定性[15,31-39]、镇定性[40-54]、可控性[13-14,25,55-71]、可观性[72-83]、扰动解耦[84-88]、同步[10-12,89-107]、输出跟踪[108-112]、故障检测[113-115]、分解[116-120]、鲁棒控制[121-122]和最优控制[123-133]等问题.基于 STP 方法研究布尔控制网络的一些结果请参照文献[134-136].然而,文献[137]证明了布尔网络的控制问题是一个 NP 困难问题,这意味着不能建立一个多项式算法去研究布尔网络的控制问题.因此,如何降低现有算法的计算复杂度是一个具有挑战性的问题.在文献[138-139]中,Zhao 等提出了一种聚合算法来研究大规模的布尔网络;在文献[140]中,Li 等通过利用逻辑矩阵分解的方法去寻找大规模布尔网络的吸引子;Meng

等[141]研究了基于 l_1 增益布尔网络的模型降阶问题.

STP 方法也被用于分析和控制多值逻辑网络和混合值逻辑网络[142-146].Zhao 等[147]提出了一种用于研究多值逻辑网络最优控制的有效方法;文献[148]利用 STP 方法和符号动力学方法研究了高阶 k 值逻辑控制网络的可逆性;文献[149]研究了多值逻辑网络的稳定性和镇定性;文献[150-154]研究了混合值逻辑网络的可达性、干扰解耦和最优控制问题;文献[127,155-157]分析了相同层次混合值逻辑控制网络的可控性和同步性;文献[158]研究了奇异混合值逻辑网络的拓扑结构和最优控制问题;文献[159]提出了关于混合值逻辑网络的反馈最优方法;随机逻辑动力系统的最优控制方法在文献[160]中被提出.

此外,STP 方法在图的着色问题[161-163]、非线性反馈移位寄存器[6,164-167]、有限自动机[5,168-169]、网络演化博弈[2,170-177]、模糊控制[4,178-180]和数字电路[3,181]等方面都有着广泛的应用.

本文旨在介绍最近的一些关于逻辑网络的研究以及逻辑网络的应用.本文余下的内容安排如下:在第 1 章中回顾了 STP 的一些基础知识;在第 2 章中回顾了布尔(控制)网络的一些基本研究;在第 3 章中介绍了关于广义布尔(控制)网络的一些研究结果;在第 4 章综述了一些当前的研究工作;在第 5 章中介绍了关于逻辑网络的一些应用,并做了对本文简短的总结.

0.2 应用

这一小节主要介绍 STP 在逻辑网络中的一些应用.

1)网络演化博弈是同时结合博弈动态演化和网络的博弈.Cheng 等[2]提出了一个用于对网络演化博弈建模、分析和控制的广义框架,这个框架被用于网络演化博弈的演化的稳定策略分析[177];Guo 等[176]基于 STP 方法并利用“近视最佳反应调整”规则建立了一类演化网络博弈的代数公式;Zhao 等研究了带有切换拓扑[174]、带有随机入口[175]和带有时滞[173]的网络演化博弈的最优控制问题;Zhu 等[172]提出了对于网络智能电网的需求方管理和控制问题的一个演化博弈理论框架.

2)反馈移位寄存器是一种被广泛用于产生伪随机序列的装置,并且在错误检测、校正编码和密码系统中都有着广泛的应用.文献[167]基于 STP 方法研究了非线性反馈移位寄存器的稳定性,并且提出了关于非线性反馈移位寄存器的全局稳定和局部稳定的充要条件;Liu 等[181]通过利用 STP 方法研究了多值反馈移位寄存器的非奇异性和循环合成问题;Laschov 等[182]利用 Perron-Frobenius 理论研究了布尔控制网络的可控性,并且提出了基于 STP 方法对于两种不同形式的可控成立的充要条件.

3)数字电路的故障检测在控制和电路领域中是一个非常重要的问题.Li 等[3]利用 STP 方法研究了计算组合电路的布尔导数和故障检测问题,得到了所有错误检测的测试矢量;Liu 等[181]将这种方法推广到多值逻辑函数的导数计算和数字电路的故障检测.

4)自动机和 Petri 网构可以被用于对离散事件系统的建模、分析和控制.Xu 等[5]提出了基于矩阵方法的有限自动机,并且提出了充要条件去判断有限自动机是否具有可达性;文献[169]利用 STP 方法研究了异步顺序机的模型匹配问题;文献[168]利用 STP 方法去计算 Petri 网的虹吸以及最小虹吸.

5)STP 方法也被应用于模糊系统领域中.Cheng 等[4]利用 STP 的方法求解模糊关系方程;Li 等[178]提出了一种矩阵方法去解决具有模糊管子不等式约束的网格线性规划;段培永等[180]基于 STP 方法来利用模糊关系矩阵对一个关于室内热舒适的控制系统进行建模.

6)图的着色问题被广泛地应用于许多现实生活领域,例如工程调度和登记空中交通流量管理.Wang 等[161]利用 STP 方法研究了图的顶点着色问题中的最大(总量)稳定集;Zhong 等[163]应用 STP 方法找到了图的最小稳定集和核;Meng 等[162]将文献[161]中的方法推广研究了超图的稳定集和着色问题.

此外,STP 方法也已经被应用于其他研究领域,例如系统生物学[183]、IC 发动机中的残余废气系数[184]、交通问题、并联混合动力电动车[179]以及数字控制系统等.

1 矩阵半张量积(STP)理论

1.1 矩阵半张量积

STP 是由程代展教授等[8]提出的一种新的矩阵乘积,并且 STP 已经被验证是处理有限值系统的一种方便的工具.事实上,矩阵的 STP 乘积是传统矩阵乘积的一般化.与传统矩阵乘积不同的是,STP 在处理矩阵乘积时,并不需要满足矩阵乘积的维度匹配条件.关于 STP 的详细内容可以参考文献[8].在介绍 STP 之前,一些基本的符号列举如下:

1) D :逻辑域$\{0,1\}$;

2) $|A|$:集合 A 的基数;

3) $\mathbf{R}$:所有实数的集合;

4) $\mathbf{N+}$:所有正整数的集合;

5) $\mathbf{N}$:所有非负正整数的集合;

6) $\mathscr{M}_{m\times n}$:所有 $m\times n$ 维实数矩阵;

7) δ_n^i:单位矩阵I_n 的第 i 列;$\Delta_n=\{\delta_n^1,\delta_n^2,\cdots,\delta_n^n\}$ 表示矩阵I_n 的所有列的集合;

8) $\mathrm{col}_i(A)(\mathrm{row}_i(A))$:矩阵 A 的第 i 列(行),$\mathrm{col}(A)(\mathrm{row}(A))$:矩阵 A 所有的列集合(行集合);

9) 如果一个矩阵 $L=[\delta_n^{i_1},\cdots,\delta_n^{i_s}]$,L 就被称为逻辑矩阵,并且可以表示成 $L=\delta_n[i_1,\cdots,i_s]$;

10) $\mathscr{L}_{m\times n}$:表示所有 $m\times n$ 的逻辑矩阵;

11) 1_N:一个 N 维的全 1 的列向量.

定义 1[8] 对于一个 $n\times m$ 维的矩阵 A 和一个 $p\times q$ 维的矩阵 B,记 l 为 m 和 p 的最小公倍数,那么 A 和 B 的 STP 被定义为

$$A\ltimes B=(A\otimes I_{\frac{l}{m}})(A\otimes I_{\frac{l}{p}}) \,, \tag{1}$$

其中 $\otimes$ 是矩阵的 Kronecker 积.

注意:如果 $p=m$,那么 $A\ltimes B=AB$,STP 就退化成了标准的矩阵乘积,因此矩阵的 STP 是对标准乘积的推广.为了简洁,在没有歧义情况下就省略“$\ltimes$”.在这个框架下,STP 有一些比较重要的性质,比如伪交换性[8]. 例如,$x\in\mathscr{M}_{t\times 1}$ 为一个 t 维列向量,$A\in\mathscr{M}_{m\times n}$,那么根据 STP 的定义,我们可以很容易地得出 $x\ltimes A=(I_t\otimes A)\ltimes x$.

性质 1[8]

1) 分配律

$$\begin{cases}F\ltimes(aG+bH)=aF\ltimes G+bF\ltimes H,\\(aF+bG)\ltimes H=aF\ltimes H+bG\ltimes H,\quad a,b\in\mathbf{R}.\end{cases} \tag{2}$$

2) 交换律

$$(F\ltimes G)\ltimes H=F\ltimes(G\ltimes H)\,. \tag{3}$$

特别地,关于行向量和列向量有一些有趣的性质.

性质 2[8]

1) 如果 X 是一个行向量或者一个列向量,根据 STP 的定义可以得到下面这些性质.当 X 和 Y 都为列向量,有

$$X\ltimes Y=X\otimes Y\,. \tag{4}$$

当 X 和 Y 都为行向量时,有

$$X\ltimes Y=X\otimes Y\,. \tag{5}$$

两种情况结合,有

$$X^k=\underbrace{X\ltimes X\cdots\ltimes X}_{k}\,. \tag{6}$$

2) $X\in\mathscr{M}_{n\times 1}$ 和 $Y\in\mathscr{M}_{q\times 1}$ 是两个列向量,$A\in\mathscr{M}_{m\times n}$ 和 $B\in\mathscr{M}_{p\times q}$,那么有

$$(AX)\ltimes(BY)=(A\otimes B)(X\ltimes Y)\,. \tag{7}$$

特别地,

$$(AX)^k=\underbrace{A\ltimes A\cdots\ltimes A}_{k}X^k\,. \tag{8}$$

3) $X\in\mathscr{M}_{1\times m}$ 和 $Y\in\mathscr{M}_{1\times m}$ 是两个行向量,$A\in\mathscr{M}_{m\times n}$ 和 $B\in\mathscr{M}_{p\times q}$,那么有

$$(XA)^k=X^k\underbrace{A\ltimes A\cdots\ltimes A}_{k}. \tag{9}$$

根据定义 1 中 STP 的定义,矩阵 STP 不满足交换律.因此为了能够实现交换律,我们定义了另外一种矩阵.

定义 2[8] 一个 $mn\times mn$ 维的矩阵 $W_{[m,n]}$ 被称为一个换位矩阵,定义如下:它的行和列都是由双指标 (i,j) 标注,列是按照索引 $(11,12,\cdots,1n,\cdots,m1,m2,\cdots,mn)$ 来排列的,它的行是按照索引 $(11,21,\cdots,m1,\cdots,1n,2n,\cdots,mn)$ 来排列的,那么在位置 (I,J) ,(i,j) 的元素为

$$w_{(I,J),(i,j)}=\delta_{i,j}^{I,J}=\begin{cases}1,& I=i\text{ 且 }J=j,\\0,&\text{其他.}\end{cases}$$

如果 $\sigma_1\in\Delta_m$ 且 $\sigma_2\in\Delta_n$,那么 $\sigma_1\ltimes\sigma_2=W_{[m,n]}(\sigma_2\ltimes\sigma_1)$. 如果 $m=n$,那么用 $w_{[n]}$ 表示 $W_{[m,n]}$.

通过引入换位矩阵 $W_{[m,n]}$,两个矩阵或者向量的乘积就可以交换位置了.

性质 3[8]

1) $X\in\mathscr{M}_{n\times 1}$ 和 $Y\in\mathscr{M}_{n\times 1}$ 是两个列向量,有

$$W_{[m,n]}\ltimes X\ltimes Y=Y\ltimes X\,. \tag{11}$$

2) $X\in\mathscr{M}_{1\times m}$ 和 $Y\in\mathscr{M}_{1\times m}$ 是两个行向量,有

$$X\ltimes Y\ltimes W_{[m,n]}=Y\ltimes X\,. \tag{12}$$

3) $A\in\mathscr{M}_{m\times n}$ 和 $B\in\mathscr{M}_{p\times q}$,有

$$\begin{cases}(I_p\otimes A)\,W_{[n,p]}=W_{[m,p]}(A\ltimes I_p)\,,\\W_{[m,p]}(A\otimes B)\,W_{[q,n]}=(B\otimes A)\,.\end{cases} \tag{13}$$

定义 3[8] 矩阵 Φ_n 被称为关于2^n 值逻辑向量的降阶矩阵,使得对于任意的 $a\in\Delta_{2^n}$ 有 $a\ltimes a=\Phi_n\ltimes a$ 成立,矩阵Φ_n 形式如下:

$$\Phi_n=\delta_{2^{2n}}[1,2^n+2,\cdots,(2^n-2)\cdot 2^n+2^n-1,2^{2n}]\,. \tag{14}$$

并且,如果 $a\in\Delta_s$,可以得到 $a\ltimes a=\Phi_s\ltimes a$,其中 $\Phi_n=\delta_{s^2}[1,s+2,\cdots,s^2]$.

由于传统矩阵乘积对矩阵有维数的限制,但是在矩阵 STP 这个框架下,是没有矩阵维数限制的.与传统矩阵乘积相比,矩阵 STP 仍然具有分配律和结

合律，但是由于交换矩阵 $W_{[m,n]}$ 的引入，使得矩阵 STP 具有伪交换性，这是常规矩阵乘积所没有的.为了简洁，在后续的篇幅中，在没有歧义的情况下，矩阵乘积就看作矩阵 STP 乘积.有时为了简洁直接省略了符号“ $\ltimes$ ”.

1.2 逻辑函数的矩阵表达

1.2.1 二值逻辑操作

在这一小节中，我们将研究逻辑函数的矩阵表达式.逻辑变量在 $D=\{1,0\}$ 中取值.因此为了得到矩阵表达式，我们将“1”和“0”用如下向量表示

$$1 \sim \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\delta_2^1,\quad 0 \sim \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\delta_2^2. \tag{15}$$

因此，$D=\{1,0\} \sim \Delta_2=\{\delta_2^1,\delta_2^2\}$.

接下来，我们定义 r 元逻辑操作的结构矩阵.

定义 4[8] 一个 2×2^r 维矩阵 M_σ 被称为 r 元二进制逻辑操作 σ 的结构矩阵，如果满足：

$$\sigma(p_1,\cdots,p_r)=M_\sigma \ltimes p_1 \ltimes \cdots \ltimes p_r := M_\sigma \ltimes_{j=1}^{r} p_j, \tag{16}$$

其中 $p_1,\cdots,p_r \in D$.

我们可以用相似的方法得到一些二元逻辑运算操作的结构矩阵，例如否定“ $\neg$ ”、交“ $\wedge$ ”、并“ $\vee$ ”、蕴涵“ $\rightarrow$ ”、双重蕴涵“ $\leftrightarrow$ ”.否定“ $\neg$ ”、交“ $\wedge$ ”、并“ $\vee$ ”、条件“ $\rightarrow$ ”、双重条件“ $\leftrightarrow$ ”的结构矩阵分别用 M_n,M_c,M_d,M_i,M_e 来表示.对于逻辑变量 x 和 y ，可以得到如下等式：

$$n\begin{cases}\neg\ x:=M_n x, & M_n=\delta_2[2,1],\\ x\wedge y:=M_c xy, & M_c=\delta_2[1,2,2,2],\\ x\vee y:=M_d xy, & M_d=\delta_2[1,1,1,2],\\ x\rightarrow y:=M_i xy, & M_i=\delta_2[1,2,1,1],\\ x\leftrightarrow y:=M_e xy, & M_e=\delta_2[1,2,2,1].\end{cases} \tag{17}$$

为了得到一般逻辑操作的结构矩阵，我们引入幂减矩阵 M_r，$M_r=\delta_4[1,4]$.幂减矩阵有下面这些性质.

性质 4[8] $p\in\Delta_2$，那么有

$$p^2=M_r p. \tag{18}$$

通过利用二元逻辑操作的逻辑矩阵，可以得到任意逻辑函数的代数形式.

在逻辑变量和逻辑向量等价的框架下，也就是一个布尔变量 $a\in D$ 可以被认为是一个向量 $a\in\Delta_2$ ，相应的一个有 n 个变量的布尔函数 $f:D^n\rightarrow D$ 可以看作是一个映射 $\boldsymbol{f}:(\Delta_2)^n\rightarrow\Delta_2$.为了简洁，我们就用 $\boldsymbol{f}$ 来表示 f.因此在这种框架下很容易就能得到任意布尔函数的等价代数形式.

性质 5[8] $f:D^n\rightarrow D$ 是一个布尔函数，那么就存在唯一的矩阵 $F\in\mathscr{L}_{2\times 2^n}$ 使得对于每一个 $(a_1,\cdots,a_n)\in(\Delta_2)^n$ 有下面等式成立

$$f(a_1,\cdots,a_n)=F\ltimes a_1\ltimes\cdots\ltimes a_n. \tag{19}$$

其中，F 被称为逻辑函数 f 的结构矩阵.

1.2.2 k 值逻辑操作

一个 k 值逻辑变量 x 可以在区间 $[0,1]$ 取 k 个不同的值，通常表示为 $x\in D_k$ ，其中

$$D_k=\left\{0,\frac{1}{k-1},\frac{2}{k-1},\cdots,\frac{k-2}{k-1},1\right\}. \tag{20}$$

那么我们可以相似地定义 k 值逻辑中“ $\neg$ ”“ $\wedge$ ”“ $\vee$ ”操作.

定义 5[8]

1)“ $\wedge$ ”：任取 $x,y\in D_k$，定义

$$x\wedge y:=\max\{x,y\}. \tag{21}$$

2)“ $\vee$ ”：任取 $x,y\in D_k$，定义

$$x\vee y:=\min\{x,y\}. \tag{22}$$

3)“ $\neg$ ”：任取 $x=\dfrac{i}{k-1}\in D_k$ ，定义

$$\neg\ x:=\frac{(k-1)-i}{k-1}. \tag{23}$$

为了得到 k 值逻辑操作的矩阵表达式，我们将 k 值逻辑变量用向量形式表示：

$$\frac{i}{k-1}\sim\delta_k^{k-i},\quad i=1,2,\cdots,k-1. \tag{24}$$

例如 $1\sim\delta_k^1,0\sim\delta_k^k$ 等.因此，与二值逻辑操作相似，k 值逻辑变量 D_k 等价于集合 Δ_k.那么对于任意 r 元 k 值逻辑操作 $\sigma:D_k^r\rightarrow D_k$，可以得到下列向量形式.

定义 6[8] 一个 $k\times k^r$ 维矩阵 M_σ 被称为 r 元 k 值逻辑操作 σ 的结构矩阵，如果满足对于任意 $p_1,\cdots,p_r\in D_k$，有下式成立

$$\sigma(p_1,\cdots,p_r)=M_\sigma\ltimes p_1\ltimes\cdots\ltimes p_r:=M_\sigma\ltimes_{j=1}^{r}p_j. \tag{25}$$

与二值逻辑相似，我们也可得到 k 值逻辑中“ $\neg$ ”“ $\wedge$ ”“ $\vee$ ”操作的结构矩阵，分别表示为 $M_{n,k}$，$M_{d,k}$，$M_{c,k}$.

$$\begin{cases}M_{n,k}=\delta_k[k,k-1,\cdots,1],\\ M_{d,k}=\delta_k[\underbrace{111\cdots1}_{k}\ \underbrace{122\cdots2}_{k}\ \underbrace{123\cdots3}_{k}\cdots\ \underbrace{123\cdots k}_{k}],\\ M_{c,k}=\delta_k[\underbrace{123\cdots k}_{k}\ \underbrace{223\cdots k}_{k}\ \underbrace{333\cdots k}_{k}\cdots\ \underbrace{kkk\cdots k}_{k}].\end{cases} \tag{26}$$

与二值逻辑中的幂减矩阵相比，可以得到 k 值逻辑中的幂减矩阵，表示为 $M_{r,k}$，并且

$$M_{r,k}=\begin{bmatrix}\delta_k^1 & 0_k & \cdots & 0_k\\ 0_k & \delta_k^2 & \cdots & 0_k\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0_k & 0_k & \cdots & \delta_k^k\end{bmatrix}. \tag{27}$$

与二值逻辑相似,对于 k 值逻辑我们可以得到相似的性质

性质 6[8]　任取 $p\in\Delta_k$,有

$$p^2=M_{r,k}p. \tag{28}$$

那么对于任意 k 值逻辑函数 $f:(D_k)^n\to D_k$,可以得到相对应的代数表达式.

性质 7[8]　对于任意 k 值逻辑函数 $f:(D_k)^n\to D_k$,存在一个唯一的矩阵 $F\in\mathscr{L}_{k\times k}$ 使得对于任意 $(a_1,\cdots,a_n)\in(\Delta_k)^n$,有下式成立

$$f(a_1,\cdots,a_n)=F\ltimes a_1\ltimes\cdots\ltimes a_n. \tag{29}$$

其中,F 称为逻辑函数 f 的结构矩阵.

在前面的讨论中,已经定义了 k 值逻辑和二值逻辑操作的结构矩阵.考虑一个逻辑变量集合 $\{x_1,\cdots,x_n\}$,$x_i\in D_{k_i}$,那么怎么定义这些变量呢?事实上,与 k 值逻辑相似,称 $\{x_1,\cdots,x_n\}$,$x_i\in D_{k_i}$ 这种变量为混合值逻辑.对于函数 $f:\prod_{i=1}^n D_{k_i}\to D_{k_0}$,称这种函数为混合值逻辑函数.通过利用矩阵 STP,可以将 $f:\prod_{i=1}^n D_{k_i}\to D_{k_0}$ 表示为 $f:\prod_{i=1}^n \Delta_{k_i}\to\Delta_{k_0}$,同时也能得到函数 f 的结构矩阵 $F\in\mathscr{L}_{\prod_{i=1}^n k_i\times k_0}$.更多关于混合值逻辑的结果,请参照文献[8].

1.3　逻辑动态系统的代数表达式

在 1.2 节中,利用矩阵 STP 乘积,得到了逻辑函数的矩阵表达式.基于这一框架,可以得到逻辑动态系统的代数表达式.例如,当逻辑动态系统是二值逻辑时,可以很好地对基因调控网络建模.但是怎样才能得到这个系统的代数形式呢?在此,我们以布尔网络为例,去得到布尔网络的代数形式.

布尔网络(BN)是 Kauffman[1] 在 1969 年首次提出作为二元逻辑策略来研究复杂的基因动态行为的.在 BN 中,每个节点可以由两个逻辑值 1 和 0 来描述,这两个逻辑值表示基因或者细胞有无活性或有无表达.具有 n 个节点的 BN 的逻辑动态系统可以表示为

$$\begin{cases}x_1(t+1)=f_1(x_1(t),\cdots,x_n(t)),\\ x_2(t+1)=f_2(x_1(t),\cdots,x_n(t)),\\ \vdots\\ x_n(t+1)=f_n(x_1(t),\cdots,x_n(t)),\end{cases} \tag{30}$$

其中 $x_i\in D,i=1,\cdots,n$,为点的状态,$f_i:D^n\to D$,$i=1,\cdots,n$,为决定状态演化的逻辑函数.

由于很多生物系统都具有某种药物这种外源性的输入,所以 BN 又可以扩展到布尔控制网络(BCN).文献[137]首次提出了 BCN 可控性这个概念.例如,Huang 等[185]提出了利用 BCN 去探索毛细血管内皮细胞的信号系统演化过程.一个带有 m 个输入和 p 个输出的 BCN 可以用如下方程组表示:

$$\begin{cases}x_1(t+1)=f_1(x_1(t),\cdots,x_n(t),u_1(t),\cdots,u_m(t)),\\ x_2(t+1)=f_2(x_1(t),\cdots,x_n(t),u_1(t),\cdots,u_m(t)),\\ \vdots\\ x_n(t+1)=f_n(x_1(t),\cdots,x_n(t),u_1(t),\cdots,u_m(t)),\end{cases} \tag{31}$$

系统输出表示为

$$\begin{cases}y_1(t+1)=g_1(x_1(t),\cdots,x_n(t)),\\ y_2(t+1)=g_2(x_1(t),\cdots,x_n(t)),\\ \vdots\\ y_p(t+1)=g_p(x_1(t),\cdots,x_n(t)),\end{cases} \tag{32}$$

其中 $x_i\in D,i=1,\cdots,n$,为节点 i 点的状态,$y_i\in D$,$i=1,\cdots,p$,为系统的输出,$u_i\in D,i=1,\cdots,m$,为系统的控制输入.$f_i:D^n\to D,i=1,\cdots,n$,为决定状态演化的逻辑函数,$g_i:D^n\to D,i=1,\cdots,p$,为决定输出演化的逻辑函数.

矩阵的 Khatri-Rao 积定义如下:

定义 7[186]　设矩阵 $A\in\mathscr{M}_{p\times r}$,$B\in\mathscr{M}_{q\times r}$,矩阵 A 和 B 的 Khatri-Rao 积定义为

$$A*B=[\mathrm{col}_1(A)\ltimes\mathrm{col}_1(B),\cdots,\mathrm{col}_r(A)\ltimes\mathrm{col}_r(B)]\in M_{pq\times r}. \tag{33}$$

根据性质 5,对于任意一个逻辑函数,可以得到其相对应的结构矩阵.因此对于逻辑函数 $f_1,\cdots,f_n$ 和 $g_1,\cdots,g_p$,可得它们所对应的结构矩阵,分别记为 $F_1,\cdots,F_n$ 和 $G_1,\cdots,G_p$.那么系统(30)就转化为

$$\begin{cases}x_1(t+1)=F_1\ltimes_{i=1}^n x_i(t),\\ x_2(t+1)=F_2\ltimes_{i=1}^n x_i(t),\\ \vdots\\ x_n(t+1)=F_n\ltimes_{i=1}^n x_i(t),\end{cases} \tag{34}$$

其中 $F_1,\cdots,F_n\in\mathscr{L}_{2\times 2^n}$.

令 $x(t)=\ltimes_{i=1}^n x_i(t)\in\Delta_{2^n}$,利用矩阵 Khatri-Rao 积[142],可以得到如下与系统(30)等价的代数形式:

$$x(t+1)=Fx(t), \tag{35}$$

其中 $F=F_1*F_2*\cdots*F_n\in\mathscr{L}_{2^n\times 2^n}$.

相似地,对于系统(31),可以得到如下的代数

形式:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = F_1 \ltimes_{j=1}^{m} u_j(t) \ltimes_{i=1}^{n} x_i(t), \\ x_2(t+1) = F_2 \ltimes_{j=1}^{m} u_j(t) \ltimes_{i=1}^{n} x_i(t), \\ \quad \vdots \\ x_n(t+1) = F_n \ltimes_{j=1}^{m} u_j(t) \ltimes_{i=1}^{n} x_i(t), \end{cases} \tag{36}$$

其中 $F_1, \cdots, F_n \in \mathscr{L}_{2\times 2^{n+m}}$.

对于 BCN(31)的输出系统(32)也可以得到相似的代数形式:

$$\begin{cases} y_1(t+1) = G_1 \ltimes_{i=1}^{n} x_i(t), \\ y_2(t+1) = G_2 \ltimes_{i=1}^{n} x_i(t), \\ \quad \vdots \\ y_p(t+1) = G_p \ltimes_{i=1}^{n} x_i(t), \end{cases} \tag{37}$$

其中 $G_1, \cdots, G_p \in \mathscr{L}_{2\times 2^n}$.

令 $x(t) = \ltimes_{i=1}^{n} x_i(t) \in \Delta_{2^n}, u(t) = \ltimes_{j=1}^{m} u_j(t) \in \Delta_{2^m}, y(t) = \ltimes_{i=1}^{p} y_i(t) \in \Delta_{2^p}$. 利用矩阵 Khatri-Rao 积,可以得到状态系统(31)和输出系统(32)等价的代数形式如下:

$$\begin{cases} x(t+1) = Fu(t)x(t), \\ y(t) = Gx(t), \end{cases} \tag{38}$$

其中 $F = F_1 * F_2 * \cdots * F_n \in \mathscr{L}_{2^n\times 2^n}$, $G = G_1 * G_2 * \cdots * G_p \in \mathscr{L}_{2^p\times 2^n}$.

1.4 在半张量加和半张量积下的结构矩阵

定义 8[187] 设矩阵 $A \in \mathscr{M}_{m\times n}, B \in \mathscr{M}_{p\times q}$, 令 $t = lcm\{m,p\}$.

1)那么,矩阵 A 和 B 的左半张量加,用$\Vdash$表示,定义为

$$A \Vdash B = (A \otimes I_{\frac{t}{m}}) + (B \otimes I_{\frac{t}{p}}). \tag{39}$$

同时定义左半张量减为

$$A \dashv\vdash B = A \Vdash (-B). \tag{40}$$

2) 矩阵 A 和 B 的右半张量加,用 $\vDash$ 表示,定义为

$$A \vDash B = (I_{\frac{t}{m}} \otimes A) + (I_{\frac{t}{p}} \otimes B). \tag{41}$$

同时定义右半张量减为

$$A \dashv B = A \vDash (-B). \tag{42}$$

定义 9[8] 对于一个 $n\times m$ 的矩阵 A 和 $p\times q$ 维矩阵 B,记 l 为 m 和 p 的最小公倍数.

1)那么,A 和 B 的左 STP 被定义为

$$A \ltimes B = (A \otimes I_{\frac{l}{m}})(A \otimes I_{\frac{l}{p}}), \tag{43}$$

其中$\otimes$为 Kronecker 积.

2)A 和 B 的右 STP 被定义为

$$A \rtimes B = (I_{\frac{l}{m}} \otimes A)(I_{\frac{l}{p}} \otimes A). \tag{44}$$

在后面的篇幅中,主要讨论的是左 STP,并且将左 STP 简称为 STP.对于左 STP 所具有的性质,右 STP 也具有对应的性质.关于更多矩阵 STP 和半张量加运算请参照文献[8,187].

2 逻辑网络的基础研究

2.1 历史回顾

正如性质 5 和性质 7 所示,基于逻辑变量和逻辑向量之间的等价性,任何逻辑函数都可以表示为代数形式.在这个框架下,利用矩阵 STP,逻辑(控制)网络研究有了突破性的改变.程代展教授首先提出了 STP 方法,并且利用 STP 方法对于逻辑(控制)网络的研究取得了很好的成绩.程代展教授和他的合作者得到了关于 STP 的一些基本结果,包括专著[8],它详细介绍了 STP 以及基于 STP 布尔(控制)网络的一些研究结果.

由于STP方法的引入,一些关于布尔(控制)网络在控制理论方面的基本领域得到了很好的研究,包括可控性[18,44,56,71]、可观测性[72]、稳定性[44,52]和扰动解耦[84,87,188-189]等问题.在过去的几十年,布尔(控制)网络和逻辑(控制)网络在中国成为了一个研究的热点,包括中国科学院[5,169]、北京大学[20,80,98,103,106-107,190]、山东大学[3,15,25,41,56,85,140,161,178,191]、东南大学[10-11,13,64,96-97,157,163]、同济大学[16,27,61-62,78-79,125]、哈尔滨工业大学[30,67,77,81,183]、山东师范大学[110-112,121-122]、华东理工大学[32,42,93,99,132-133]、浙江师范大学[22,46,65,69,86,94,100-102,127,192]等在内的高校和研究所都有团队关注和研究这个方向.此外由于 STP 在逻辑(控制)网络上的强大应用,它还吸引了一些来自海外的研究组,如以色列的团队[60,74,123-124,131,193-195]、意大利的团队[29,33,43,73,115,130,134,196]、沙特阿拉伯[197]、德国[198]、日本[160]以及新加坡[109,121]等.

逻辑(控制)网络中的关于控制理论中的一些重要问题都得到了很好的研究.接下来,我们将介绍一些基本概念,包括可控性、可观性、稳定性和镇定性、扰动解耦控制、同步、最优控制以及大规模网络等.

2.2 可控性

稳定性和可控性是系统生物和控制理论中的一个基础概念.可控性的概念首次是在用逻辑网络对基因调控网络建模时提出来的[137].正如 Akutsu 所说"发现细胞的控制策略是后基因组时代的一个具有挑战性和重要性的问题".首先,一些逻辑(控制)网络关于可控性的基本结果在文献[55]中被提出.考

虑带有 m 个输入 $(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ 逻辑控制网络(31),其代数形式为 $x(t+1)=Fu(t)x(t)$.此外,我们还考虑下列几种控制:

1)控制输入是满足一定逻辑规则的逻辑变量,被称为一个输入网络,形式如下:

$$\begin{cases}u_1(t+1)=h_1(u_1(t),\cdots,u_m(t)),\\u_2(t+1)=h_2(u_1(t),\cdots,u_m(t)),\\\quad\vdots\\u_m(t+1)=h_m(u_1(t),\cdots,u_m(t)),\end{cases}\tag{45}$$

代数形式为 $u(t+1)=Hu(t),\quad u(t)=\ltimes_{j=1}^m u_j(t)$.

2)当控制依赖于状态变量时,就称为状态反馈控制,形式如下:

$$\begin{cases}u_1(t+1)=p_1(x_1(t),\cdots,x_n(t)),\\u_2(t+1)=p_2(x_1(t),\cdots,x_n(t)),\\\quad\vdots\\u_m(t+1)=p_m(x_1(t),\cdots,x_n(t)),\end{cases}\tag{46}$$

代数形式为 $u(t)=Px(t),\quad u(t)=\ltimes_{j=1}^m u_j(t)$.

3)当控制是一个自由逻辑序列,如果令 $u(t)=\ltimes_{j=1}^m u_j(t)$,则控制为一个经过设计的序列 $u(0),u(1),\cdots\in D_m$.

上面所提到的控制,在文献[13,25,27,55,60,64,68,125,199]中都进行了广泛的研究.

定义 10[68]

1)考虑带有自由控制序列的系统(31),给定一个初始状态 X_0 和一个目标状态 X,如果存在一个控制序列 $u(0),u(1),\cdots,u(s-1)$,使得系统(31)的轨迹在自由控制序列 $u(0),u(1),\cdots,u(s-1)$ 的控制下能在 $t=s$ 时到达目标状态 X,那么 X 被称为从 X_0 经过时间 s 是可达的.状态 X_0 在 s 之后可达的集合记为 $R_s(X_0)$,并且状态 X_0 所有可到达的状态记为 $R(X_0)=\cup_{s=1}^\infty R_s(X_0)$.

2)如果 $R(X_0)=D_n$,则系统(31)在状态 X_0 处可控.如果系统在任意 $X_0\in D_n$ 处可控,那么系统(31)可控.

将矩阵 F 分成 2^m 个块,即

$$F=[F_1,F_2,\ldots,F_{2^m}],\tag{47}$$

其中 $F_1,F_2,\ldots,F_{2^m}\in\mathscr{L}_{2^n\times 2^n}$.那么

$$M=\sum_{j=1}^{2^m}F_j\in\mathscr{L}_{2^n\times 2^n},$$

$$M_B=\sum_{j=1}^{2^{m+n}}{}_{\mathfrak{B}}M(s)\in\mathfrak{B}_{2^n\times 2^n},\tag{48}$$

其中 $\sum_{\mathfrak{B}}$ 是布尔加运算,也就是对于任意布尔变量 $a,b,a+b=a\vee b$.

我们有以下结论:

定理 1[68] 记 $M_B=(m_{ij})$,那么

1)$\delta_{2^n}^j$ 可以从 $\delta_{2^n}^i$ 达到,当且仅当 $m_{ij}>0$;

2)系统(31)在点 $\delta_{2^n}^j$ 处可控,当且仅当 $\mathrm{col}_j(M_B)>0$;

3)系统(31)可控,当且仅当 $M_B>0$.

之后,文献[60]研究了带有不良状态集合 $C=\{\delta_{2^n}^{i_1},\cdots,\delta_{2^n}^{i_z}\}$ 的 BCNs 的可控性. U^k 表示所有的控制序列 $\{u(0),\cdots,u(k-1)\}$.那么,考虑状态 a,b 和一个不良状态集合 $C=\{\delta_{2^n}^{i_1},\cdots,\delta_{2^n}^{i_z}\}$.令 $u(k,a,b,C)$ 表示一类控制器的数目,这类控制器能够将系统(31)从 $x(0)=a$ 控制到状态 $x(k)=b$,并且避免了集合 C(也就是 $x(t)\notin C$)对于任意 $t=0,1,\cdots,k$.那么,我们有下列关于 $u(k,a,b,C)$ 的表达式:

定理 2[60] M_C 表示将矩阵 M 的 $i_1,\cdots,i_z$ 行列元素替换为 0 所得到的矩阵,那么

$$u(k,a,b,C)=b^{\mathrm{T}}(M_C)^k a.\tag{49}$$

定义 11[200] 一个矩阵 $A\in\mathscr{M}_{n\times n},n\geqslant 2$,被称为可约的,如果存在一个置换矩阵 $P\in\mathscr{L}_{n\times n}$,一个正整数 $k,1\leqslant k\leqslant n-1$,使得

$$P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix}B&C\\0&D\end{pmatrix},\tag{50}$$

其中 $B\in\mathscr{M}_{k\times k},D\in\mathscr{M}_{(n-k)\times(n-k)},C\in\mathscr{M}_{k\times(n-k)},0\in\mathscr{M}_{(n-k)\times k}$ 为一个全零矩阵.

定理 3[200] 假设矩阵 $A\in\mathscr{M}_{n\times n}$ 是非负的,那么矩阵 A 是可约的当且仅当对于任意 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$,存在一个正整数 $k\geqslant 1$ 使得 $(A^k)_{ij}>0$.那么我们可以得到带有不理想集 $C=\{\delta_{2^n}^{i_1},\cdots,\delta_{2^n}^{i_z}\}$ 的可控性结论.

定理 4[60] 系统(31)是可控的当且仅当矩阵 $\bar{M}$ 是不可约的,其中 $\bar{M}$ 是由删除矩阵 M 的 $i_1,\cdots,i_z$ 行列元素所得到的.

从文献[55,60,68]之后,得到了很多 BCNs 可控性的结论,包括带有时滞[13,27,62,77,125]、切换 BCNs 的可控性[25,56,128]、带有脉冲效应的 BCNs 的可控性[18]、概率 BCNs 的可控性[61,71,153]等.最近,由于对网络的控制变得越来越复杂和难以实现,可控性的问题扩展到了牵引控制.例如,文献[64]研究了 BCNs 的牵引控制.第 4 部分将详细介绍牵引控制的设计和研究.

2.3 可观性

像可控性一样,可观性也是系统理论中的基础概念,并且在控制领域和系统生物学中有许多应用.

最近,文献[81]提出了9个不同的可观性定义,并且比较了如下的4个不同定义:

定义12[55] 带有输出系统(32)的系统(31)是可观的,如果对于任意的初始状态 x_0,存在一个控制序列使得对于任意状态 $\overline{x_0} \neq x_0, G\overline{x_0} \neq Gx_0$,都有最后系统的输出序列是不一样的.

定义13[68] 带有输出系统(32)的系统(31)是可观的,如果对于不同初始状态 $\overline{x_0} \neq x_0, G\overline{x_0} \neq Gx_0$,存在一个控制序列使得系统的输出是不一样的.

定义14[74] 带有输出系统(32)的系统(31)是可观的,如果存在一个有限的控制序列使得对于不同的初始状态 $\overline{x_0} \neq x_0, G\overline{x_0} \neq Gx_0$,可得到不同的相应输出序列.

定义15[73] 带有输出系统(32)的系统(31)是可观的,如果对于不同的初始状态 $\overline{x_0} \neq x_0, G\overline{x_0} \neq Gx_0$,所对应的输出序列是不同的.

文献[81]比较了以上4种可观性的定义,并且得到了任意2种可观性之间的关系;文献[55]得到了可观性的充要条件,也就是可观矩阵所有的列都是不同的;文献[74]利用图论的方法得到系统可观的条件,并且也分析了计算复杂性.此外,文献[194]证明了判断系统是否可观这个问题是一个NP困难的;文献[78-79]研究了具有脉冲效应和时滞的BCNs的可观性;文献[76,83]研究了切换BCNs的可观性;文献[73,196]研究了BCNs的可观性和可重构性.更多关于可观性的详细信息,请参考文献[72,77,80].

2.4 稳定性和镇定性

稳定性和镇定性问题是逻辑(控制)网络的基本问题.人们希望设计一些治疗策略将系统调控到理想状态,特别是基因治疗方面.在过去的几十年,关于逻辑(控制)网络的稳定性和镇定性都被广泛研究,包括状态反馈稳定[44,108]、采样数据状态反馈镇定[49]、集合稳定和集合镇定[47]、输出反馈稳定性[41,43]、鲁棒镇定[122]等.在文献[44]中,通过利用开环控制和状态反馈控制的方法研究BCNs的稳定性和镇定性,并且得到了一些关于BCNs的稳定性和镇定性的命题.

考虑系统(30)所对应的代数形式 $x(t+1) = Fx(t)$,接下来回顾系统(30)的稳定性的概念.

定义16 对于一个给定的状态 $X^* \in D^n$,系统(31)被称为全局稳定到状态 X^*,如果对于任意初始状态 $X_0 \in D^n$,存在一个正整数 N,使得 $x(t) = X^*, t \geqslant N$.

定理5 假设状态 $X^* \in D^n \sim x^* = \delta_{2^n}^{\lambda}$,那么系统(31)全局稳定到状态 X^*,当且仅当存在一个正整数 N,使得

$$F^N = \delta_{2^n}[\lambda, \lambda, \cdots, \lambda], \quad 即\ \mathrm{col}(F) = \{\delta_{2^n}^{\lambda}\}. \tag{51}$$

考虑系统(31)所对应的代数形式为 $x(t+1) = Fu(t)x(t)$,我们回顾系统(31)镇定性的一些问题.

定义17 给定一个状态 $X^* \in D^n$,称系统(31)全局镇定到状态 X^*,如果对于任意的初始状态 $X_0 \in D^n$,存在一个控制序列 $U^k = \{u(0), \cdots, u(k-1)\}$,和一个正整数 N 使得 $t \geqslant N$,有 $x(t) = X^*$.

定理6[108] 假设状态 $X^* \in D^n \sim x^* = \delta_{2^n}^{\lambda}$,那么系统(31)全局镇定到状态 X^*,当且仅当下列条件成立:

1)对于一些 $i = 1, \cdots, 2^m$,有 $x^* = F \ltimes \delta_{2^n}^{\lambda} \ltimes x^*$;

2)$x^* \in \cap R(x_0)_{x_0 \in \Delta_{2^n}}$,即任意初始 $x_0 \in \Delta_{2^n}$ 都可以到达状态 x^*.

如果系统(31)全局镇定到状态 X^*,那么可以设计一个状态反馈控制器使系统达到全局镇定.在文献[52]中,Li等设计了一个广义的反馈控制器使得系统达到全局镇定.定义一个集合 $E_k(r)$ 为

$$E_k(r) = \{x_0 \in \Delta_{2^n}: 存在\ u(0), \cdots, u(k), 使得\ x(k, x_0, u(0), \cdots, u(k)) = \delta_{2^n}^{r}\}. \tag{52}$$

接下来,我们有下面这些关于镇定性的结果:

定理7[52] 假设状态 $X^* \in D^n \sim x^* = \delta_{2^n}^{\lambda}$,那么系统(31)可以通过状态反馈控制器(46)全局镇定到状态 X^*,当且仅当下列条件成立:

1)$\delta_{2^n}^{\lambda} \in E_1(\lambda)$;

2)存在一个整数 $1 \leqslant N \leqslant 2^n - 1$,使得 $E_N(\lambda) = \Delta_{2^n}$.

引理1[52] 假设 $F = \delta_{2^n}[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{2^{m+n}}]$,那么,对于任意 $1 \leqslant \lambda \leqslant 2^n$:

1)$E_1(\lambda) = \{\delta_{2^n}^{q}: 1 \leqslant q \leqslant 2^n, \alpha_{(p-1)2^n+q} = \lambda, 1 \leqslant p \leqslant 2^n\}$;

2)$E_{k+1}(\lambda) = \cup \{E_1(\lambda'): 1 \leqslant \lambda' \leqslant 2^n, \delta_{2^n}^{\lambda} \in E_k(\lambda)\}, k = 1, 2, \cdots$.

那么,关于状态反馈控制有如下结论:

定理8[52] 假设状态 $X^* \in D^n \sim x^* = \delta_{2^n}^{\lambda}$,且系统(31)能通过状态反馈(46)全局镇定到状态 X^*.对于任意 $1 \leqslant i \leqslant 2^n$,存在唯一的整数 $1 \leqslant l_i \leqslant N$,使得 $\delta_{2^n}^{i} \in E_{l_i}(\lambda) \setminus E_{l_i-1}(\lambda)$,其中 $E_0(\lambda) = \emptyset$.令

$1 \leqslant p_i \leqslant 2^n$,如果 $l_i = 1$,那么$\alpha_{(p_i-1)2^n+i} = \lambda$,并且如果 $l_2 \leqslant 2$ 那么 $\delta_{2^n}^{\alpha_{(p_i-1)2^n+i}} \in E_{l_i-1}(\lambda)$.那么,存在状态反馈法则 $u(t) = Px(t)$,且状态反馈矩阵 P 可以表示为

$$P = \delta_{2^n}[p_1, p_2, \cdots, p_n]. \tag{53}$$

在文献[52]之后,文献[41,43]研究了输出反馈镇定问题,并且得到了关于输出反馈镇定存在的充要条件.输出反馈控制器的形式如下:

$$\begin{cases} u_1(t+1) = q_1(y_1(t), \cdots, y_p(t)), \\ u_2(t+1) = q_2(y_1(t), \cdots, y_p(t)), \\ \quad \vdots \\ u_m(t+1) = q_m(y_1(t), \cdots, y_p(t)), \end{cases} \tag{54}$$

其代数形式为 $u(t) = Ky(t)$,$K \in \mathscr{L}_{2^m \times 2^p}$.那么对于系统 $x(t+1) = Fu(t)x(t)$,$y(t) = Gx(t)$,$u(t) = Ky(t)$,为了实现全局镇定,根据文献[41,43],可以设计一个输出反馈矩阵 K.更多的信息可以参考文献[41,43].

最近,得到了一些关于逻辑控制网络的稳定性和镇定性的新结果.例如,文献[49]研究了采样数据状态 BCNs 反馈的镇定性;文献[47]研究了基于不变子集 BCNs 的集合稳定和集合镇定性,将稳定性和镇定性推广到更一般的情况,即集合稳定性和集合镇定性.

集合稳定的定义如下:

定义 18[47] M 是Δ_{2^n} 的一个子集.系统(30)被称为是 M-稳定,当且仅当对任意初始状态 $x_0 \in \Delta_{2^n}$,存在一个整数 $T(x_0)$,使得

$$x(t, x_0) \in M, \quad t \geqslant T(x_0). \tag{55}$$

集合镇定的定义如下.

定义 19[47] M 是Δ_{2^n} 的一个子集.系统(31)被称为 M-镇定,当且仅当对任意初始状态 $x_0 \in \Delta_{2^n}$,存在一个控制序列 u 和一个对应的整数 $T(x_0, u)$,使得 $t \geqslant T(x_0, u)$ 时有

$$x(t, x_0, u) \in M. \tag{56}$$

文献[47]得到了关于集合镇定和集合稳定的充要条件;文献[16,18]得到了带有脉冲效应和状态约束的 BNs 镇定的充要条件;文献[50]考虑了一组 BCN 的同时镇定.

2.5 扰动解耦控制

由于外部扰动的普遍存在,并且其会导致系统出现一些不良行为.因此,带有扰动的系统也具有很重要的研究价值.如果一个 BCNs 有干扰输入,那么称这种 BCNs 为扰动 BCNs.给出扰动 BCNs 的逻辑动力学形式如下:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), \cdots, x_n(t), u_1(t), \cdots, \\ \qquad u_m(t), \xi_1(t), \cdots, \xi_q(t)), \\ x_2(t+1) = f_2(x_1(t), \cdots, x_n(t), u_1(t), \cdots, \\ \qquad u_m(t), \xi_1(t), \cdots, \xi_q(t)), \\ \quad \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), \cdots, x_n(t), u_1(t), \cdots, \\ \qquad u_m(t), \xi_1(t), \cdots, \xi_q(t)), \\ y_j(t) = g_j(x_1(t), \cdots, x_n(t)), \quad j = 1, \cdots, p, \end{cases} \tag{57}$$

其中 $\xi_1, \cdots, \xi_q$ 是外部扰动输入,$x_1, \cdots, x_n$ 和 $y_1, \cdots, y_p$ 分别为系统(57)的状态和输出.

令 $\xi = \sum_{j=1}^{q} \xi_j \in \Delta_{2^q}$,那么可得到系统(57)的代数形式:

$$\begin{cases} x(t) = Lu(t)\xi(t)x(t), \quad L \in \mathscr{L}_{2^n \times 2^{n+q+m}}, \\ y(t) = Gx(t), \quad G \in \mathscr{L}_{2^p \times 2^n}. \end{cases} \tag{58}$$

定义 20 考虑系统(57),系统的扰动解耦可实现当且仅当可以找到一个状态反馈控制

$$u(t) = \phi(x(t)) \tag{59}$$

和一个坐标转换 $z = T(x)$,使得在 z 坐标下,闭环系统转换为以下形式:

$$\begin{cases} z^1(t+1) = F^1(z(t), \phi(x(t)), \xi(t)), \\ z^2(t+1) = F^2(z^2(t)), \\ y(t) = G(z^2(t)). \end{cases} \tag{60}$$

逻辑动态的坐标转换定义如下:

定义 21 $(x_1, \cdots, x_n)$ 为布尔(控制)网络的状态变量,如果映射 $F: D_n \to D_n$ 是一个双射,那么映射 F 称为一个逻辑坐标转换.

我们有如下关于坐标转换的结果:

定理 9[84] 映射 $F: D_n \to D_n$ 是一个坐标转换当且仅当 F 的结构矩阵 $M_F \in \mathscr{L}_{2^n \times 2^n}$ 是奇异的.

因此,为了解决扰动解耦问题,主要需要解决两个关键问题,分别是

1)找到一个包括输出的正则坐标子空间 z^2;

2)设计一个控制器,使得补坐标子基 z^1 和扰动 ξ 能够从 z^2 中删除.

在文献[84]中,BCNs 的扰动解耦问题已经得到了很详细的研究,并得到了关于扰动解耦可行性的几个充要条件;文献[151,201]研究了混合值逻辑网络的扰动解耦问题.之后,文献[87]提出了一个计算可行的方法来构建所有有效的反馈控制矩阵并且实现了扰动解耦;文献[23,86]研究了奇异 BCNs 的干扰解耦问题,并且讨论了 BCNs 的拓扑结构.

2.6 同步

网络同步是控制理论中具有意义的一个问题.逻辑网络的同步问题在过去的几年已经得到了很好的研究,并且得到了很好的结果,比如完全同步[11,90,92,94,97,99-100,106,156-157]、带有时滞的同步[10,96,103]、带有切换信号的同步[102,104]、带有脉冲的同步[18]、反同步[91]以及延迟同步[95]等.

如果系统带有时滞,那怎样实现同步?考虑下列形式的时滞系统:

$$\begin{cases} x_i(t+1) = f_i(x_1(t-\tau),\cdots,x_N(t-\tau)), \\ y_i(t+1) = g_i(y_1(t-\tau),\cdots,y_N(t-\tau), \\ \qquad x_1(t-\tau),\cdots,x_N(t-\tau)), \quad i=1,\cdots,N, \end{cases} \tag{61}$$

可以得到下列代数形式:

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t-\tau), \quad F \in \mathscr{L}_{2^N\times 2^N}, \\ y(t+1) = Gx(t-\tau)\,y(t-\tau), \quad G \in \mathscr{L}_{2^N\times 2^{2N}}. \end{cases} \tag{62}$$

我们有如下结论:

定理 10[103] 假设对于一些非负整数 a 使得 $\tau'=a(\tau+1)+\tau$,系统(61)能够达到同步当且仅当存在一个正整数 k_1,使得

$$\mathrm{col}((F^a\otimes I_{2^N})\,\Theta_1^k) \subseteq \{\delta_{2^{2N}}^{\alpha(i-1)2^N+i}, \quad i=1,\cdots,2^N\}, \tag{63}$$

或者存在一个正整数 k_2,使得下式成立

$$G\Theta^{k_2-1} = F^{k_2+a}\otimes 1_{2^N}. \tag{64}$$

定理 11[103] 假设 $\tau'\neq\tau(\mathrm{mod}\,\tau+1)$,系统(61)可以实现同步当且仅当存在一个正整数 k_3,使得

$$\mathrm{col}(\Theta^{k_3}\otimes F^{k_3+a}) \subseteq \{\delta_{2^{3N}}^{((i-1)2^{2N}+(j-1)2^N+j)}, \quad i,j=1,\cdots,2^N\}, \tag{65}$$

其中 a 是唯一的正整数使得 $0\leqslant\tau'-a(\tau+1)\leqslant\tau-1$ 成立.或者存在正整数 k_4 和 k_5,对于某些 $1\leqslant n\leqslant 2^N$,使得

$$\mathrm{col}(F^{k_4}) = \mathrm{col}(G\,\Theta^{k_5}) = \{\delta_{2^N}^n\}. \tag{66}$$

接下来,对系统的同步研究将扩展到对一组带有 M 个输出和 N 个点的耦合 BNs,形式为

$$\begin{cases} x_j^i(t+1) = f_j^i(x_j^1(t),\cdots,x_j^N(t), \\ \qquad y_1(t),\cdots,y_M(t)), \\ y_j(t) = g_j(x_j^1(t),\cdots,x_j^N(t)), \end{cases} \tag{67}$$

其中 x_j^i 是第 j 个 BN 的第 i 个点,y_j 是第 j 个 BN 的二元输出,记 $X_j(t)=(x_j^1(t),\cdots,x_j^N(t))$ 为第 j 个 BN 的状态,$x_j(t)=\ltimes_{i=1}^N x_j^i(t)$,$y(t)=\ltimes_{i=1}^M y_i(t)$.

得到代数形式为

$$\begin{cases} x_j(t+1) = F_j x_j(t)\,y(t), \quad F_j \in \mathscr{L}_{2^N\times 2^{N(M+1)}}, \\ y(t) = G\ltimes_{i=1}^M y_i(t), \qquad G \in \mathscr{L}_{2^M\times 2^{NM}}. \end{cases} \tag{68}$$

定义 22 一组 BNs 可以实现同步当且仅当对于任意的初始状态 $X_j(0)\in D^N, j=1,\cdots,M$,存在一个正整数 k 使得对于所有不同的 $1\leqslant i,j\leqslant M$,对于任意的 $t\geqslant k$,都有 $X_i(t)=X_j(t)$.

我们有如下结论:

定理 12[106] 系统(67)可以达到同步当且仅当存在一个正整数 $1\leqslant k\leqslant k_0$,使得

$$\mathrm{col}(\Xi^k) \subseteq \left\{\delta_{2^{NM}}^{\lambda_i}:\lambda_i = 1+\frac{(i-1)(2^{NM}-1)}{2^N-1}, i=1,\cdots,2^N\right\}. \tag{69}$$

其中

$$\Xi = (\otimes_{j=1}^M F_j)\,WG\,\Phi_{MN},$$

$$W = W_{[2^M,2^N]}\{\ltimes_{i=2}^M[(I_{2^M}\otimes W_{[2^M,2^{iN}]})\otimes\Phi_M]\}.$$

自文献[106]之后,已经得到了逻辑网络或者布尔网络同步的许多结果.文献[107]通过设计响应布尔网络来实现驱动和响应 BNs 的同步;文献[11]得到了关于主从 BNs 同步的充要条件;文献[100]提出了通过反馈控制和开环控制实现主从 BN 的完全同步.

我们注意到,时滞在现实世界中是一个普遍存在的现象,并且在生物系统中不可避免.因此,带有时滞的同步也引起了广泛的注意.例如,文献[10]提出了带有时滞的一组输出耦合布尔网络同步的充要条件;文献[202]提出了一种带有时滞的布尔网络,被称为时滞布尔网络,其带有时间延迟序列;文献[96]研究了输出耦合时滞布尔网络的同步问题;文献[95]研究了时滞布尔网络的延迟同步问题,并且将完全同步扩展到延迟同步.

在传统的 BN 中,假设每个节点是并行更新的,也就是说每个节点在每个时间点来说是在同时更新的,称为是同步更新方案.最近,人们研究了具有不同更新方案的同步问题.例如,文献[12]详细研究了同步更新布尔网络和异步更新布尔网络之间的同步问题.此外,布尔网络同步的控制设计也是一个非常重要的问题.例如,文献[105]基于核心输入状态周期研究了主从 BNs 同步的状态反馈控制器的设计问题;文献[104]研究了基于周期切换序列的耦合 BNs 的同步分析和设计问题;文献[99]设计了牵引控制器去达到两个耦合的 BNs 的同步,并且提出了一个算法实现牵引控制器的设计.

关于同步的一些其他结果,诸如耦合的大规模 BNs、切换 BNs 和混合值 BNs,请参考文献[93,102,155,203-205].

2.7 最优控制

逻辑控制网络的最优控制问题最近得到了广泛的关注,并且也得到一些很好的结果,比如 Mayer 型最优控制、有限时域最优控制等.例如,文献[130]考虑系统(31),给定初始状态 $X(0)=x_0$,确定一个输入序列将决策函数达到最小:

$$\wp_T(x_0,u(\cdot))=Q_f(x(T))+\sum_{j=1}^{T-1}Q(u(t),x(t)),\quad(70)$$

其中 $Q_f(\cdot)$ 是在 Δ_{2^n} 上的任意函数,$Q(\cdot,\cdot)$ 是在 $\Delta_{2^m}\times\Delta_{2^n}$ 上的任意函数.

通过利用 STP 方法,可以将决策函数(70)转化为如下代数形式:

$$\wp_T(x_0,u(\cdot))=c_f^{\mathrm{T}}+\sum_{j=1}^{T-1}c^{\mathrm{T}}\ltimes u(t)\ltimes x(t),\quad(71)$$

其中

$$c_f^{\mathrm{T}}=[Q_f(\delta_{2^n}^1),Q_f(\delta_{2^n}^2),\cdots,Q_f(\delta_{2^n}^{2^n})],$$

$$\begin{aligned}c^{\mathrm{T}}=&[Q_f(\delta_{2^m}^1,\delta_{2^n}^1),\cdots,Q_f(\delta_{2^m}^1,\delta_{2^n}^{2^n}),\cdots,Q_f(\delta_{2^m}^2,\delta_{2^n}^1),\\&\cdots,Q_f(\delta_{2^m}^2,\delta_{2^n}^{2^n}),\cdots,Q_f(\delta_{2^m}^{2^m},\delta_{2^n}^1),\\&\cdots,Q_f(\delta_{2^m}^{2^m},\delta_{2^n}^{2^n})].\end{aligned}\quad(72)$$

由于决策函数(70)是时不变的,因此文献[130]考虑了时变的决策函数,形式如下:

$$\wp_T(x_0,u(\cdot))=Q_f(x(T))+\sum_{j=1}^{T-1}Q(u(t),x(t),t),\quad(73)$$

并且,研究了标准二次决策函数,形式为

$$\wp_T(x_0,u(\cdot))=x(T)^{\mathrm{T}}Q_fx(T)+\sum_{j=1}^{T-1}[x(t)^{\mathrm{T}}u(t)^{\mathrm{T}}]\begin{bmatrix}Q&S\\S^{\mathrm{T}}&R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\u(t)\end{bmatrix}.\quad(74)$$

以上这 3 种最优控制问题都已经在文献[130]中得到,并且提出了有限时域最优控制和无限时域最优控制,还提出了最优控制问题可解的充要条件.文献[125,132-133]研究了切换 BNs 和时滞 BNs 的最优控制问题,并且得到了几个关于最优控制问题可解的充要条件;文献[18,128]研究了状态依赖切换 BCNs 和带有脉冲及状态限制的 BNs 的最优控制问题;文献[206]研究了概率 BNs 的最优控制问题;文献[127,154]研究了混合值逻辑控制网络的最优控制问题.更多关于奇异 BCNs 的最优控制问题,请参考文献[129].

2.8 大规模网络

由性质 5 可知,任意逻辑动态系统都可以表示为一个等价的代数形式.例如,一个带有 n 个节点和 m 个输入的 BN,这个 BN 的结构矩阵的维数为 $2^n\times2^{n+m}$.正如系统(36)所示,可以得到系统(36)所对应的代数形式(38),其中 $F\in\mathscr{L}_{2^n\times2^{n+m}}$,$G\in\mathscr{L}_{2^n\times2^p}$.因此,对于 BNs 的代数状态表达式来说,最大的缺点是计算复杂度很高.特别地,基于 STP 方法的算法复杂度都为指数时间复杂.很多关于逻辑(控制)网络或者布尔(控制)网络的结果都只适用于节点比较少的情况.文献[68]提出了一种比较高效的算法来寻找可以由非循环的聚合大规模网络的定点和循环,这个算法大大地减少了计算量,得到了很好的结果.之后,文献[139]提出了通过利用非循环聚合来研究大规模网络的控制问题,这一方法也大大地减少了计算复杂度;文献[93]回顾了 Zhao 等[68]所提出的聚合算法,并研究了两个耦合 BNs 的完全同步和部分同步.更多关于大规模网络的聚合算法请参考文献[68,93].

3 广义布尔(控制)网络的一些研究

3.1 历史回顾

虽然 BNs 是一个很强大的工具,在很多领域都有应用,但是我们注意到在 BNs 这个模型中,很多因素都没有考虑.例如,BNs 是一个确定性的系统,并不涉及随机性这个特性.此外,时滞也是一个在现实生活中广泛存在的一个现象,但是在很多 BNs 中并没有考虑这一点.因此,广义的逻辑网络也被广泛研究,诸如随机逻辑网络、奇异逻辑网络、混合值逻辑网络、带有时滞或者脉冲的逻辑网络、切换逻辑网络以及异步更新逻辑网络等.在本章节中,我们将回顾广义逻辑网络的一些重要结果.

3.2 概率逻辑网络

在 BNs 中,布尔函数是确定的,然而,在现实世界中,随机性是很常见的.例如,在对基因调控网络进行建模时,应当考虑遗传的不确定性.此外,当利用微阵列数据在复杂测量过程去推断基因调控网络的结构时,测量噪声是不可避免的.因此将 BNs 扩展到随机布尔网络是合理的.文献[207]提出了概率布尔网络(PBN).在 PBN 中,布尔函数是根据预先给定的在每一个时间点的概率分布来随机选择布尔函数的.自那以后,对 PBN 的研究或者广义 PBN,诸如概率混合值逻辑系统、环境敏感概率混合值逻辑系统的研究已经吸引了大量的关注.

对 STP 应用研究的快速增长引起了人们利用 STP 研究概率逻辑网络的兴趣.例如,文献[61]研究了带有两种不同控制 PBN 的可控性,并且提出了一个充要条件去判断 PBN 是否能够从一个初始状态到达一

个理想的状态,然而,可达集是在一定的条件下给出的.为了克服这一缺点,文献[65]利用可控性矩阵来研究 PBNs 的可控性和可达性,并且得到了一个充要条件去判断 PBN 是否可控;文献[71]通过利用输入状态关联矩阵和可达性矩阵去刻画连接可达性,之后证明了 PBN 的连接可达性和可控性是等价的,然后提出了一个充要条件去判断 PBN 是否可控.更多关于概率逻辑系统的可控性,请参考文献[153,199,208].

概率逻辑网络的稳定性和镇定性是其中的两个基本问题.文献[209]提出了一个充要条件去判断 PBN 是否能以概率 1 稳定或者镇定,但并没有提出一个控制策略;文献[45]将文献[209]中的结论推广到环境敏感概率布尔网络,通过利用 PBN 的代数形式,得到了一个控制设计方法,使得 PBN 达到镇定.

除了上述研究外,还考虑了其他的概率逻辑系统的控制问题.例如,通过利用 STP 方法分析主从 PBN 的同步性,其中主 BN 是一个确定的 BN,从 BN 是 PBN[97];文献[110]利用 STP 方法研究了 PBN 的输出追踪控制,并提出了一个构造状态反馈控制器的方法,使得 PBN 通过这个反馈控制能够追踪一个常信号.还有一些关于可观性、最优控制和概率逻辑系统的拓扑结构分析的结果请参考文献[82,154,190].

3.3 奇异逻辑网络

奇异系统是描述许多科学和工程系统的一个很有效的模型.文献[16]首次引入了奇异布尔网络这个概念;文献[19]研究了奇异布尔网络的标准化和可解性,此外,还研究了奇异布尔网络的不动点和极限环;通过利用输入状态关联矩阵,文献[75]研究了奇异布尔控制网络的可控性和可观性,指出奇异布尔网络扰动解耦问题的关键在于设计一个控制器使得外部的干扰对输出没有影响;文献[23]考虑了当控制是常控制时的扰动解耦问题;文献[86]研究了带有自由控制序列的奇异布尔网络的扰动解耦问题;文献[129]研究了奇异布尔网络的最优控制问题;文献[210]进一步将文献[129]中的结论推广到奇异混合值布尔网络的最优控制问题中.

3.4 混合值逻辑网络

混合值逻辑网络是传统 BNs 的推广,多值逻辑网络的结构类似于 BNs.混合值逻辑网络的每个状态都是从一个有限集中取值的,并且它的状态更新由逻辑函数决定.然而,BNs 和混合值逻辑网络最大的不同在于混合值逻辑网络允许它的点 x_i 从集合 $D_{k_i}=\left\{\frac{i}{k_i-1}\mid i=0,1,\cdots,k_i-1\right\}$ 中选取.可以看到当 $k_i=2$ 时,集合 D_{k_i} 就为 D,因此混合值逻辑网络是 BNs 的推广.

混合值逻辑网络的最优控制问题是一个热点研究问题.文献[211]提出用 Floyd 算法去找到混合值逻辑网络的最优控制,并且这个算法大大地减少了计算复杂度.后来,文献[159]研究了混合值概率逻辑网络的最优控制,并且得到了在有限时域情况下的递归解,之后证明了当滤波器长度足够大时,所得到的最优控制序列和无限时域所得到的最优控制序列是一致的.文献[127]研究了带有不理想状态的多值逻辑网络的 Mayer 型最优控制.

混合值逻辑网络研究最近的一个关注点是扰动解耦问题.文献[152]定义了混合值逻辑网络的 Y 友子空间,并且提出了一种方法去找到所有的扰动解耦控制器.但是在文献[152]中定义的 Y 友子空间不是唯一的.文献[151]进一步研究了混合值逻辑网络的扰动解耦问题,并且提出了一个主 Y 友子空间的新定义,得到了一个唯一的 Y 友子空间,这使文献[151]中的算法更加容易实现.

关于混合值逻辑网络的其他一些结果,比如稳定性、同步性、可控性以及函数扰动等,请参考文献[142,145,149-150,156,212-213].

3.5 带时滞的逻辑网络

时滞现象是在现实世界中一种常见的现象,因此,研究带时滞的逻辑网络有重要意义.文献[27,79]研究了常时滞布尔网络的可控性和可观性.常数时滞表示每个时间点的时滞都是一样的.文献[13]研究了带有多时滞(每个节点时滞是不一样的)BNs 的状态轨迹和可控性.还有一些其他的相关结果,包括状态带时滞的 BNs 的可控性和可观性、输入和状态都带时滞的可控性和带有多有界时变时滞的 BNs 的可控性[14,24,77,214].带时滞的布尔网络的同步问题也得到了深入的研究.文献[10]研究了带时滞的一组输出耦合 BNs 的同步.然而,在文献[10]中有一个限制是输入时滞和状态时滞是一样的.为了将文献[10]中的结果推广,文献[96]研究了输出耦合 BNs.在文献[96]中,研究了同时带有输入时滞和状态时滞的系统,并且这两个时滞是不一样的.其他关于带时滞的逻辑网络同步的研究请参考文献[103].

3.6 脉冲逻辑网络

在进化过程中由于环境的突然变化可能会导致

某一时刻状态的突然变化.文献[16]首次提出了带脉冲的 BNs,研究了带脉冲的 BNs 的稳定性和镇定性,并且给出了一个充要条件判断脉冲 BNs 是否稳定或者镇定;文献[36]将文献[16]中的结果推广到带脉冲的切换 BNs 中,得到了判断带脉冲的切换 BNs 是否是全局稳定或者全局镇定的充要条件;文献[78]研究了带脉冲 BNs 的可观性,并且得到了一个充要条件去判断系统是否可观;文献[11]提出了一个充要条件去判断带脉冲的主从 BNs 是否同步;文献[18]研究了带脉冲 BNs 的镇定性、可控性以及 Mayer 型最优控制;文献[22,215]分别研究了带脉冲 BNs 的最小时间控制,以及带有状态禁止和脉冲 BNs 的可控性.

例如,在文献[16]中,首先研究了带脉冲的 BNs 的稳定性和镇定性,它的动态系统表示如下:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t),\cdots,x_n(t)), t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k - 1, \\ \quad\vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t),\cdots,x_n(t)), t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k - 1, \\ x_1(t_k) = g_1(x_1(t_k-1),\cdots,x_n(t_k-1)), \\ \quad\vdots \\ x_n(t_k) = g_n(x_1(t_k-1),\cdots,x_n(t_k-1)), k \in \mathbf{N}^+, \end{cases} \tag{75}$$

其中 x_i 为系统的点,时间序列 $\{t_k\} \subseteq \mathbf{N}^+$ 是脉冲时间序列,满足 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots, k \in \mathbf{N}^+$.与不带脉冲的 BNs(30)相比,对于系统(75),在脉冲时间序列 $\{t_k\} \subseteq \mathbf{N}^+$ 时,系统的每个点都突然地变化,利用逻辑函数 $g_1,\cdots g_n$ 将 $x_1(t_k),\cdots, x_n(t_k)$ 转移到 $g_1(x_1(t_k-1),\cdots,x_n(t_k-1)),\cdots,g_n(x_1(t_k-1),\cdots,x_n(t_k-1))$.

因此,基于 STP 的框架下,系统(75)可以被转化为

$$\begin{cases} x(t+1) = L_1 x(t), \quad t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k - 1, \\ x(t_k) = L_2 x(t_k - 1). \end{cases} \tag{76}$$

利用代数形式(76),很多相关控制问题都被研究了,包括稳定性、镇定性、可观性、同步、可控性等.更多详细内容,请参考文献[11,16,18,22,31,78,215].

3.7 带有切换结构的逻辑网络

我们注意到生物网络的动力学往往受制于不同的切换模式,因此,文献[15]提出了一种切换 BNs,并且给出了充要条件去判断一个切换系统在任意切换信号下是否稳定;文献[34]将文献[15]的结果推广到切换布尔网络在任意切换信号下是否稳定到一个极限环;文献[36]研究了切换布尔网络的一致稳定性;文献[40]提出构造一个反馈控制和一个输出反馈控制使得切换 BNs 镇定,并且还得到了能够使系统以最短的时间镇定的控制序列.

近年来,人们还研究了具有切换结构的逻辑网络的其他控制问题.例如,文献[56]通过构造切换输入状态关联矩阵,得到关于可控性和可达性的充要条件;之后,文献[56]的结果被推广到具有状态和输入约束的切换 BNs 的情况[25],并提出约束的关联矩阵来得到切换 BNs 可控性的一些充要条件,所给的算法可以将在固定或者设计的最短终止时间内的决策函数最小化;文献[25]研究了开环和闭环控制的稳定性;文献[76,83,102,128,133]分别研究了状态依赖切换 BNs 的最优控制和输出控制、切换 BNs 的最优控制、利用有限自动机的方法研究切换 BNs 的可观性以及切换 BNs 的同步性.

例如,文献[15]研究了带有 m 个模式和 n 个点的切换 BNs,形式如下:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1^{\sigma(t)}(x_1(t),\cdots,x_n(t)), \\ \quad\vdots \\ x_n(t+1) = f_n^{\sigma(t)}(x_1(t),\cdots,x_n(t)), \end{cases} \tag{77}$$

其中 $\sigma:\mathbf{N} \to W = \{1,\cdots,m\}$ 为切换信号,记 $F_1^{\sigma(t)},\cdots,F_n^{\sigma(t)}$ 为逻辑函数 $f_1^{\sigma(t)},\cdots,f_n^{\sigma(t)}$ 在切换信号 $\sigma(t)$ 下的结构矩阵,因此我们可以得到如下代数结构:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = F_1^{\sigma(t)} \ltimes_{i=1}^n x_i(t), \\ \quad\vdots \\ x_n(t+1) = F_n^{\sigma(t)} \ltimes_{i=1}^n x_i(t). \end{cases} \tag{78}$$

令 $x(t) = \ltimes_{i=1}^n x_i(t)$,方程组(78)可转化为如下等式:

$$x(t+1) = L_{\sigma(t)} x(t), \quad L_{\sigma(t)} \in \mathscr{L}_{2^n \times 2^n}. \tag{79}$$

进一步,定义 $\sigma(t) = i \sim \sigma(t) = \delta_m^i$,就有如下等式:

$$x(t+1) = L\sigma(t)x(t), \quad L \in \mathscr{L}_{2^n \times m2^n}, \tag{80}$$

其中 $L = [L_1,\cdots,L_m]$, $L_1,\cdots,L_m \in \mathscr{L}_{2^n \times 2^n}$. 与 BCNs(45)相比,一个代数形式为 $x(t+1) = Lu(t)x(t), x(t) \in \Delta_{2^n}, u(t) \in \Delta_{2^m}$ 的 BCNs,可以看作是一个切换 BNs:$x(t+1) = L\sigma(t)x(t)$,其中 $\sigma(t)$ 是切换信号,并且切换信号取值的集合为 $\{\delta_m^i, i = 1,\cdots,m\}$,因此很多控制问题都在代数形式(80)下得到了很好的研究,包括可控性、可观性、稳定性以及最优控制等.

3.8 异步更新逻辑网络

在异步更新逻辑网络中,每个节点异步更新其状态.文献[20]研究了在异步随机更新的情况下用代数

的方法确定随机 BNs 的吸引子和吸引域;文献[12]研究了异步 BNs 的同步和外同步问题.

文献[20]考虑了这样的异步随机 BNs:它是由 N 个点组成的,并且从 K 个不同的点中得到输入,i 点在 t 时刻的状态表示为 $A_i(t)$,用 $A_{i_j}(t)$ 表示点 i 的第 j 个输入,其中 $i \in \{1,\cdots,K\}$.那么节点 i 在确定时间 $t+1$ 是根据逻辑函数 f_i 更新的.因此,整个系统的更新模式可以用下列逻辑动态方程来表示:

$$\begin{cases} A_i(t+1) = f_i(A_{i_1}(t),\cdots,A_{i_K}(t)), \\ A_j(t+1) = A_j(t), \quad j \in \{1,\cdots,N\}, \quad j \neq i. \end{cases} \tag{81}$$

那么,令 M_i 为逻辑函数 f_i 的结构矩阵,令 $x(t) = \ltimes_{i=1}^{N} A_i(t)$,逻辑动态系统(81)就转化为

$$\begin{cases} A_i(t+1) = M_i x(t), \\ A_j(t+1) = A_j(t), \quad j \in \{1,\cdots,N\}, \quad j \neq i. \end{cases} \tag{82}$$

因此,将上面 N 个等式相乘得到下列等式:

$$x(t+1) = L_i x(t), \tag{83}$$

其中 $L_i \in \mathscr{L}_{2^N \times 2^N}$,$i \in \{1,\cdots,N\}$ 被称为网络转移矩阵,可以由矩阵 M_i 计算得出.

与同步 BNs(30)相比,对于给定的一个同步随机 BN(81),在任一时刻的每个 L_i 都是在 N 个可能的矩阵中选择得到的.文献[20]研究了异步更新网络的定点、循环和吸引盆.

4 当前研究

4.1 牵引控制

对于部分生物系统和复杂网络而言,可以通过控制所有节点来达到目标,但也有可能部分输入或控制部分节点就能获取系统的特点以实现整个网络的控制[216].一些实验告诉我们,很多生物系统就具有后面那种特点[217-218],即控制部分节点或者输入就可以实现全局的调控.文献[64]首次利用牵引控制来研究 BCNs 的可控性和可达性,在基于牵引点被确定的假设下来研究可控性和可达性;文献[42]通过巧妙的设计牵引控制器来实现 BNs 的镇定,这里是首次提出 BNs 的稳定性,并且通过替换状态转移矩阵的某些列来得到一个新的 BNs,这个新的 BNs 满足稳定性条件.另外,文献[42]还提出了一个选择牵引控制点和设计牵引控制器的算法.文献[69]利用牵引控制来研究自治 BCNs 的可控性问题;文献[99]利用牵引控制来研究两个耦合 BNs 的同步问题.

正如传统 BCNs(31)中所示,每个点都被一系列控制器所控制.然而,对于现实世界基因网络而言,可以通过控制关键的控制点来实现完全控制,并不需要控制所有的点.文献[64]研究了单个控制器牵引控制下的 BNs,其中的点 $i_1,\cdots,i_r$ 为被选中的牵引控制点,$1 \leqslant r \leqslant n$.不失一般性,假设 $i_s = s, s = 1,\cdots,r$.

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t),\cdots,x_n(t),u_1(t)), \\ \quad\vdots \\ x_r(t+1) = f_r(x_1(t),\cdots,x_n(t),u_r(t)), \\ x_{r+1}(t+1) = f_{r+1}(x_1(t),\cdots,x_n(t)), \\ \quad\vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t),\cdots,x_n(t)). \end{cases} \tag{84}$$

从式(84)中可以看出,只有 $x_1,\cdots,x_r$ 点有控制输入,$x_{r+1},\cdots,x_n$ 都没有控制输入.那么 BCNs 的可控性就在式(84)的框架下被研究,并且得到了关于牵引可控的充要条件.

此外,通过设计牵引控制器的 BN 镇定已经被研究过了,并且提出了几种算法去决定牵引控制点.例如,考虑 BNs(30)全局稳定到状态 $\delta_{2^n}^r$,其系统代数形式为(34)和(35),Li 等[42]提出了下列算法去实现稳定性.

算法 1 实现系统稳定到状态 $\delta_{2^n}^r$

步骤 1:将矩阵 L 的 r 列变为 $\delta_{2^n}^r$;

步骤 2:令 $\prod(r)_k$ 表示可以在 k 步之后控制到状态 $\delta_{2^n}^r$ 的初始状态集合,$\prod(r) = \bigcup_{i=1}^{2^n} \prod(r)_k$;

步骤 3:找到所有 $\delta_{2^n}^i \notin \prod(r)$,$i \in \{1,2,\cdots,2^n\}$,将 $\mathrm{col}_i(F)$ 变为集合 $\prod(r)$ 中的任意一个元素;

在上述步骤结束后,矩阵 F 变为矩阵 Θ.

在算法 1 之后,BNs 为转移矩阵 Θ,并且这个新的 BNs 将全局稳定到定点 $\delta_{2^n}^r$.在算法 1 中矩阵 F 变为矩阵 Θ,不妨设矩阵的 $F_1,\cdots,F_k$ 的第 $1,\cdots$,第 m 列变了,并且矩阵 $F_1,\cdots,F_k$ 变为 $\hat{F}_1,\cdots,\hat{F}_k$.之后,我们就可以设计一个牵引控制策略使得系统能够镇定到点 $\delta_{2^n}^r$:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = u_1(x_1(t),\cdots,x_n(t)) \oplus_1 \\ \qquad f_1(x_1(t),\cdots,x_n(t)), \\ \quad\vdots \\ x_k(t+1) = u_k(x_1(t),\cdots,x_n(t)) \oplus_k \\ \qquad f_k(x_1(t),\cdots,x_n(t)), \\ x_{k+1}(t+1) = f_{k+1}(x_1(t),\cdots,x_n(t)), \\ \quad\vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t),\cdots,x_n(t)). \end{cases} \tag{85}$$

状态反馈控制为

$$\begin{cases} u_1(t) = g_1(x_1(t),\cdots,x_n(t)), \\ \vdots \\ u_k(t) = g_k(x_1(t),\cdots,x_n(t)), \end{cases} \tag{86}$$

其中 $M_{\oplus_1},\cdots,M_{\oplus_k}$ 为逻辑函数 $\oplus_1,\cdots,\oplus_k$ 的结构矩阵,$\overline{M_1},\cdots,\overline{M_k}$ 是反馈控制函数 $g_1,\cdots,g_k$ 的结构矩阵.结构矩阵 $M_{\oplus_1},\cdots,M_{\oplus_k},\overline{M_1},\cdots,\overline{M_k}$ 可以通过求解下列方程得到:

$$\begin{cases} M_{\oplus_1}\overline{M_1}(I_{2^n}\otimes F_1) = \hat{F}_1, \\ \vdots \\ M_{\oplus_k}\overline{M_k}(I_{2^n}\otimes F_k) = \hat{F}_k. \end{cases} \tag{87}$$

文献[99]研究了方程(87)的可解性,并且得出正面结论:(87)是可解的.这意味着形式如(85)的牵引控制策略可以将系统镇定到点 $\delta_{2^n}^r$.更多的详细过程,请参考文献[42,64,69,99].

4.2 函数扰动

由于不可测量的变量和测量误差的影响或者基因突变,BN 中不可避免地存在扰动影响,包括函数扰动和状态扰动.文献[219]研究了基于环境敏感的 PBNs 可控性,考虑了随机基因扰动在每个时间点都以一定概率发生;文献[207]研究了 PBNs 的随机基因扰动,还提出了基因干预的概念,然后决定哪些基因是干预的最佳候选;文献[31,220]利用移位函数扰动来研究函数扰动时 BN 的拓扑结构的影响.此外,文献[35]研究了多位扰动,并基于此来分析多状态循环如何变化;文献[37]研究了一位扰动和更新模式的变更对吸引子的影响.以文献[37]为例,考虑 BN(30),代数结构为(34),一位扰动的定义如下:

定义 23[37] 如果一个函数 f_i 将第 $j(1\leqslant j\leqslant 2^n)$ 个变量取反之后,这个函数的真值表只有一位变化,也就是说将值 1 变为 0,这个就称为一位变化记为 $f_i\to f_i^{(j)}$.

接下来的引理将得到(34)的代数形式.

引理 2 代数形式 $x(t+1)=Fx(t)$ 变为 $x(t+1)=\widetilde{F}x(t)$,其中矩阵 $\widetilde{F}$ 满足:

$$\mathrm{col}(\widetilde{F}) = \begin{cases} \mathrm{col}_k(F), & k\neq j, \\ (I_{2^{i-1}}\otimes M_n)\,\mathrm{col}_k(F), & k=j. \end{cases} \tag{88}$$

基于转换代数形式:$x(t+1)=\widetilde{F}x(t)$,文献[37]研究了一位扰动对不动点和周期解的影响.更多关于函数扰动、一位扰动以及多位扰动的详细信息,请参考文献[35,37,220].

4.3 系统分解

文献[118]研究了常形式的可观和可控,并且在基于最大不可控子空间是正则的假设下,提出了 Kalman 分解形式.在没有考虑最大不可控子空间的规则性假设的情况下,文献[119]研究了关于 BCNs 的输入分解问题.考虑以下系统:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t),\cdots,x_n(t), \\ \qquad u_1(t),\cdots,u_m(t)), \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t),\cdots,x_n(t), \\ \qquad u_1(t),\cdots,u_m(t)). \end{cases} \tag{89}$$

BCNs(89)关于 $n-s$ 阶输入是可分解的,如果存在一个逻辑坐标转换 $z_i=g_i(x_1,\cdots,x_n)$,$i=1,2,\cdots,n$ 使得(89)成为

$$\begin{cases} z_1(t) = \hat{f}_1(z_1(t),\cdots,z_n(t),u_1(t),\cdots,u_m(t)), \\ \vdots \\ z_s(t) = \hat{f}_s(z_1(t),\cdots,z_n(t),u_1(t),\cdots,u_m(t)), \\ z_{s+1}(t) = \hat{f}_{s+1}(z_1(t),\cdots,z_n(t)), \\ \vdots \\ z_n(t) = \hat{f}_n(z_1(t),\cdots,z_n(t)). \end{cases} \tag{90}$$

关于最大阶输入的分解被称为是关于输入的最大分解.事实上,文献[118]指出基于最大不可控子空间的规则假设,常可控形式和关于输入的最大分解是相同的概念,给出了相应的证明,并且提出了关于 $n-s$ 阶输入的分解的等价条件.因此,我们不需要计算最大的不可控子空间并检查规则性假设.更有趣的是给出了完美等价顶点划分的定义,基于此,BCNs(89)是关于 $n-s$ 阶输入可分解的当且仅当(89)的诱导图有完美等价顶点划分.

此外,文献[116]提出了依赖于规则性假设的关于输入的分解问题;文献[120]研究了 BCNs 的 Kalman 分解,其中并没有使用状态空间分析的方法,也没有考虑规则性假设.

4.4 轨迹控制

轨迹可控的主要目的是找到一个控制器能够将一个给定的初始状态控制到一个理想轨迹状态.在很多现实的系统中,比如基于系统的药物发现治疗,在某些时候需要找到一个控制策略使得系统沿着给定的轨迹演化,而不只是简单地将一个给定的初始状态控制到一个理想点.例如,DNA 首先要被转录成 mRNA,然后 mRNA 被翻译成蛋白质,最后才是器官.基于 STP 的轨迹控制问题已经有一些不错的结果.

例如，文献[13]研究了时滞 BCNs 的轨迹控制问题.

考虑如下带时滞的 BCNs：

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(u_1(t), \cdots, u_m(t), x_1(t-u+1), \\ \quad \cdots, x_n(t-u+1), x_1(t), \cdots, x_n(t)), \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(u_1(t), \cdots, u_m(t), x_1(t-u+1), \\ \quad \cdots, x_n(t-u+1), x_1(t), \cdots, x_n(t)). \end{cases} \tag{91}$$

令 $u(t) = \ltimes_{i=1}^{m} u_i(t)$，$x(t) = \ltimes_{i=1}^{n} x_i(t)$，$y(t) = \ltimes_{i=t-u+1}^{t} x(i)$，接下来我们给出带时滞的 BCNs 轨迹控制的定义：

定义 24 考虑时滞 BCNs(91)，对于任意给定的初始轨迹(初始状态序列) $X(0) = (x(1-u), x(2-u), \cdots, x(0))$ 和目标轨迹 $X_d = (x_d^1, x_d^2, \cdots, x_d^u)$，$X_d$ 被称为是从 $X(0)$ 经过 k 步轨迹可控的(或者轨迹可达的)，如果我们可以找到一个控制输入序列 $U(k) = (u(0), \cdots, u(k-1))$ 使得 $X(0)$ 可以被控制到目标轨迹 X_d，也就是 $X(k) = X_d$.

文献[13]提出了关于轨迹可控的充要条件，并且基于此进一步分析了状态可控.文献[13]注意到，对于带时滞的 BCNs(91)而言，如果轨迹可控，那么这个系统必然状态可控；如果状态不可控，那么轨迹必然不可控.

4.5 输出追踪问题

由于受一些状态变量测量条件的限制，如果我们想得到所有的状态变量，需要考虑输出变量[41].在动态系统的研究中，输出追踪是一个重要的研究问题.文献[110]研究了 PBCNs 的输出追踪控制问题；文献[111]研究了带有常信号的 BCNs 的输出追踪问题；文献[109]研究了输出轨迹对于 BCNs 和几个外部 BNs 产生的参考信号的调节问题；文献[112]研究了 SBCN 的输出追踪问题.

文献[111]研究了 BCNs 的输出调节问题，考虑如下形式的 BCNs：

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), \cdots, x_n(t), u_1(t), \cdots, u_m(t)), \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), \cdots, x_n(t), u_1(t), \cdots, u_m(t)), \\ y_j(t) = h_j(x_1(t), \cdots, x_n(t)), \quad j = 1, \cdots, p. \end{cases} \tag{92}$$

一个如下形式的参考 BNs：

$$\begin{cases} \hat{x}_1(t+1) = \hat{f}_1(x_1(t), \cdots, x_n(t)), \\ \vdots \\ \hat{x}_n(t+1) = \hat{f}_n(x_1(t), \cdots, x_n(t)), \\ \hat{y}_j(t) = \hat{h}_j(x_1(t), \cdots, x_n(t)), j = 1, \cdots, p. \end{cases} \tag{93}$$

那么输出调节问题就是设计一个如下形式的状态反馈：

$$\begin{cases} u_1(t+1) = g_1(x_1(t), \cdots, x_n(t), \hat{x}_1(t), \cdots, \hat{x}_n(t)), \\ \vdots \\ u_m(t+1) = g_m(x_1(t), \cdots, x_n(t), \hat{x}_1(t), \cdots, \hat{x}_n(t)), \end{cases} \tag{94}$$

使得存在一个整数 $\tau > 0$，对于任意的初始状态 $x_1(t), \cdots, x_n(t), \hat{x}_1(t), \cdots, \hat{x}_n(t)$，$t > \tau$ 使得

$$Y(t) = \hat{Y}(t), \tag{95}$$

其中 $Y(t) = (y_1(t), \cdots, y_p(t))$，$\hat{Y}(t) = (\hat{y}_1(t), \cdots, \hat{y}_p(t))$.

文献[111]提出了一个关于输出调节问题可解的充要条件，并且还提出了一个有效的方法用于设计输出调节控制器.

4.6 符号动力学

由于 BCNs 的所有轨迹都可以看成是在有限类型的 BNs 之间的切换，因此符号动力学(SDs)的一些方法可以用于研究 BCNs.文献[29]定义并计算了 ζ 函数来表示 BNs 的循环的个数、循环的长度以及来度量有多少控制的拓扑熵.通过用核网络模型来对哺乳动物的细胞变化进行建模，之后利用文献[29]中所得到的结果来研究调节的核网络，进而得到哺乳动物细胞周期.文献[29]通过 ζ 函数得到了哺乳动物的细胞周期和拓扑熵.

考虑系统(89).给定集合 $\mathscr{A}$，在 $\mathscr{A}$ 中定义一系列带有符号的串 $\mathscr{T}$，令 $\mathscr{X}_{\mathscr{T}}$ 表示不包含任何输入串 $\mathscr{T}$ 的无限符号序列，定义切换操作 $\sigma: \mathscr{X}_{\mathscr{T}} \to \mathscr{X}_{\mathscr{T}}$.如果 $\mathscr{T}$ 是有限集，那么动态系统 $(\mathscr{X}_{\mathscr{T}}, \sigma)$ 被称为是有限模式的切换(SFT).文献[29]提出了一个重要的定理如下：BCNs 的所有状态轨迹是集合 $\{\delta_{2^n}^1, \cdots, \delta_{2^n}^{2^n}\}$ 上的一步 SFT.进一步，BCN 的 ζ 函数定义如下：

$$\zeta(t) = \left(t^{2^n} P_M\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{-1},$$

其中 $P_M = \det(sI_{2^n} - M)$，$M = L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_{2^m}$，$L_i = L \ltimes \delta_{2^m}^i$.因此，BCNs 的拓扑结构可以用 ζ 函数来分析.另一方面，BCNs 的拓扑结构定义如下：

$$h_s = \lim_{j \to \infty} \frac{1}{j} \log |\mathscr{A}_s^j|,$$

其中 $\mathscr{A}_s$ 长度为 j 的状态轨迹集合,因此可以得到 BN 的拓扑熵为 0.

5 总结

本文旨在介绍基于矩阵 STP 乘积的逻辑网络和有限值系统的相关研究结果.首先,主要介绍了逻辑网络的一些基本问题的研究,包括可控性、可观性、稳定性、镇定性、扰动解耦、同步以及最优控制等问题.第 1 章介绍了矩阵 STP,包括逻辑函数的代数表达和逻辑动态系统的代数表达.第 2 章回顾了逻辑网络的一些基本问题的研究现状,诸如可控性、可观性、稳定性、镇定性、扰动解耦控制、同步、最优控制、大规模系统等.第 3 章回顾了广义布尔(控制)网络的一些研究,包括概率逻辑网络、奇异逻辑网络、混合值逻辑网络、带时滞的逻辑网络、带脉冲的逻辑网络、带切换的逻辑网络等.第 4 章对最近关于逻辑网络的一些研究进行了归纳,比如牵引控制、系统分解、轨迹控制、输出追踪、符号动力学等问题.

本文的重点在于介绍基于 STP 方法来处理逻辑网络和有限值系统的一些研究.矩阵 STP 方法能够有效地将逻辑函数转化为代数形式,进而对逻辑系统进行系统深入的研究.本文的主要目的是为了给相关的研究人员提供较为详细的信息,便于在 STP 的框架下来研究逻辑网络.尽管该领域已有了巨大的发展,但仍有许多非常值得研究的问题.在几年前,诸如可控性、可观性、同步、稳定性和镇定性等问题都是很显然的问题,现在,关于这些问题已经有了很多好的结果.最近几年,逻辑网络也有了很多新的研究课题.本文介绍了一些逻辑网络相关的新问题,诸如牵引控制、输出追踪、系统分解等,它们都有待于进一步深入研究.

希望本文所提到的内容、例子和模型可以为刚进入相关研究的人员提供一个好的综述.

其他作者简介

李海涛,男,博士,教授,主要研究方向为有限值系统的分析与控制.haitaoli09@gmail.com

刘洋,男,博士,教授,主要研究方向为多复变与系统控制理论.liuyang4740@gmail.com

李芳菲,女,博士,副教授,主要研究方向为布尔控制网络、信息物理系统等.li_fangfei@163.com

曹进德,男,博士,教授,博士生导师,IEEE Fellow,欧洲科学院院士,主要研究复杂网络与复杂系统、神经动力学与优化、多智能体系统、布尔控制网络等.jdcao@seu.edu.cn

参考文献
References

[1] Kauffman S A.Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets[J].Journal of Theoretical Biology,1969,22(3):437-467

[2] Cheng D Z,He F H,Qi H S,et al.Modeling,analysis and control of networked evolutionary games[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2015,60(9):2402-2415

[3] Li H T,Wang Y Z.Boolean derivative calculation with application to fault detection of combinational circuits via the semi-tensor product method[J].Automatica,2012,48(4):688-693

[4] Cheng D Z,Feng J E,LÜ H L.Solving fuzzy relational equations via semitensor product[J].IEEE Transactions on Fuzzy Systems,2012,20(2):390-396

[5] Xu X R,Hong Y G.Matrix expression and reachability analysis of finite automata[J].Journal of Control Theory and Applications,2012,10(2):210-215

[6] Liu Z B,Wang Y Z,Cheng D Z.Nonsingularity of feedback shift registers[J].Automatica,2015,55(C):247-253

[7] Shmulevich I,Dougherty E R,Kim S,et al.Probabilistic Boolean networks:A rule-based uncertainty model for gene regulatory networks[J].Bioinformatics,2002,18(2):261-274

[8] Cheng D Z,Qi H S,Li Z Q.Analysis and control of Boolean networks:A semi-tensor product approach[M].New York:Springer Science & Business Media,2010

[9] Cheng D Z,Qi H S.A linear representation of dynamics of Boolean networks[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2010,55(10):2251-2258

[10] Zhong J,Lu J Q,Liu Y,et al.Synchronization in an array of output-coupled Boolean networks with time delay[J].IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems,2014,25(12):2288-2294

[11] Zhong J,Lu J Q,Huang T W,et al.Synchronization of master-slave Boolean networks with impulsive effects:Necessary and sufficient criteria[J].Neurocomputing,2014,143:269-274

[12] Zhang H,Wang X Y,Lin X H.Synchronization of Boolean networks with different update schemes[J].IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics,2014,11(5):965-972

[13] Lu J Q,Zhong J,Ho D W C,et al.On controllability of delayed Boolean control networks[J].SIAM Journal on Control and Optimization,2016,54(2):475-494

[14] Liu Y,Lu J Q,Wu B.Some necessary and sufficient conditions for the output controllability of temporal Boolean control networks[J].ESAIM:Control,Optimization and Calculus of Variations,2014,20:158-173

[15] Li H T,Wang Y Z,Liu Z B.Stability analysis for switched Boolean networks under arbitrary switching signals[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2014,59(7):

1978-1982

[16] Li F F, Sun J T. Stability and stabilization of Boolean networks with impulsive effects[J]. Systems & Control Letters, 2012, 61(1): 1-5

[17] Li F F, Sun J T. Asymptotic stability of a genetic network under impulsive control[J]. Physics Letters A, 2010, 374(31/32): 3177-3184

[18] Chen H, Li X D, Sun J T. Stabilization, controllability and optimal control of Boolean networks with impulsive effects and state constraints[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(3): 806-811

[19] Feng J E, Yao J, Cui P. Singular Boolean networks: Semi-tensor product approach[J]. Science China Information Sciences, 2013, 56(11): 1-14

[20] Yang M, Chu T G. Evaluation of attractors and basins of asynchronous random Boolean networks[J]. Physical Review E, 2012, 85(2): 056105

[21] Luo C, Wang X Y, Liu H. Controllability of asynchronous Boolean multiplex control networks[J]. Chaos, 2014, 24(3): 033108

[22] Liu Y, Chen H W, Wu B. Controllability of Boolean control networks with impulsive effects and forbidden states [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2014, 37(1): 1-9

[23] Meng M, Feng J E. Topological structure and the disturbance decoupling problem of singular Boolean networks [J]. IET Control Theory & Applications, 2014, 8(13): 1247-1255

[24] Han M, Liu Y, Tu Y S. Controllability of Boolean control networks with time delays both in states and inputs[J]. Neurocomputing, 2014, 129: 467-475

[25] Li H T, Wang Y Z. Controllability analysis and control design for switched Boolean networks with state and input constraints [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2015, 53(3): 2955-2979

[26] Yang M, Li R, Chu T G. Construction of a Boolean model of gene and protein regulatory network with memory[J]. Neural Networks, 2014, 52(4): 18-24

[27] Li F F, Sun J T. Controllability of Boolean control networks with time delays in states [J]. Automatica, 2011, 47(3): 603-607

[28] Hinkelmann F, Brandon M, Guang B, et al. ADAM: Analysis of discrete models of biological systems using computer algebra [J]. BMC Bioinformatics, 2011, 12(1): 295

[29] Hochma G, Margaliot M, Fornasini E, et al. Symbolic dynamics of Boolean control networks [J]. Automatica, 2013, 49(8): 2525-2530

[30] Zhang K Z, Zhang L J, Xie L H. Invertibility and nonsingularity of Boolean control networks [J]. Automatica, 2015, 60(C): 155-164

[31] Chen H, Sun J T. Global stability and stabilization of switched Boolean network with impulsive effects[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 224(4): 625-634

[32] Li F F, Lu X W. Stability of a switched Boolean network via designing switching laws [J]. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 2016, 15(2): 491-502

[33] Fornasini E, Valcher M E. On the periodic trajectories of Boolean control networks[J]. Automatica, 2013, 49(5): 1506-1509

[34] Li F F. Global stability at a limit cycle of switched Boolean networks under arbitrary switching signals[J]. Neurocomputing, 2014, 133(8): 63-66

[35] Li H T, Wang Y Z, Liu Z B. Function perturbation impact on the topological structure of Boolean networks[C] // The 10th World Congress on Intelligent Control and Automation, 2012: 1241-1246

[36] Li H T, Wang Y Z. Consistent stabilizability of switched Boolean networks[J]. Neural Networks, 2013, 46(C): 183-189

[37] Meng M, Feng J E. Function perturbations in Boolean networks with its application in a D. melanogaster gene network[J]. European Journal of Control, 2014, 20(2): 87-94

[38] Zou Y L, Zhu J D. Cycles of periodically time-variant Boolean networks [J]. Automatica, 2015, 51(C): 175-179

[39] Zhao Y Q, Long F. Stochastic stability of Boolean networks with Markov jump[C] // The 26th Chinese Control and Decision Conference, 2014: 4346-4350

[40] Li F F, Yu Z X. Feedback control and output feedback control for the stabilization of switched Boolean networks [J]. International Journal of Control, 2016, 89(2): 337-342

[41] Li H T, Wang Y Z. Output feedback stabilization control design for Boolean control networks [J]. Automatica, 2013, 49(12): 3641-3645

[42] Li F F. Pinning control design for the stabilization of Boolean networks [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2015, 27(7): 1585-1590

[43] Bof N, Fornasini E, Valcher M E. Output feedback stabilization of Boolean control networks[J]. Automatica, 2015, 57(C): 21-28

[44] Cheng D Z, Qi H S, Li Z Q, et al. Stability and stabilization of Boolean networks[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2011, 21(2): 134-156

[45] Chen H W, Sun J T. Stability and stabilization of context sensitive probabilistic Boolean networks[J]. IET Control Theory & Applications, 2014, 8(17): 2115-2121

[46] Chen H W, Sun L J, Liu Y. Partial stability and stabilization of Boolean networks[J]. International Journal of Systems Science, 2016, 47(9): 2119-2127

[47] Guo Y Q, Wang P, Gui W H, et al. Set stability and set stabilization of Boolean control networks based on invariant subsets [J]. Automatica, 2015, 61: 106-112

[48] Yang Q Q, Li H T, Liu Y S. Pinning control design for feedback stabilization of constrained Boolean control networks [J]. Advances in Difference Equations, 2016, 2016: 182

[49] Liu Y, Cao J D, Sun L J, et al. Sampled-data state feedback stabilization of Boolean control networks [J]. Neural Computation, 2016, 28(4): 778-799

[50] Li H T, Wang Y Z, Liu Z B. Simultaneous stabilization for a set of Boolean control networks[J]. Systems & Control Letters, 2013, 62(12): 1168-1174

[51] Li H T,Wang Y Z.Minimum-time state feedback stabilization of constrained Boolean control networks[J].Asian Journal of Control,2015,18(5),DOI:10.1002/asjc.1234

[52] Li R,Yang M,Chu T G.State feedback stabilization for Boolean control networks[J].IEEE Transactions on Automatic Control.2013,58(7):1853-1857

[53] Li R,Yang M,Chu T G.State feedback stabilization for probabilistic Boolean networks[J].Automatica,2014,50(4):1272-1278

[54] Liu R J,Qian C J,Liu S Q,et al.State feedback control design for Boolean networks [J].BMC Systems Biology,2016,10(3):70

[55] Cheng D Z,Qi H S.Controllability and observability of Boolean control networks[J].Automatica,2009,45:1659-1667

[56] Li H T,Wang Y Z.On reachability and controllability of switched Boolean control networks[J].Automatica,2012,48(11):2917-2922

[57] Cheng D Z.Input-state approach to Boolean networks[J].IEEE Transactions on Neural Networks,2009,20(3):512-521

[58] Cheng D Z,Zhao Y.Identification of Boolean control networks[J].Automatica,2011,47(4):702-710

[59] Chen H W,Sun J T.A new approach for global controllability of higher order Boolean control network[J].Neural Networks,2013,39C(1):12-17

[60] Laschov D,Margaliot M.Controllability of Boolean control networks via the Perron-Frobeniustheory[J].Automatica,2012,48(6):1218-1223

[61] Li F F,Sun J T.Controllability of probabilistic Boolean control networks[J].Automatica,2011,47(12):2765-2771

[62] Li F F,Sun J T.Controllability of higher order Boolean control networks[J].Applied Mathematics and Computation,2012,219(1):158-169

[63] Zhang L J,Feng J E,Meng M.MIS approach analyzing the controllability of switched Boolean networks with higher order[J].International Journal of Control,Automation and Systems,2014,12(2):450-457

[64] Lu J Q,Zhong J,Huang C,et al.On pinning controllability of Boolean control networks[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2016,61(6):1658-1663

[65] Liu Y,Chen H W,Lu J Q,et al.Controllability of probabilistic Boolean control networks based on transition probability matrices[J].Automatica,2015,52(C):340-345

[66] Li Z Q,Song J L.Controllability of Boolean control networks avoiding states set[J].Science China Information Sciences,2014,57(3):1-13

[67] Zhang L J,Zhang K Z.Controllability of time-variant Boolean control networks and its application to Boolean control networks with finite memories[J].Science China Information Sciences,2013,56(10):1-12

[68] Zhao Y,Qi H S,Cheng D Z.Input-state incidence matrix of Boolean control networks and its applications[J].Systems & Control Letters,2010,59(12):767-774

[69] Chen H W,Liang J L,Wang Z D.Pinning controllability of autonomous Boolean control networks[J].Science China Information Sciences,2016,59(7):070107

[70] Zou Y L,Zhu J D.Reachability of higher-order logical control networks via matrix method[J].Applied Mathematics and Computation,2016,287/288(C):50-59

[71] Zhao Y,Cheng D Z.On controllability and stabilizability of probabilistic Boolean control networks[J].Science China Information Sciences,2014,57(1):1-14

[72] Cheng D Z,Qi H S,Liu T,et al.A note on observability of Boolean control networks[J].Systems & Control Letters,2016,87:76-82

[73] Fornasini E,Valcher M E.Observability,reconstructibility and state observers of Boolean control networks[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2013,58(6):1390-1401

[74] Laschov D,Margaliot M,Even G.Observability of Boolean networks:A graph-theoretic approach[J].Automatica,2013,49(8):2351-2362

[75] Meng M,Li B W,Feng J E.Controllability and observability of singular Boolean control networks[J].Circuits,Systems,and Signal Processing,2015,34(4):1233-1248

[76] Zhang L J,Feng J E,Yao J.Controllability and observability of switched Boolean control networks[J].IET Control Theory & Applications,2012,6(16):2477-2484

[77] Zhang L J,Zhang K Z.Controllability and observability of Boolean control networks with time-variant delays in states[J].IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems,2013,24(9):1478-1484

[78] Li F F,Sun J T.Observability analysis of Boolean control networks with impulsive effects[J].IET Control Theory & Applications,2011,5(14):1609-1616

[79] Li F F,Sun J T,Wu Q D.Observability of Boolean control networks with state time delays[J].IEEE Transactions on Neural Networks,2011,22(6):948-954

[80] Li R,Yang M,Chu T G.Observability conditions of Boolean control networks[J].International Journal of Robust and Nonlinear Control,2014,24(17):2711-2723

[81] Zhang K Z,Zhang L J.Observability of Boolean control networks:A unified approach based on finite automata[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2016,61(9):2733-2738

[82] Zhao J,Liu Z B.Observability of probabilistic Boolean networks[C]//The 34th Chinese Control Conference,2015:183-186

[83] Zhang K Z,Zhang L J,Xie L H.Finite automata approach to observability of switched Boolean control networks[J].Nonlinear Analysis:Hybrid Systems,2016,19:186-197

[84] Cheng D Z.Disturbance decoupling of Boolean control networks[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2011,56(1):2-10

[85] Li H T,Wang Y Z,Xie L H,et al.Disturbance decoupling control design for switched Boolean control networks[J].Systems & Control Letters,2014,72(1):1-6

[86] Liu Y,Li B W,Lou J G.Disturbance decoupling of singular Boolean control networks[J].IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics,2016,13(6):1194-1200

[87] Yang M, Li T, Chu T G. Controller design for disturbance decoupling of Boolean control networks[J]. Automatica, 2013, 49(1): 273-277
[88] Yao J, Feng J E. Comments on "Disturbance decoupling of Boolean control networks"[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(12): 3001-3002
[89] Li F F, Lu X W. Complete synchronization of temporal Boolean networks[J]. Neural Networks, 2013, 44C(8): 72-77
[90] Li F F. Feedback control design for the complete synchronization of two coupled Boolean networks [J]. International Journal of Systems Science, 2016, 47(12): 2996-3003
[91] Li F F, Yu Z X. Anti-synchronization of two coupled Boolean networks[J]. Journal of the Franklin Institute, 2016, 353(18): 5013-5024
[92] Li R, Chu T G. Complete synchronization of Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2012, 23(5): 840-846
[93] Li F F. Synchronization of coupled large-scale Boolean networks Chaos: An Interdisciplinary[J]. Journal of Nonlinear Science, 2014, 24(1): 013115
[94] Liu Y, Sun L J, Lu J Q, et al. Feedback controller design for the synchronization of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2016, 27 (9): 1991-1996
[95] Wei Q, Xie C J, Liang Y, et al. Delay synchronization of temporal Boolean networks[J]. AIP Advances, 2016, 6 (1): 015013
[96] Lu J Q, Zhong J, Tang Y, et al. Synchronization in output-coupled temporal Boolean networks [J]. Scientific Reports, 2014, 4: 6292
[97] Lu J Q, Zhong J, Li L L, et al. Synchronization analysis of master-slave probabilistic Boolean networks[J]. Scientific Reports, 2015, 5: 13437
[98] Yang Z D, Chu T G. Intermittent synchronization of cascaded Boolean networks with time delays [C]// The 2015 Chinese Intelligent Systems Conference, 2016: 503-510
[99] Li F F. Pinning control design for the synchronization of two coupled Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2016, 63(3): 309-313
[100] Chen H W, Liu Y, Lu J Q. Synchronization criteria for two Boolean networks based on logical control [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2013, 23 (11): 1350178
[101] Chen H W, Liang J L, Liu Y, et al. Synchronization analysis of Boolean networks based on equivalence[J]. IET Control Theory & Applications, 2015, 9(15): 2242-2248
[102] Chen H W, Liang J L, Huang T W, et al. Synchronization of arbitrarily switched Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2017, 28(3): 612-619
[103] Li R, Yang M, Chu T G. Synchronization of Boolean networks with time delays[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 219(3): 917-927
[104] Zhang H G, Tian H, Wang Z S, et al. Synchronization analysis and design of coupled Boolean networks based on periodic switching sequences[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2016, 27 (12): 2754-2759
[105] Tian H, Wang Z S, Hou Y F, et al. State feedback controller design for synchronization of master-slave Boolean networks based on core input-state cycles[J]. Neurocomputing, 2016, 174(B): 1031-1037
[106] Li R, Chu T G. Synchronization in an array of coupled Boolean networks[J]. Physics Letters A, 2012, 376(45): 3071-3075
[107] Li R, Yang M, Chu T G. Synchronization design of Boolean networks via the semi-tensor product method [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2013, 24(6): 996-1001
[108] Fornasini E, Valcher M E. Feedback stabilization, regulation and optimal control of Boolean control networks [C]// American Control Conference, 2014, 59 (5): 1981-1986
[109] Li H T, Wang Y Z, Xie L H. Output tracking control of Boolean control networks via state feedback: Constant reference signal case[J]. Automatica, 2015, 59: 54-59
[110] Li H T, Wang Y Z, Guo P L. State feedback based output tracking control of probabilistic Boolean networks[J]. Information Sciences, 2016, 349/350: 1-11
[111] Li H T, Xie L H, Wang Y Z. Output regulation of Boolean control networks[C]// IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, DOI: 10.1109/TSMC.2015.2507162
[112] Li H T, Wang Y Z. Output tracking of switched Boolean networks under open-loop/closed-loop switching signals [J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2016, 22: 137-146
[113] Fornasini E, Valcher M E. Fault detection problems for Boolean networks and Boolean control networks[C]// The 34th Chinese Control Conference 2015: 1-8
[114] Fornasini E, Valcher M E. Fault detection of Boolean control networks [C] // The 53rd IEEE Conference on Decision and Control, 2014: 6542-6547
[115] Fornasini E, Valcher M E. Fault detection analysis of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(10): 2734-2739
[116] Zou Y L, Zhu J D. Decomposition with respect to outputs for Boolean control networks[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2014, 47: 10331-10336
[117] Zou Y L, Zhu J D. Algebraic conditions for system decomposition of Boolean control networks[C]// The 33rd Chinese Control Conference, 2014: 2580-2585
[118] Cheng D Z, Li Z Q, Qi H S. Realization of Boolean control networks[J]. Automatica, 2010, 46(1): 62-69
[119] Zou Y L, Zhu J D. System decomposition with respect to inputs for Boolean control networks[J]. Automatica, 2014, 50(4): 1304-1309
[120] Zou Y L, Zhu J D. Kalman decomposition for Boolean control networks[J]. Automatica, 2015, 54(1): 65-71
[121] Li H T, Xie L H, Wang Y Z. On robust control invariance of Boolean control networks[J]. Automatica, 2016, 68 (C): 392-396
[122] Li H T, Wang Y Z. Robust stability and stabilization of

Boolean networks with disturbance inputs [J]. International Journal of Systems Science,2016,48(4):750-756

[123] Laschov D,Margaliot M.A maximum principle for single-input Boolean controlnetworks[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2011,56(4):913-917

[124] Laschov D,Margaliot M.A Pontryagin maximum principle for multi-input Boolean control networks[J].Recent Advances in Dynamics and Control of Neural Networks,2012,

[125] Li F F,Sun J T.Controllability and optimal control of a temporal Boolean network[J].Neural Networks,2012,34(4):10-17

[126] Li H T,Wang Y Z,Liu Z B.A semi-tensor product approach to pseudo-Boolean functions with application to Boolean control networks[J].Asian Journal of Control,2014,16(4):1073-1081

[127] Liu Y,Chen H W,Wu B,et al.A Mayer-type optimal control for multivalued logic control networks with undesirable states[J].Applied Mathematical Modelling,2015,39(12):3357-3365

[128] Chen H,Sun J T.Output controllability and optimal output control of state-dependent switched Boolean control networks [J]. Automatica, 2014, 50 (7):1929-1934

[129] Meng M,Feng J E.Optimal control problem of singular Boolean control networks [J]. International Journal of Control,Automation and Systems,2015,13(2):266-273

[130] Fornasini E,Valcher M E.Optimal control of Boolean control networks [J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2014,59(5):1258-1270

[131] Laschov D, Margaliot M. Minimum-time control of Boolean networks[J].SIAM Journal on Control and Optimization,2013,51(4):2869-2892

[132] Li F F,Lu X W.Minimum energy control and optimal satisfactory control of Boolean control network[J].Physics Letters A,2013,377(43):3112-3118

[133] Li F F,Lu X W,Yu Z X.Optimal control algorithms for switched Boolean network[J].Journal of the Franklin Institute,2014,351(6):3490-3501

[134] Fornasini E, Valcher M E. Recent developments in Boolean networks control[J].Journal of Control and Decision,2016,3(1):1-18

[135] Cheng D Z,Qi H S,Xue A C.A survey on semi-tensor product of matrices[J].Journal of Systems Science and Complexity,2007,20(2):304-322

[136] Cheng D Z, Qi H S, Zhao Y. An introduction to semitensor product of matrices and its applications[M].Singapore:World Scientific,2012

[137] Akutsu T,Hayashida M,Ching W K,et al.Control of Boolean networks:hardness results and algorithms for tree structured networks[J].Journal of Theoretical Biology,2007,244(4):670-679

[138] Zhao Y, Kim J, Filippone M. Aggregation algorithm towards large-scale Boolean network analysis[J].IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58 (8):1976-1985

[139] Zhao Y,Ghosh B K,Cheng D Z.Control of large-scale Boolean networks via network aggregation[J].IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems,2016,27(7):1527-1536

[140] Li H T,Wang Y Z.Logical matrix factorization with application to topological structure analysis of Boolean network [J].IEEE Transactions on Automatic Control,2015,60(5):1380-1385

[141] Meng M,Lam J,Feng J E,et al.l1-gain analysis and model reduction problem for Boolean control networks [J].Information Sciences,2016,348(C):68-83

[142] Li Z Q,Cheng D Z.Algebraic approach to dynamics of multivalued networks[J].International Journal of Bifurcation and Chaos,2010,20(3):561-582

[143] Cheng D Z,Qi H S,Zhao Y.Analysis and control of general logical networks:An algebraic approach[J].Annual Reviews in Control,2012,36(1):11-25

[144] Cheng D Z,Xu X R.Bi-decomposition of multi-valued logical functions and its applications [J]. Automatica,2013,49(7):1979-1985

[145] Jia G Y,Meng M,Feng J E.Function perturbation of mix-valued logical networks with impacts on limit sets[J].Neurocomputing,2016,207:428-436

[146] Qi H S,Cheng D Z.Logic and logic-based control[J].Journal of Control Theory and Applications,2008,6(1):26-36

[147] Zhao Y,Li Z Q,Cheng D Z.Optimal control of logical control networks [J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2011,56(8):1766-1776

[148] Zhao G D,Wang Y Z,Li H T.Invertibility of higher order k-valued logical control networks and its application in trajectory control[J].Journal of the Franklin Institute,2016,353(17):4667-4679

[149] Li F F,Sun J T.Stability and stabilization of multivalued logical networks[J].Nonlinear Analysis:Real World Applications,2011,12(6):3701-3712

[150] Liu Z B,Wang Y Z.Reachability/controllability of high order mix-valued logical networks[J].Journal of Systems Science and Complexity,2013,26(3):341-349

[151] Zhang L Q,Feng J E,Feng X H,et al.Further results on disturbance decoupling of mix-valued logical networks [J].IEEE Transactions on Automatic Control,2014,59(6):1630-1634

[152] Liu Z B, Wang Y Z. Disturbance decoupling of mix-valued logical networks via the semi-tensor product method[J].Automatica,2012,48(8):1839-1844

[153] Liu Z B,Wang Y Z,Li H T.Controllability of context sensitive probabilistic mix-valued logical control networks with constraints[J].Asian Journal of Control,2014,17(1):246-254

[154] Liu Z B,Wang Y Z,Li H T.Two kinds of optimal controls for probabilistic mix-valued logical dynamic networks [J].Science China Information Sciences,2014,57(5):1-10

[155] Li F F,Sun J T.Synchronization analysis for multivalued logical networks[J].International Journal of Bifurcation and Chaos,2013,23(4):1350059

[156] Meng M,Feng J E.Synchronization of interconnected multi-valued logical networks[J].The 32nd Chinese Con-

trol Conference, 2013, 16(6): 6496-6501
[157] Zhong J, Lu J Q, Huang T W, et al Controllability and synchronization analysis of identical-hierarchy mixed-valued logical control networks[C]//IEEE Transactions on Cybernetics, 2016: 1-12
[158] Wang Y, Feng J E, Meng M. Topological structure and optimal control of singular mix-valued logical networks [J]. Control Theory and Technology, 2015, 13(4): 321-332
[159] Cheng D Z, Zhao Y, Xu T T. Receding horizon based feedback optimization for mix-valued logical networks [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(12): 3362-3366
[160] Wu Y H, Shen T L. An algebraic expression of finite horizon optimal control algorithm for stochastic logical dynamical systems[J]. Systems & Control Letters, 2015, 82(3): 108-114
[161] Wang Y Z, Zhang C H, Liu Z B. A matrix approach to graph maximum stable set and coloring problems with application to multi-agent systems[J]. Automatica, 2012, 48(7): 1227-1236
[162] Meng M, Feng J E. A matrix approach to hypergraph stable set and coloring problems with its application to storing problem[J]. Journal of Applied Mathematics, 2014(3): 1-9
[163] Zhong J, Lu J Q, Huang C, et al. Finding graph minimum stable set and core via semi-tensor product approach [J]. Neurocomputing, 2016, 174(B): 588-596
[164] Zhao D W, Peng H P, Li L X, et al. Novel way to research nonlinear feedback shift register[J]. Science China Information Sciences, 2014, 57(9): 1-14
[165] Zhong J H, Lin D D. A new linearization method for nonlinear feedback shift registers[J]. Journal of Computer & System Sciences, 2015, 81(4): 783-796
[166] Zhong J H, Lin D D. Driven stability of nonlinear feedback shift registers with inputs [J]. IEEE Transactions on Communications, 2016, 64(6): 2274-2284
[167] Zhong J H, Lin D D. Stability of nonlinear feedback shift registers[J]. Science China Information Sciences, 2016, 59(1): 1-12
[168] Han X G, Chen Z Q, Liu Z X, et al. Calculation of siphons and minimal siphons in petri nets based on semi-tensor product of matrices[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2015, 47(3): 1-6
[169] Xu X R, Hong Y G. Matrix approach to model matching of asynchronous sequential machines[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(11): 2974-2979
[170] Cheng D Z, Qi H S, He F H, et al. Semi-tensor product approach to networked evolutionary games[J]. Control Theory and Technology, 2014, 12(2): 198-214
[171] Liu X Y, Zhu J D. On potential equations of finite games [J]. Automatica, 2016, 68(C): 245-253
[172] Zhu B, Xia X H, Wu Z. Evolutionary game theoretic demand-side management and control for a class of networked smart grid[J]. Automatica, 2016, 70: 94-100
[173] Zhao G D, Wang Y Z, Li H T. A matrix approach to the modeling and analysis of networked evolutionary games with time delays[J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2016, DOI: 10.1109/JAS.2016.7510259
[174] Zhao G D, Wang Y Z. Formulation and optimization control of a class of networked evolutionary games with switched topologies[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2016, 22: 98-107
[175] Zhao G D, Wang Y Z, Li H T. A matrix approach to modeling and optimization for dynamic games with random entrance[J]. Applied Mathematics and Computation, 2016, 290: 9-20
[176] Guo P L, Wang Y Z, Li H T. Algebraic formulation and strategy optimization for a class of evolutionary networked games via semi-tensor product method[J]. Automatica, 2013, 49(11): 3384-3389
[177] Cheng D Z, Xu T T, Qi H S. Evolutionarily stable strategy of networked evolutionary games[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2014, 25(7): 1335-1345
[178] Li H T, Wang Y Z. A matrix approach to latticized linear programming with fuzzy-relation inequality constraints [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2013, 21(4): 781-788
[179] 葛爱冬,王玉振,魏爱荣,等.多变量模糊系统控制设计及其在并行混合电动汽车中的应用[J].控制理论与应用,2013,30(8):998-1004
GE Aidong, WANG Yuzhen, WEI Airong, et al. Control design for multi-variable fuzzy systems with application to parallel hybrid electric vehicles[J]. Control Theory & Applications, 2013, 30(8): 998-1004
[180] 段培永,吕红丽,冯俊娥,等.室内热舒适环境的模糊关系矩阵模型控制系统[J].控制理论与应用,2013,30(2):215-221
DUAN Peiyong, LÜ Hongli, FENG Jun'e, et al. Fuzzy relation matrix model control system for indoor thermal comfort[J]. Control Theory & Applications, 2013, 30(2): 215-221
[181] Liu Z B, Wang Y Z, Li H T. New approach to derivative calculation of multi-valued logical functions with application to fault detection of digital circuits[J]. IET Control Theory & Applications, 2014, 8(8): 554-560
[182] Laschov D, Margaliot M. Controllability of Boolean control networks via Perron-Frobenius theory[J]. Automatica, 2012, 48(6): 1218-1223
[183] Zhang K Z, Zhang L J, Mou S S. An application of invertibility of Boolean control networks to the control of the mammalian cell cycle[C]//IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics, 2016: 225-229
[184] Wu Y H, Shen T L. A logical dynamical systems approach to modeling and control of residual gas fraction in IC engines[J]. The 7th IFAC Symposium on Advances in Automotive Control, 2013, 46(21): 495-500
[185] Huang S, Ingber D E. Shape-dependent control of cell growth, differentiation, and apoptosis: switching between attractors in cell regulatory networks[J]. Experimental Cell Research, 2000, 261(1): 91-103
[186] Khatri C G, Rao C R. Solutions to some functional equations and their applications to characterization of probability distributions[J]. Sankhyā: The Indian Journal of

Statistics,Series A,1968,30(2):167-180

[187] Cheng D Z.Structure of matrices under equivalence[M]. 2016,arXiv:1605.09523

[188] Cheng D Z,Li Z Q,Qi H S.Canalizing Boolean mapping and its application to disturbance decoupling of Boolean control networks [C]//IEEE International Conference on Control and Automation,2009:7-12

[189] Yang M,Chu T G.Finding all controllers for disturbance decoupling of Boolean control networks[C]//The 10th World Congress on Intelligent Control and Automation, 2012:1344-1349

[190] Yang M,Li R,Chu T G.A new method and application for controlling the steady-state probability distributions of probabilistic Boolean networks [C] // 2014 IEEE Congress on Evolutionary Computation,2014:1490-1495

[191] Li H T,Wang Y Z,Liu Z B.Existence and number of fixed points of Boolean transformations via the semitensor product method[J].Applied Mathematics Letters,2012, 25(8):1142-1147

[192] Chen H W,Liang J L,Lu J Q.Partial synchronization of interconnected Boolean networks[J].IEEE Transactions on Cybernetics,2016,47(1):258

[193] Laschov D, Margaliot M. Mathematical modeling of the lambda switch: A fuzzy logic approach[J].Journal of Theoretical Biology,2009,260(4):475-489

[194] Laschov D,Margaliot M,Even G.Observability of Boolean networks is NP-hard [C]//2012 IEEE 27th Convention of Electrical & Electronics Engineers in Israel,2012:1-5

[195] Laschov D, Margaliot M. On Boolean control networks with maximal topological entropy[J].Automatica,2014, 50(11):2924-2928

[196] Fornasini E,Valcher M E.Observability and reconstructibility of Boolean control networks [C] // IEEE 51st Annual Conference on Decision and Control, 2012: 2574-2580

[197] Rushdi A M,Ghaleb F A.A tutorial exposition of semitensor products of matrices with a stress on their representation of Boolean functions[J].Journal of King Abdulaziz University,2016,5:3-41

[198] Gao B,Li L X,Peng H P,et al.Principle for performing attractor transits with single control in Boolean networks [J].Physical Review E,2013,88(6):062706

[199] Zhang K Z,Zhang L J. Controllability of probabilistic Boolean control networks with time-variant delays in states [C]//The 52th IEEE Conference on Decision and Control,2013:7211-7216

[200] Berman A,Plemmons R.Nonnegative matrices in mathematical sciences[M].New York:Academic Press,1979

[201] Liu Z B,Wang Y Z,Li H T.Disturbance decoupling of multi-valued logical networks [C]//The 30th Chinese Control Conference,2011:93-96

[202] Silvescu A,Honavar V.Temporal Boolean network models of genetic networks and their inference from gene expression time series[J].Complex Systems,2001,13(1): 61-78

[203] Zhong J,Lu J Q,Huang T W,et al.Controllability and synchronization analysis of identical-hierarchy mixed-valued logical control networks[J].IEEE Transactions on Systems,Man,and Cybernetics:Systems,2016:DOI:10. 1109/TSMC.2015.2507162

[204] Yang Z D,Zhao J W,Li R,et al.General synchronization of multi-valued logical networks[C]//The 31st Chinese Control Conference,2012:7717-7721

[205] Yang Z D,Chu T G.General synchronization of cascaded Boolean networks within different domains of attraction [C]//The 2nd International Conference of Control,Dynamic Systems,and Robotics,2015:173

[206] Liu Q L. An optimal control approach to probabilistic Boolean networks[J].Physica A:Statistical Mechanics and its Applications,2012,391(24):6682-6689

[207] Shmulevich I, Dougherty E R, Zhang W. Gene perturbation and intervention in probabilistic Boolean networks[J].Bioinformatics,2002,18(10):1319-1331

[208] Li Z Q, Xiao H M. Weak reachability of probabilistic Boolean control networks[C]//The 2015 International Conference on Advanced Mechatronic Systems, 2015: 56-60

[209] Li F F,Sun J T.Stability and stabilization issue of probabilistic Boolean network[C]//The 30th Chinese Control Conference,2011,1416(3):6380-6385

[210] Wang Y,Feng J E,Meng M.Singular mix-valued logical networks and its optimal control[C]//The 27th Chinese Control and Decision Conference,2015:5904-5909

[211] Zhao Y.A Floyd-like algorithm for optimization of mix-valued logical control networks[C]//The 30th Chinese Control Conference,2011:1972-1977

[212] Yang Q Q,Li H T,Song P P.Pinning control design for state feedback stabilization of multi-valued logical control networks[C]//The 35th Chinese Control Conference, 2016:171-175

[213] Tian H,Zhang H W,Wang Z S,et al.Local stabilization of multi-valued logical control networks via state feedback [C] // The 28th Chinese Control and Decision Conference,2016:6912-6917

[214] Ding Y,Guo Y Q.Controllability of Boolean control networks with multiple bounded time-varying delays [C]// The 35th Chinese Control Conference,2016:7398-7403

[215] Chen H W,Wu B,Lu J Q.A minimum-time control for Boolean control networks with impulsive disturbances [J].Applied Mathematics and Computation,2016,273 (C):477-483

[216] Ieda M,Fu J D,Delgado-Olguin P,et al.Direct reprogramming of fibroblasts into functional cardiomyocytes by defined factors[J].Cell,2010,142:375-386

[217] Lin G Q,Ao B,Chen J W,et al.Modeling and controlling the two-phase dynamics of the p53 network:A Boolean network approach[J].New Journal of Physics,2014,16 (12):125010

[218] Rosin D P,Rontani D,Gauthier D J,et al.Control of synchronization patterns in neural-like Boolean networks[J]. Physical Review Letters,2013,110(10):104102

[219] Faryabi B,Vahedi G,Chamberland J F,et al.Intervention in context-sensitive probabilistic Boolean networks revisited [J].EURASIP Journal on Bioinformatics and Systems Biology,2009,DOI:10.1155/2009/360864

[220] Xiao Y F,Dougherty E R.The impact of function perturbations in Boolean networks[J].Bioinformatics,2007,23 (10):1265-1273

A survey on the applications of semi-tensor product of matrices on logical networks and other related systems

LU Jianquan[1] LI Haitao[2] LIU Yang[3] LI Fangfei[4] CAO Jinde[1]

1 School of Mathematics, Southeast University, Nanjing 210096

2 School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan 250014

3 College of Mathematics, Physics and Information Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004

4 School of Science, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237

Abstract This paper gives a survey on recent developments of logical networks and some related systems, including the background of logical networks, the theory of semi-tensor product (STP) of matrices, some fundamental works on logical networks, and some recent related works. In particular, some very recent interesting works for the past ten years are presented, concerning the topics of controllability, observability, stability and stabilization, synchronization, optimal control, disturbance decoupling, and so on. Since the method of STP has great potential in dealing with logical networks and some other related systems, a great attraction from domestic and oversea researchers has been paid on the study of STP and its applications. Some recent important research areas are also surveyed in this paper including pinning control, function perturbations, system decomposition, output tracking issues, symbolic dynamics, and so on. The main objective is to give a comprehensive introduction to the application of STP on logical networks and some other systems.

Key words semi-tensor product (STP) of matrices; logical networks; Boolean network