DOI:10.13878/j.cnki.jnuist.2017.03.008

张焕君[1]　王光臣[1]

基于不完备信息的投资组合风险管理:随机控制方法

摘要

随着倒向随机微分方程理论的不断发展和完善,其在数理金融中的应用越来越广泛,随机控制也逐渐成为研究投资组合风险管理问题的重要方法.本文侧重于展示基于不完备信息的随机控制方法在研究期权定价、均值-方差、期望效用最大化这三类投资组合问题中的简单应用.

关键词

不完备信息;倒向随机微分方程;随机控制;期权定价;均值-方差;效用函数

中图分类号 O231.3
文献标志码 A

收稿日期 2017-05-02
资助项目 国家自然科学优秀青年基金(61422305);山东省杰出青年基金(JQ201418)

作者简介

张焕君,女,博士生,主要研究方向为随机控制,金融工程等.zhhuanjun@ 163.com

王光臣(通信作者),男,博士,教授,主要研究方向为随机控制,随机滤波,金融工程等.wguangchen@ sdu.edu.cn

1 山东大学 控制科学与工程学院,山东,250061

0 引言

近些年来,金融危机频发,导致了全球性的经济大萧条,我国也深受其害,发生了“中航油”、“中储棉”等一系列金融风险暴露事件,造成了巨大的尽量经济损失.有效的金融风险管理可以减少金融风险可能造成的损失,尽量保证生产经营活动免受风险因素的干扰,因此,金融风险管理历来受到各国政府和学界的高度重视,并成为重要研究课题.

19 世纪的伟人马克思认为,一种科学只有在成功地运用数学时,才算达到真正完善的地步.用数学工具研究金融问题的最早尝试可追溯到 1900 年法国数学家巴施利叶(Louis Bachelier)撰写的博士学位论文《投机理论》,它试图用布朗运动预测巴黎股票交易所股票价格的上涨和下跌.1964 年,这篇 60 多页的博士论文由麻省理工学院翻译出版,后被视为用数学工具研究金融问题的开山之作.在我国,金融数学的发展相对较晚.20 世纪 90 年代初,山东大学数学学院彭实戈院士领导的科研小组研究了境外衍生产品的交易规则,发现了我国境外期货交易存在巨大金融风险.出于学者的社会责任感,彭院士奋笔疾书写了两封信,一封经山东大学潘承洞校长转呈山东省副省长;另一封经国家自然科学基金委转呈中央财经领导小组.彭院士在信中汇报了自己的最新研究发现,建议立即开展对衍生产品市场的风险管理研究工作.后来,山东省立即停止了境外期货交易,避免了大量国有资产的流失.国家自然科学基金委也高度重视,1996 年,以彭实戈院士担任首席科学家的“九五”重大科技公关项目“金融数学、金融工程和金融管理”正式通过了国家自然科学基金委答辩,开启了我国用数学工具研究金融问题的新篇章.

金融数学主要是运用现代数学理论和方法(如随机分析、随机最优控制、数学规划、现代计算方法等)对金融(投资、债券、基金、股票、期货、期权等金融工具)的理论和实践进行数量的分析研究.本文侧重于展示基于不完备信息的随机控制方法在期权定价、均值-方差、期望效用最大化等投资组合风险管理问题中的简单应用.

期权定价是期权合约中唯一随市场供求变化而改变的变量,它的高低直接影响到买卖双方的盈亏状况,是期权交易的核心问题.1973 年,Black 和 Scholes 在其论文《期权定价及公司债务》[1]中首次提出期权的一般定价公式,同年,Black、Scholes 和 Merton 成功求解了

Black-Scholes 偏微分方程,得到了欧式看涨期权和看跌期权定价的显式解.此后,Black-Scholes 公式被逐渐应用到包括期权在内的各类衍生产品定价中,并最终成为金融机构设计金融新产品的重要依据.为此,Scholes 和 Merton 于 1997 年 10 月获得了诺贝尔经济学奖(注:Black 已故,无缘获得诺贝尔奖).1976 年,Cox 和 Ross[2] 给出了风险中性定价方法.1981 年,Harrison 和 Pliska[3] 通过了等价鞅测度理论建立了无套利定价与风险中性定价的联系,这便是资产定价的基本定理.Delbaen 和 Schachermayer[4-5]、Jacod 和 Shiryaev[6] 在更一般的随机模型下发展了资产定价的基本定理.为了更好地解释市场特性,人们进一步推广了几何布朗运动模型.主要分为两类,一类是随机波动率模型[7-10],另一类是带跳的随机扩散模型,包括泊松跳过程(Merton[11])和一般的 Levy 过程(Geman 等[12]、Duffie 等[13]).2007 年,吴臻和王光臣[14]研究了不完备信息下股票付息且存贷款利率不同的期权定价问题,给出了 Black-Scholes 期权定价公式.

投资组合选择的基本问题是如何将财富分配到不同的资产中以达到分散风险、确保收益之目的.均值-方差理论以及效用函数是处理投资组合问题的两个不同工具,由效用函数决定的投资组合,一般情况下不是均值-方差有效的,但二次效用函数除外[15].关于均值-方差与效用函数的具体比较,可参见文献[16-20].这一领域的开创工作可追溯到 1952 年 Markowtiz[21] 提出的均值-方差分析方法,这种方法被普遍认为是现代金融学、分析金融学的开端,Markowtiz 也因此获得了诺贝尔经济学奖.值得注意的是,绝大多数关于投资组合的研究均假设投资者准确地知道金融市场上的所有信息,例如,资产收益率的期望和方差等,这种假设与现实不符,其产生的偏差往往会给投资组合的选择带来风险.效用函数是建立在公理体系上的一套决策理论[22],在不确定性决策中被广泛使用.Merton 在 20 世纪 60 年代使用效用函数来刻画投资者的风险态度,利用随机控制方法,给出了在此条件下的最优投资-消费选择策略.Berkelaar 等[23] 使用鞅方法研究了 Kahnerman 提出的带有分片指数型效用函数的动态投资组合问题.Jin 和 Zhou[24] 研究了带有概率扭曲的分片效用函数的投资组合问题.近半个世纪以来,Merton 模型被众多学者不断改进使其更贴近现实.例如,Gennote[25] 充分考虑了股票收益率、波动率的不完全可知性,将 Kalman 最优滤波和随机最优控制相结合,研究了不完备信息下的最优投资组合问题.Xiong 和 Zhou[26] 进一步证明了最优估计与最优投资策略的可分离性.但在通常情况下这种分离性并不成立.最近,Wang 和 Wu[27] 提出了倒向分离方法,克服了传统分离方法的应用局限,适用于研究一大类复杂的随机控制系统问题.相关内容可参见文献[28-30].

本文安排如下:首先给出几个记号并介绍一些预备知识;然后分别介绍随机控制方法在期权定价、均值-方差和基于效用函数的最优投资组合问题中的简单应用;最后概括全文,并展望未来.

1 预备知识

1.1 记号

令 $T>0$ 是常数,$[0,T]$ 是时间区间,$(\Omega,F,(F)_t,P)$ 是完备概率空间.定义

$$L^2(\Omega,F_T,P;\mathbf{R}^m)=\left\{X:\Omega\to\mathbf{R}^m;\left(\int_\Omega|X(\omega)|^2\mathrm{d}P(\omega)\right)^{\frac{1}{2}}<\infty\right\}.$$

假设金融市场只有两种资产,一种是风险资产(如股票),其价格过程记为 $S(t)$,另一种是无风险资产(如债券),其价格过程记为 $B(t)$.它们满足如下方程:

$$\begin{cases}\mathrm{d}B(t)=r(t)B(t)\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}S_i(t)=\mu_i(t)S_i(t)\mathrm{d}t+\sigma_i(t)S_i(t)\mathrm{d}W_i(t),\\ \quad i=1,2\cdots,m,\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\mu_i(t)$,$\sigma_i(t)$ 分别表示股票的收益率和波动率,$\mu_i(t)$ 是有界的随机过程,$r(t)$ 表示短期存款利率,$r(t)$,$\sigma_i(t)$ 是确定的有界函数,$W(t)$ 是 m 维标准布朗运动.假定在市场上交易策略是自融资的,即在时间区间 $[0,T]$ 没有资金的注入与撤出.记

$$F_t=\sigma\{W(s);0\leqslant s\leqslant t\},G_t=\sigma\{S(u),0\leqslant u\leqslant t\}.$$

设投资者在 t 时刻的总资产是 $X^\pi(t)$,在第 i 只股票的投资是 $\pi_i(t)(i=1,2,\cdots,m)$,那么投在无风险资产的资金是 $X^\pi(t)-\sum_{i=1}^m\pi_i(t)$,这里称 $(X^\pi(t),\pi_i(t))$ 为投资者的投资策略.

根据自融资策略假定

$$\mathrm{d}X^\pi(t)=\sum_{i=1}^m\frac{\pi_i(t)}{S_i(t)}\mathrm{d}S_i(t)+\frac{\left(X^\pi(t)-\sum_{i=1}^m\pi_i(t)\right)}{B(t)}\mathrm{d}B(t),\tag{2}$$

进而由式(1)和(2)可得

$$
\begin{aligned}
dX^{\pi}(t) = {} & \left[r(t)X^{\pi}(t) + \sum_{i=1}^{m}(\mu_i(t) - r(t))\pi_i(t)\right]dt + \\
& \sum_{i=1}^{m}\sigma_i(t)\pi_i(t)dW_i(t). \qquad (3)
\end{aligned}
$$

1.2 倒向随机微分方程

倒向随机微分方程(以下简称 BSDE)的线性形式起源于随机最优控制问题中系统状态的对偶方程,其一般非线性形式的基本框架由 Pardoux 和 Peng[31]给出.随后,Peng 将著名的 Feynman-Kac 公式推广到非线性情形,建立了 BSDE 理论与偏微分方程理论的紧密联系.

BSDE 的经典形式是

$$
\begin{cases}
-dY(t)=f(t,Y(t),Z(t))dt-Z(t)dW(t), \\
Y(T)=\xi, \quad t\in[0,T],
\end{cases} \qquad (4)
$$

其中 ξ 是 F_T 可测的随机变量,T 是固定的终端时刻,$W(t)$ 是 m 维标准布朗运动,f 是生成元.若方程(4)满足

$$
\begin{cases}
\int_0^T |f(\cdot,0,0)|\,ds \in L^2(\Omega,F_T,P;\mathbf{R}^m), \\
|f(t,Y,Z) - f(t,Y',Z')| \leq \\
\quad c(|Y - Y'| + |Z - Z'|),
\end{cases}
$$

则对于任意给定的 $\xi \in L^2(\Omega,F_T,P;\mathbf{R}^m)$,方程(4)存在唯一解$(Y(t),Z(t))$.

相对于经典的(正向)随机微分方程(以下简称 SDE)而言,BSDE 的研究起步很晚,究其原因是 SDE 与 BSDE 在数学结构上存在本质差别,这使得 BSDE 不能由 SDE 经时间逆转变换得到.1994 年,法国著名金融数学家 EI Karoui 教授用 BSDE 研究了证券市场中许多重要的衍生产品定价问题,发现 Black-Scholes 公式仅为线性 BSDE 的特殊形式.此后,BSDE 相关理论及在随机控制、随机微分对策、随机偏微分方程中的应用,特别是在金融工程、保险精算中的应用,已成为一个研究热点.

1.3 随机滤波

滤波是将信号中特定波段频率滤除的操作,是抑制和防止干扰的一项重要措施.滤波问题的研究对象是信号过程和观测过程,最优滤波就是根据能观测到且可利用的信息对信号过程进行的最佳估计.20 世纪 60 年代初,Kalman 和 Bucy 发表了一篇题为《线性滤波和预测理论的新成果》的论文,提出了一种新的线性滤波理论,这就是所谓的 Kalman 滤波,它是一种从受噪声干扰的量测中估计线性动态系统状态的有效递归算法.

当信号过程满足非线性动态系统时,相应的状态估计问题就称之为非线性滤波.连续时间情形下非线性滤波问题的经典构造是假设状态方程为一扩散过程,观测过程为由另一布朗运动驱动的扩散过程.对于这种非线性滤波问题,20 世纪 60 年代涌现出许多重要结果,例如 Stratonovich 最优滤波、Kushner 方程、Duncan-Mortensen-Zakai 方程等.关于非线性滤波的最新进展,请参见文献[32].

2 期权定价问题

2.1 期权定价的相关知识

期权是指一种在未来某特定时间以特定价格买入或者卖出一定数量的某种特定商品的权利.期权有投机、保值和对冲风险等作用,投资者可以通过一个定价模型来限定买权的价格范围.合理的定价能有效地规避风险.因此,期权定价是期权交易中的核心问题.

1973 年,Black 和 Scholes 提出了著名的 Black-Scholes[1]期权定价公式,它是期权定价理论中的里程碑式结果.Black-Scholes 公式的推导及运用受到一系列条件的约束,例如标的资产价格 $S(t)$ 服从对数正态分布、无风险利率 r 为常数、不支付交易费和税收等,这些过于严格的假设与现实存在较大差距,使其在理论和应用上存在缺陷.例如 Black-Scholes 公式无法求解美式期权定价问题.继 Black-Scholes 公式之后,各种不同的期权定价模型纷纷被提出,Harrison 和 Kreps[33]提出了一种鞅定价方法,在风险中性条件下,通过对该产品的未来现金流进行折现得到期权的价格.此外,也有一些学者对 Black-Scholes 公式进行不同程度的修正,提出了许多推广模型,例如跳跃扩散模型、Levy 过程模型、指数 Levy 过程模型、随机波动率模型等.这些模型的推导大多没有用到 BSDE,接下来将介绍几个基于 BSDE 方法的期权定价模型.这些结果主要取自文献[14,34].

2.2 基于 BSDE 的期权定价模型

BSDE 具有良好的动态性,可以用来研究投资组合以及期权定价问题.下面给出一种利用 BSDE 对欧式期权进行定价的方法.

回忆 1.1 节给出的假定条件,投资者的财富 $X^{\pi}(t)$ 满足方程(3)($i = 1$ 的情况),并假设

$$\mu(t) = \mu_1(t), \quad \sigma(t) = \sigma_1(t),$$

$$\pi(t)=\pi_1(t),\quad W(t)=W_1(t),$$

从而

$$dX^{\pi}(t)=[r(t)X^{\pi}(t)+(\mu(t)-r(t))\pi(t)]dt+\sigma(t)\pi(t)dW(t).\tag{5}$$

根据无套利原则,若两种投资策略在将来的价值相同,则它们的现价也应该相同.因此,如果能够找到一个投资于债券和股票的自融资策略使其在 T 时刻的价值与欧式期权的价值相同,那么对任意时刻 $t\in[0,T]$,二者价值都应该相等.假设 K 表示股票期权的执行价格,T 表示执行日,故 t 时刻期权的价格 $X^{\pi}(t)$ 满足如下 BSDE:

$$\begin{cases}dX^{\pi}(t)=[r(t)X^{\pi}(t)+(\mu(t)-r(t))\pi(t)]dt+\\ \quad\sigma(t)\pi(t)dW(t),\\ X^{\pi}(T)=(S(T)-K)^{+},\quad\forall t\in[0,T].\end{cases}\tag{6}$$

令 $\sigma(t)\pi(t)=v(t)$,易知 $\pi(t)=\sigma^{-1}(t)v(t)$,从而

$$\begin{cases}dX^{v}(t)=[r(t)X^{v}(t)+\\ \quad(\mu(t)-r(t))\sigma^{-1}(t)v(t)]dt+v(t)dW(t),\\ X^{v}(T)=(S(T)-K)^{+},\end{cases}\tag{7}$$

其中 $X^{v}(t)$ 表示令 $v(t)=\sigma(t)\pi(t)$ 之后所得到的投资者的财富. 由非线性 Feynman-Kac 公式, 若令 $u(s,t)=X^{v}(t)$,则 u 满足:

$$\begin{cases}u_t+\frac{1}{2}\sigma^2(t)s^2u_{ss}+r(t)su_s-r(t)u=0,\\ u(s,T)=g(s),\end{cases}$$

这里 $g(s)=(s-K)^{+}$,$v(t)=u_s\sigma_s$,所以 $\pi(t)=u_s s$,其中 u_t 表示 u 关于 t 的偏导数,u_s 表示 u 关于 s 的偏导数,u_{ss} 表示 u 关于 s 的两阶偏导数.

注意上面方程的特殊结构,令

$$\lambda(t)=\sigma^{-1}(t)(\mu(t)-r(t)),$$

$$\frac{dQ}{dS}=\exp\left\{-\int_0^T\lambda(s)dW(s)-\frac{1}{2}\int_0^T\lambda^2(s)ds\right\},$$

根据 Girsanov 定理可知

$$\overline{W}(s)=W(s)+\int_0^s\lambda(r)dr$$

为 Q 下的布朗运动,将其代入股票价格方程有

$$dS(t)=r(t)S(t)dt+\sigma(t)S(t)d\overline{W}(t),\tag{8}$$

这里 Q 为风险中性概率测度.由线性 Feynman-Kac 公式得到

$$u(s,t)=E_Q[e^{-\int_t^T r(l)dl}g(S(T))].\tag{9}$$

更进一步,如果 b,r,σ 为常数,我们还可以得到方程的显式解

$$u(S(t),t)=S(t)N(d_1(S(t)))-Ke^{-r(T-t)}N(d_0(S(t))),\tag{10}$$

这里

$$d_0(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\ln\left(\frac{x}{Ke^{-r(T-t)}}\right)-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t},$$

$$d_1(x)=d_0(x)+\sigma\sqrt{T-t},$$

N 为正态分布的累积函数,即

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{r^2}{2}}dr.$$

注 1 上述推导过程表明:用 BSDE 方法定价期权要比传统的偏微分方程方法更加简单方便.

2.3 基于不完备信息股票付息的 Black-Scholes 期权定价

金融市场上的投资者往往不能掌握全部信息,研究不完备信息下的期权定价问题更符合金融市场的实际情况.

仍采用 1.1 节给出的假设,财富过程满足方程(5),其中 $W(t)$ 是 1 维标准布朗运动,当 $R(t)$ 表示贷款利率时,有

$$dB(t)=R(t)B(t)dt.\tag{11}$$

假设投资者仅知道股票价格、债券价格及短期利率和贷款利率,并能估计股票的波动率,但不能观测到股票的收益率,也无法获取布朗运动 $W(t)$ 的信息.由 G_t 的定义可知,$S(t)$ 是 G_t- 适应的,而 $\mu(t)$ 和 $W(t)$ 是 F_t- 适应的,因而投资者的投资策略将完全依据 G_t 的信息. 为了简单起见, 假定 $r(t)$,$\sigma(t)$ 和 $\sigma^{-1}(t)$ 是确定的有界函数.

考虑金融市场中不完备信息下以股票 $S(t)$ 作为标的资产的欧式期权定价问题:根据方程(1)和(11)可知投资者的财富 $X^{\pi}(t)$ 满足:

$$dX^{\pi}(t)=[r(t)X^{\pi}(t)+(\mu(t)+\delta(t,S(t))-r(t))\pi(t)-(R(t)-r(t))(X(t)-\pi(t))^{-}]dt+\sigma(t)\pi(t)dW(t),$$

其中 $x^{-}=\frac{|x|-x}{2}$,$x^{+}=\frac{|x|+x}{2}$, $\forall x\in\mathbf{R}$;$\delta(t,S(t))$ 表示在时刻 t 的红利率.在这里假定 $\pi(t)$ 是循序可测的,且满足 $E\left[\int_0^T\pi^2(t)dt\right]<\infty$;若 $\pi(t)$ 取负值,即意味着股票可以卖空;若 $X^{\pi}(t)-\pi(t)$ 取负值,则认为以利率 $R(t)$ 从银行贷款.

由 BSDE 的观点,股票期权的无套利价格满足

$$\begin{cases}dX^{\pi}(t)=[r(t)X^{\pi}(t)+(\mu(t)+\delta(t,S(t))-\\ \quad r(t))\pi(t)-(R(t)-r(t))(X(t)-\\ \quad\pi(t))^{-}]dt+\sigma(t)\pi(t)dW(t),\\ X^{\pi}(T)=(S(T)-K)^{+},\quad\forall t\in[0,T],\end{cases}$$

这里 $W(t)$ 和 $\mu(t)$ 不可观测,而 $S(t)$ 能被观测.令 $\hat{\mu}(t)= E[\mu(t)\mid G_t]$, $P_t = E[(\mu(t)-\hat{\mu}(t))^2\mid G_t]$.定义一个新息过程

$$\mathrm{d}\bar{W}(t)=\frac{1}{\sigma(t)}\left(\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}-\hat{\mu}(t)\mathrm{d}t\right).$$

易知股票价格满足:

$$\mathrm{d}S(t)=\hat{\mu}(t)S(t)\mathrm{d}t+\sigma(t)S(t)\mathrm{d}\bar{W}(t).$$

由滤波理论,$\bar{W}(t)$ 是(Ω,G,G_t,P) 上的标准布朗运动.根据文献[35]可得:

$$\begin{cases}\mathrm{d}\hat{\mu}(t)=\dfrac{P_t}{\sigma^2(t)}\left(\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}-\hat{\mu}(t)\mathrm{d}t\right),\\ \hat{\mu}(0)=E[\mu(0)], \quad \forall t\in[0,T],\end{cases}$$

其中 P_t 是下列黎卡提方程

$$\begin{cases}\dot{P}_t=-\left(\dfrac{P_t}{\sigma(t)}\right)^2,\\ P_0=E[(\mu(0)-\hat{\mu}(0))^2], \quad \forall t\in[0,T]\end{cases}$$

的解.当 $\sigma(t)=\sigma$ 为常数时,我们可以给出显式解

$$P_t=\frac{\sigma^2P_0}{tP_0+\sigma^2}, \tag{12}$$

从而

$$\hat{\mu}(t)=\hat{\mu}(0)+\int_0^t\frac{P_r}{\sigma}\mathrm{d}\bar{W}(r),$$

其中 P_r 由方程(12)给出.

结合滤波理论及凸分析方法,当所有参数都是常数时,可得到不完备信息下欧式期权价格的显式解

$$X^\pi(t)=\mathrm{e}^{-\delta(T-t)}N(d_1^R(S(t)))S(t)-Ke^{-R(T-t)}N(d_0^R(S(t))), \tag{13}$$

这里 $N(x)$ 表示正态分布的累积函数,且

$$d_0^R(S(t))=\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\ln\left(\frac{S(t)}{Ke^{-(R-\delta)(T-t)}}\right)-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t},$$

$$d_1^R(S(t))=d_0(S(t))+\sigma\sqrt{T-t}.$$

注2 对于上面讨论的欧式期权定价问题,当股票价格 $S(t)$ 的波动率 σ 和贷款利率 R 越高时,股票的欧式期权价格越高;执行价格 K 和红利率 δ 越高时,股票的欧式期权价格越低.即在上述所有的假设下,该股票的期权价格 $X^\pi(t)$ 分别随着 $S(0)$,σ 或 R 的增大而增大,而分别随着 K,δ 的增大而减小.

注3 当 $\delta=0$,$R=r$ 时,式(13)就退化为经典的 Black-Scholes 公式.由于公式中没有出现股票收益率,因而结果与完备信息下相同,但推导过程充分考虑了不完备信息因素并运用了滤波技术,且当 $R>r$ 时,此方法简单直接且易于理解和应用.

3 均值-方差问题

Markowitz[21]使用方差来刻画风险,提出了著名的均值-方差模型,开启了投资组合研究的大门.均值-方差问题主要包括离散时间和连续时间两种情形,本节主要介绍随机控制方法在连续时间均值-方差投资组合问题中的简单应用.

3.1 基于完备信息、连续时间情形的均值-方差问题

由于方差在动态规划意义下不可分离,如何将 Markowitz 最早提出的均值-方差模型推广到动态投资的框架下一直是个难题.2000 年,Li 和 Ng[36]、Zhou 和 Li[37]将嵌入法引入该问题的研究,终于解决了方差不可分离这一难题.在此基础上,后续的连续时间均值-方差模型的研究致力于解决更复杂的情形.例如随机机会集合的问题[38]、局域跳变的问题、不允许卖空的问题[39]等.需要注意的是,Zhou 和 Li[37]提出的动态均值-方差投资策略并不满足时间一致性,即投资策略在任意时间点上并非最优.最近,Bjrok 等[40]利用随机博弈思想提出了不同方法解决了动态均值-方差问题的时间一致性问题.

3.2 基于不完备信息的均值-方差问题

研究不完备信息下的均值-方差问题更符合实际情况.最近,Wang 和 Wu[41]研究了不完备信息和非 Markov 控制系统下的均值-方差问题,推出了线性二次问题的最优控制,得到了正倒向随机微分滤波方程,并求解了一些随机控制与金融投资例子.现概述如下:

基本假设如 1.1 节所述,市场上有 1 只债券和 m 只股票,其价格满足方程(1),投资者的财富过程 $X^\pi(t)$ 满足方程(3).若假定初始财富为 $X^\pi(0)=X_0>0$,则 $X^\pi(t)$ 满足

$$\begin{cases}\mathrm{d}X^\pi(t)=\left[r(t)X^\pi(t)+\sum\limits_{i=1}^m(\mu_i(t)-r(t))\pi_i(t)\right]\mathrm{d}t+\sum\limits_{i=1}^m\sigma_i(t)\pi_i(t)\mathrm{d}W_i(t),\\ X^\pi(0)=X_0.\end{cases} \tag{14}$$

一般而言,投资者不可能获知市场上的所有信息,不失一般性,令 G_t 表示投资者在 t 时刻所能观测的所有信息,显然 $G_t\subset F_t$.对于投资者来说,他只能根据 G_t 选择一个最优的投资组合.

定义1 若一个随机过程关于 G_t 是适应的,则称其为是可观测的.

定义2 如果对于一个投资组合策略 $\pi(\cdot)=$

$(\pi_1(\cdot),\cdots,\pi_m(\cdot))$, $\pi_i(t)$, $i=1,2,\cdots,m$ 是 G_t 适应且是平方可积的过程,那么称这个投资组合是可容许的.假设可容许的投资组合策略集记为 U_{ad}.

我们给出以下假设:

(H1) 系数 $r(\cdot)$, $\mu_i(\cdot)$, $\sigma_i(\cdot)$ 以及 σ_i^{-1}, $i=1,2,\cdots,m$ 是在 R 中一致有界的函数.

在(H1)下,对于任意的 $\pi_i(\cdot)\in U_{ad}$, $i=1,2,\cdots,m$,方程(14)中存在唯一解,类似于方程(6)中的替换,若定义 $v_i(\cdot)=\sigma_i(\cdot)\pi_i(\cdot)$, $i=1,2,\cdots,m$,则方程(14)变形为

$$\begin{cases} \mathrm{d}X^v(t)=\left[r(t)X^v(t)+\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\mu_i(t)-r(t)}{\sigma_i(t)}v_i(t)\right]\mathrm{d}t+\\ \quad\sum\limits_{i=1}^{m}v_i(t)\mathrm{d}W_i(t),\\ X^v(0)=X_0, \end{cases}\tag{15}$$

其中 $X^v(t)$ 表示经变换 $v_i(\cdot)=\sigma_i(\cdot)\pi_i(\cdot)$, $i=1,2,\cdots,m$ 后投资者的财富.

假设给定的 ξ 是 G_T 可测的平方可积随机变量,且 $\xi\geqslant X_0\mathrm{e}^{\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}$.这里 $X_0\mathrm{e}^{\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}$ 表示投资者在整个投资期间把初始财富 X_0 投在利率为 $r(t)$ 的债券上的最终所得.

定义指标泛函

$$J(v(\cdot);X_0)=\frac{1}{2}E\,|\,X^v(T)-\xi\,|^2.\tag{16}$$

投资者的目标是 $\min J(v(\cdot);X_0)$,这里 $v(\cdot)\in U_{ad}$, $(X^v(\cdot);v(\cdot))$ 满足方程(14)或者方程(15),其中 $X^v(\cdot)$ 的含义同方程(7).为了方便,将该问题简记为(PIMV).

定理 1 若假设(H1)成立,则问题(PIMV)的最优投资策略为

$$\pi_i^*(t)=\pi_{i1}^*(t)+\pi_{i2}^*(t),\tag{17}$$

其中

$$\pi_{i1}^*(t)=-\frac{\mu_i(t)-r(t)}{\sigma_i(t)^2}\{E[X^*(t)\mid G_t]-E[h(t)\mid G_t]\},\tag{18}$$

$$\pi_{i2}^*(t)=\frac{1}{\sigma_i(t)}E[q_i(t)\mid G_t],\quad i=1,2,\cdots,m,\tag{19}$$

$(h(\cdot),q_1(\cdot),\cdots q_m(\cdot))$ 和 $X^*(\cdot)$ 是以下方程的解

$$\begin{cases} \mathrm{d}h(t)=\left[r(t)h(t)+\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\mu_i(t)-r(t)}{\sigma_i(t)}q_i(t)\right]\mathrm{d}t+\\ \quad\sum\limits_{i=1}^{m}q_i(t)\mathrm{d}W_i(t),\\ h(T)=\xi, \end{cases}\tag{20}$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}X^*(t)=\Big[r(t)X^*(t)+\sum\limits_{i=1}^{m}(\mu_i(t)-\\ \quad r(t))\pi_i^*(t)\Big]\mathrm{d}t+\sum\limits_{i=1}^{m}\sigma_i(t)\pi_i^*(t)\mathrm{d}W_i(t),\\ X^*(0)=X_0. \end{cases}\tag{21}$$

注 4 如果 $F_t=G_t$, $0\leqslant t\leqslant T$,那么问题(PIMV)就退化为完备信息下的均值-方差问题,具体细节可参见文献[42].

4 基于效用函数的最优投资组合问题

自 Merton 在 20 世纪 60 年代末提出投资-消费模型至今,最大化期望效用问题已有比较系统的研究,但大多假定风险资产价格动态方程中的布朗运动 W 以及漂移系数可直接观测,这显然不符合实际,因为投资者掌握的信息不可能是布朗运动 W 生成的 σ-域 F_t,而是其中的一部分.同第 2.3 节一样,假定投资者仅能观测到股票价格,其生成的信息流仍记为 G_t,显然只有 G_t-适应的过程才是可观测的.基于信息流 G_t, Alster 和 Belanger[43]、Lakner[44]运用鞅方法研究了最优投资问题,但他没有给出投资策略的显式解.杨招军和黄立宏[45]、吴臻和王光臣[14]在一些特殊条件下获得了解析的最优投资策略.关于其他进展,请参见文献[46].现重点阐述文献[14]取得的部分结果.

定义 3 若一个函数 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上连续可微、严格增、严格凹,且满足 Inada 条件

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\lim_{x\downarrow 0}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=+\infty,\ \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=0,$$

则称 $f(x)$ 为效用函数.

定义 4 若对任意的 $0\leqslant t\leqslant T$ 都有 $X^\pi(t)\geqslant 0$ 且 $E\left[\int_0^T\pi^2(t)\mathrm{d}t\right]<\infty$ 成立,则称投资策略 $\pi(t)$ 关于初始财富 X_0 是容许的.我们把所有容许投资策略组成的集合记为 U_{ad}.

基本假设同 1.1 节,股票与债券的价格动态满足方程(1),假设投资者具有初始财富 X_0,在任意时刻 t,投资者的财富 $X^\pi(t)$ 满足方程(5).考虑到部分信息的特点,股票收益率 $\mu(t)$ 必须 G_t-适应.

假定投资者的期望效用最大化问题为

$$\max_{\pi(t)}E[U(X^\pi(T))]\tag{22}$$

受限于

$$\begin{cases}\mathrm{d}B(t)= r(t)B(t)\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}S(t)= \mu(t)S(t)\mathrm{d}t+\sigma(t)S(t)\mathrm{d}W(t),\\ \mathrm{d}X^{\pi}(t)= [r(t)X^{\pi}(t)+(\mu(t)-r(t))\pi(t)]\mathrm{d}t+\\ \quad \sigma(t)\pi(t)\mathrm{d}W(t),\end{cases} \tag{23}$$

其中 $S(t)$ 为观测过程,$\mu(t)$ 为不可观测的状态过程且满足

$$\mathrm{d}\mu(t)=a\mu(t)\mathrm{d}t+b\mathrm{d}W(t)+c\mathrm{d}V(t),$$

这里 $W(t)$ 和 $V(t)$ 是定义在$(\Omega,F,(F_t),P)$ 上两个相互独立的1维标准布朗运动,a,b,c是常数.因为只能观测到$\mu(t)$ 的部分信息,所以式(22) 和(23) 构成了一类基于不完备信息的期望效用最大化问题.

描述投资者偏好的效用函数$U(\cdot)$有很多种,其中 $U(\cdot)=\ln(\cdot)$ 是最常见的一种,其绝对风险厌恶Arrow-Pratt 系数为财富水平的倒数,它体现了投资者财富越多,风险厌恶程度越小的普遍心态.

根据滤波技术,原问题转化为

$$V(0,x)=\max_{\{\pi(t)\}\in U_{\mathrm{ad}}} E\ln X^{\pi}(T)$$

受限于

$$\begin{cases}\mathrm{d}\hat{\mu}(t)=a\hat{\mu}(t)\mathrm{d}t+\dfrac{b\sigma(t)+P_t}{\sigma(t)}\mathrm{d}\overline{W}(t),\\ \mathrm{d}S(t)=\hat{\mu}(t)S(t)\mathrm{d}t+\sigma(t)S(t)\mathrm{d}\overline{W}(t),\\ \mathrm{d}X^{\pi}(t)=[r(t)X^{\pi}(t)+\pi(t)(\hat{\mu}(t)+\\ \quad \delta(t,S(t))-r(t))]\mathrm{d}t+\sigma(t)\pi(t)\mathrm{d}\overline{W}(t),\end{cases}$$

其中对任意 $t\in[0,T]$,$\overline{W}(t)$,$\hat{\mu}(t)$ 均可观测且是F_t-适应的,$S(t)$ 是 G_t-适应的,P_t,$\delta(t,S(t))$ 及$\mathrm{d}\overline{W}(t)$ 的含义同2.3节所述.根据配方法可得下列结果.

定理2 在不完备信息下,使终端财富期望效用最大的最优投资策略是

$$\pi(t)=\frac{\hat{\mu}(t)+\delta(t,S(t))-r(t)}{\sigma^2(t)}X^{\pi}(t),$$

最优泛函为

$$V(0,\hat{\mu}(0),x)=\ln x+$$
$$E\left[\int_0^T r(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^T\frac{(\hat{\mu}(t)+\delta(t,S(t))-r(t))^2}{\sigma^2(t)}\mathrm{d}t\right],$$

其中

$$\hat{\mu}(t)=E[\mu(t)\mid G_t],$$

$$P_t=E[(\mu(t)-\hat{\mu}(t))^2\mid G_t],$$

$$\mathrm{d}\overline{W}(t)=\frac{1}{\sigma(t)}\left(\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}-\hat{\mu}(t)\mathrm{d}t\right).$$

注5 如果全部信息可知,那么最优投资策略就退化成完备信息下的情形.

5 小结

本文侧重于展示随机控制方法在期权定价、均值-方差、基于效用函数的投资组合风险管理问题中的简单应用.随着金融衍生产品的不断开发,大量的随机控制新问题涌现出来.例如完全耦合正倒向随机系统滤波与控制问题,时间不一致的随机最优控制问题等,这些问题都非常值得深入研究,其研究反过来将为管理投资组合风险提供有效方法.

致谢:非常感谢肖华副教授给予本文的指导性修改建议与意见.

参考文献
References

[1] Black F,Scholes M.The pricing of options and corporate liabilities[J].Journal of Political Economy,1973,81(3):637-654
[2] Cox J C,Ross S A.The valuation of option for alternative stochastic processes[J].Journal of Financial Economics,1976,3(1/2):145-166
[3] Harrison J M,Pliska S R.Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading [J].Stochastic Processes and Their Applications,1981,11(3):215-260
[4] Delbaen F,Schachermayer W.A general version of the fundamental theorem of asset pricing[J].Mathematische Annalen,1994,300(1):463-520
[5] Delbaen F,Schachermayer W.The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes[J].Mathematische Annalen,1998,312(2):215-250
[6] Jacod J,Shiryaev A N.Local martingales and the fundamental asset pricing theorem in the discrete-time case [J].Finance and Stochastics,1998,2(3):259-273
[7] Derman E,Kani I.Riding on a smile[J].Risk,1994,7:32-39
[8] Dupire B.Pricing with a smile[J].Risk,1994,7:18-20
[9] Cox J C.The constant elasticity of variance option pricing model[J].The Journal of Portfolio Management,1996,23(5):15-17
[10] Davydov D,Linetsky V.The valuation and hedging of barrier and look back options under the CEV process[J].Management Science,2001,47:949-965
[11] Merton R C.Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J].Journal of Financial Economies,1976,3(1/2):125-144
[12] Geman H,Madan D B,Yor M.Time changes for levy processes[J].Mathematical Finance,2001,11(1):79-96
[13] Duffie D,Pan J,Singleton K.Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions [J].Econometrica,

2000,68(6):1343-1376

[14] 吴臻,王光臣.部分信息下股票付息的 Black-Scholes 期权定价公式和一类最优投资问题[J].系统科学与数学,2007,27(5):676-683

WU Zhen, WANG Guangchen. A Black-Scholes formula for option pricing with dividends and optimal investment problems under partial information[J].Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2007, 27 (5): 676-683

[15] Duffie D, Richardson H R.Mean-variance hedging in continuous time[J]. Annals of Applied Probability, 1991, 1 (1):1-15

[16] Grauer R R.A comparison of growth optimal and mean-variance investment policies[J].Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1981, 16 (1):1-21

[17] Grauer R R, Hakansson N H. On the use of mean-variance and quadratic approximations in implementing dynamic investment strategies: A comparison of the returns and investment policies [J]. Management Science, 1983, 39(7):856-871

[18] Hakansson N H. Capital growth and the mean-variance approach to portfolio selection[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1971, 6(1):517-557

[19] Tobin J.Liquidity preference as behavior towards risk[J]. Review of Economic Studies, 1958, 25(2):65-86

[20] Maclean L C, Zhao Y, Ziemba W T.Mean-variance versus expected utility in dynamic investment analysis[J].Computational Management Science, 2011, 8(1):3-22

[21] Markowitz H M.Portfolio selection[J].The Journal of Finance, 1952, 7(1):77-91

[22] Von Neumann J, Morgenstern O. Theory of games and economic behavior[M]. Princeton: Princeton University Press, 1944

[23] Berkelaar A B, Kouwenberg R, Post T. Optimal portfolio choice under loss aversion[J].Review of Economics and Statistics, 2004, 86(4):973-987

[24] Jin H, Zhou X Y.Behavioral portfolio selection in continuous time [J]. Mathematical Finance, 2008, 18 (3): 385-426

[25] Gennotte G.Optimal portfolio choice under incomplete information[J]. The Journal of Finance, 1986, 41 (3): 733-746

[26] Xiong J, Zhou X Y. Mean-variance portfolio selection under partial information[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2007, 46(1):156-175

[27] Wang G C, Wu Z.Kalman-Bucy filtering equations of forward and backward stochastic systems and applications to recursive optimal control problems[J].Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 342 (2): 1280-1296

[28] Xiao H.The maximum principle for partially observed optimal control of forward-backward stochastic systems with random jumps[J].Journal of System Science and Complexity, 2011, 24 (6):1083-1099

[29] Wang G C, Wu Z, Xiong J. Maximum principles for forward-backward stochastic control systems with correlated state and observation noises[J].SIAM Journal on Control and Optimization, 2013, 51(1):491-524

[30] Wang G C, Wu Z, Xiong J. A linear-quadratic optimal control problem of forward-backward stochastic differential equations with partial information[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60 (11): 2904-2916

[31] Pardoux E, Peng S G.Adapted solution of a backward stochastic differential equation[J].System and Control Letters, 1990, 14(1):55-61

[32] Xiong J. An introduction to stochastic filtering theory [M].Oxford, UK: Oxford University Press, 2008:18

[33] Harrison J M, Kreps D M. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets[J]. Journal of Economic Theory, 1979, 20(3):381-408

[34] 吴臻.倒向随机微分方程应用于期货理论定价问题[J].山东大学学报(自然科学版),1995,30(增刊1):31-35

WU Zhen. Backward stochastic differential equations applied to futures pricing problems[J].Journal of Shandong University (Natural Science Edition), 1995, 30 (Sup1): 31-35

[35] Liptser R S, Shiryayev A N.Statistics of random process [M].New York: Springer-Verlag, 1977

[36] Li D, Ng W L.Optimal dynamic portfolio selection: Multiperiod mean-variance formulation [J]. Mathematical Finance, 2000, 10(3):387-406

[37] Zhou X Y, Li D.Continuous-time mean-variance portfolio selection: A stochastic LQ frame-work[J].Applied Mathematic Optimization, 2000, 42(1):19-33

[38] Lim A E B, Zhou X Y.Mean-variance portfolio selection with random parameters in a complete market[J].Mathematics of Operations Research, 2002, 27(1):101-120

[39] Li X, Zhou X Y, Lim A B E. Dynamic mean-variance portfolio selection with no shorting constraints[J].SIAM Journal of Control and Optimization, 2002, 40 (5): 1540-1555

[40] Bjork T, Murgoci A, Zhou X Y. Mean-variance portfolio optimization with state dependent risk averse[J].Mathematical Finance, 2011, 24(1):1-24

[41] Wang G C, Wu Z. Mean-variance hedging and forward-backward stochastic differential filtering equations[J]. Abstract and Applied Analysis, 2011, DOI: 10.1155/2011/310910

[42] Kohlmann M, Zhou X Y. Relationship between backward stochastic differential equations and stochastic controls: An LQ approach[J].SIAM Journal on Control and Optimization, 1999, 38(5):1392-1407

[43] Alster J, Belanger P R.A technique for dual adaptive control[J].Automatica, 1974, 10(6):627-634

[44] Lakner P. Utility maximization with partial information [J]. Stochastic Processes and Applications, 1995, 56

(2):247-273
[45] 杨招军,黄立宏.部分信息下极大终止时期望对数效用及价值测算[J].控制与决策,2004,19(7):820-823
YANG Zhaojun, HUANG Lihong. Maximizing the expected logarithmic utility from terminal wealth under the partial information and the valuation of information [J].Control and Decision,2004,19(7):820-823
[46] 中国科学院.中国学科发展战略:控制科学[M].北京:科学出版社,2015
Chinese Academy of Sciences.China's discipline development strategy: Control science [M]. Beijing: Science Press,2015

Portfolio risk management under incomplete information: A stochastic control method

ZHANG Huanjun[1] WANG Guangchen[1]
1 School of Control Science and Engineering,Shandong University,Jinan 250061

Abstract The backward stochastic differential equation theory has been developed and improved in recent years, and then it is widely used in mathematical finance.Meanwhile,the stochastic control has become an important method to study the portfolio risk management problem.In this paper,we focus on how to study option pricing,mean-variance and expected utility maximization problems by using the stochastic control method with incomplete information.
Key words incomplete information;backward stochastic differential equations;stochastic control;option pricing;mean-variance;utility function