DOI:10.13878/j.cnki.jnuist.2017.03.006

邓飞其[1]　莫浩艺[1,2]

随机微分方程数值解稳定性研究综述

摘要

本文回顾了近年来随机微分方程数值方法的稳定性的研究成果.作为相关话题,收敛性问题也有所涉猎.以经典Itô型随机微分方程、中立型随机泛函微分方程、Markov跳随机微分方程和Poisson跳随机微分方程为代表,主要介绍了几类数值方法稳定性研究的成果.这些方法包括常见的Euler-Maruyama方法、Backward Euler-Maruyama方法、θ方法、分步方法等.文中分析了关于稳定性等价性定理经典论文的学术思路,提出了随机微分方程数值计算与仿真所面临的挑战及所要解决的问题.

关键词

随机微分方程;数值格式;稳定性;仿真

中图分类号 P393

文献标志码 A

收稿日期 2017-04-16

资助项目 国家自然科学基金(61273126);教育部高等学校博士学科点专项科研基金(20130172110027)

作者简介

邓飞其,男,博士,教授,主要从事复杂系统研究.aufqdeng@ scut.edu.cn

1 华南理工大学 自动化科学与工程学院,广州,510640

2 广东工业大学 应用数学学院,广州,510006

1 典型数值方法及其收敛性

由于大多数随机微分方程解析解的显式表达式都很难得到,快速高效的数值算法对于随机微分方程的应用显得格外重要.对于随机微分方程数值解的研究,大体来说可以分为两类:有限时间的收敛性和随着时间变量趋于无穷的渐近性.本节主要是对有限时间的收敛性的相关研究进行回顾.

考察下面的Itô型随机微分方程:

$$\mathrm{d}x(t)=f(x(t))\mathrm{d}t+g(x(t))\mathrm{d}W(t),\quad x(t_0)=x_0,\quad 0\leqslant t_0\leqslant t\leqslant T, \tag{1}$$

其中$x\in\mathbf{R}^n$,$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,$g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{n\times m}$,$W(t)$是定义在完备概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的$m$-维维纳过程.该方程的实际含义由下面的积分方程确定:

$$x(t)-x(t_0)=\int_{t_0}^{t}f(x(s))\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}g(x(s))\mathrm{d}W(s),\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

其中第一个积分为Lebesgue积分,第二个积分为Itô积分,可参考文献[1-2].

原理上,方程(1)的数值格式均来自于该积分式,也就是说:需要在所分割的子区间上对右边的积分进行数值逼近,其截断误差就是来自于两个积分数值逼近的截断误差.为使得式(1)的数值格式具有一定的精度,须对两个积分进行精度平衡的逼近.但是,从Burkholder-Davis-Gundy不等式看出,同样形式的逼近,用于Itô积分时,精度折半.因此,为提高数值格式的精度,重点在于对Itô积分的逼近,这从下面所列典型格式可以看出.而在文献中,常见对Lebesgue积分的各类逼近,因为,相对而言,这样便于分析和处理.

格式的精度可称为逼近度,也可称为收敛性.在现有文献中,对有限时间的收敛性,主要分为两类,即强收敛和弱收敛.关于强收敛性,目前文献中的定义,主要采用以下几种描述方式:

$$\mathrm{E}|x(n\Delta)-Y_N|\leqslant K_1\Delta^{\alpha},$$

$$\mathrm{E}\sup_{0\leqslant n\leqslant N}|x(n\Delta)-Y_n|\leqslant K_1\Delta^{\alpha},\quad \sup_{0\leqslant n\leqslant N}\mathrm{E}|x(n)-Y_n|\leqslant K_1\Delta^{\alpha},$$

其中Δ是时间步长,$n=1,2,\cdots,N$,$N\Delta=T$,Y_n指某种数值解对于方程解析解$x(n\Delta)$在时间$t=n\Delta$时的估计,$K_1>0$是一个与Δ无关的常数.这里的α对应数值解的收敛阶.如果说强收敛是数值解和解析解之间误差的均值,则弱收敛就是两者均值的误差.弱收敛的一种简单定义为

$$|\mathrm{E}x(n\Delta)-\mathrm{E}Y_n|\leqslant K_1\Delta^{\gamma},$$

其中,γ 为数值解的收敛阶.

文献都采用矩来描述误差,如均方误差

$$\mathrm{E}\sup_{0\leqslant n\leqslant N}|x(n\Delta)-Y_n|^2\leqslant K_1\Delta^{\alpha},$$

相应地,格式的逼近度为 $\alpha/2$.

Kloeden 等在文献[1,3]中给出了多种数值方法的强、弱收敛性和收敛速率.一般地需要假设方程的漂移项 f 和扩散项 g 都满足全局 Lipschitz 条件,即存在常数 $K_2>0$,使得对于任意的 $x,y\in\mathbf{R}^n$ 都有

$$|f(x)-f(y)|^2\leqslant K_2|x-y|^2,$$

$$|g(x)-g(y)|^2\leqslant K_2|x-y|^2.$$

最典型、最基本的格式为 Euler-Maruyama(EM)格式:

$$Y_{n+1}=Y_n+f(Y_n)\Delta+g(Y_n)\Delta W_n,\quad Y_0=x_0,\tag{2}$$

其中 ΔW_n 是布朗运动增量,$\Delta W_n=W((n+1)\Delta)-W(n\Delta)$.这种格式是 0.5 阶强收敛的.与确定型方程的 Euler 格式 1.0 阶的精度相比,它算是一种低阶的格式.与这种显式的 Euler-Maruyama 格式类似,隐式的 Euler-Maruyama 格式为

$$Y_{n+1}=Y_n+[\theta f(Y_{n+1})+(1-\theta)f(Y_n)]\Delta+g(Y_n)\Delta W_n,\quad Y_0=x_0,\tag{3}$$

该式也被称为 θ 格式,它也是 0.5 阶强收敛的.其中,参数 $\theta\in[0,1]$.当 $\theta=0$ 时,它为 EM 格式;当 $\theta=1$ 时,该格式为 Backward Euler-Maruyama 格式(BEM).为了提高数值格式的收敛阶数,可运用 Itô-Taylor 展式技术.由此,产生了系列的经典格式,例如,1 维的 Milstein 数值格式:

$$Y_{n+1}=Y_n+f(Y_{n+1})\Delta+g(Y_n)\Delta W_n+\frac{1}{2}g(Y_n)g'(Y_n)[(\Delta W_n)^2-\Delta].\tag{4}$$

d 维的隐式 Milstein 格式:

$$Y_{n+1}=Y_n+[\theta f(Y_{n+1})+(1-\theta)f(Y_n)]\Delta+g(Y_n)\Delta W_n+\frac{1}{2}L^1 g(Y_n)[(\Delta W_n)^2-\Delta],\tag{5}$$

其中,微分算子 $L^1=\sum_{k=1}^{d}g^k(Y_n)\frac{\partial}{\partial x^k}$.当 f,g 及其导数满足 Lipschitz 条件时,所有这些 Milstein 格式都是 1 阶强收敛的.具有这种 1 阶强收敛性的,还有下面的 Runge-Kutta 格式:

$$Y_{n+1}=Y_n+[\theta f(Y_{n+1})+(1-\theta)f(Y_n)]\Delta+g(Y_n)\Delta W_n+\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}[g(\bar{Y}_n)-g(Y_n)][(\Delta W_n)^2-\Delta],$$

其中向量 $\bar{Y}_n=Y_n+f(Y_n)\Delta+g(Y_n)\sqrt{\Delta}$.通过重复运用 Taylor 展式,对方程 f 和 g 展开的阶数越高,所获得格式的收敛阶数会越高,可以达到 1.5 阶或 2.0 阶,但其形式也更复杂,从而影响其广泛应用.请参见专著[1].

针对不同模型和精度,格式的构造和分析有许多后续进展,取得了丰富的成果,这里不一一列举.例如,Liang 等[4]研究了一类线性随机 Volterra 积分方程,在 Lipschitz 条件下,证明了 EM 方法是 1 阶强收敛的;Wang 等[5]分析了带有加性噪声的半线性随机偏微分方程隐式 Euler 方法的弱收敛性.

在众多数值算法中,EM 型算法由于结构简单、易于编程等特点受到很多学者的关注[6-9].它是所有随机微分方程数值算法里最简单的一种.经典的 Euler 型算法,即 EM 算法,是常微分方程的向前 Euler 算法的自然推广.上面提到,在全局 Lipschitz 条件下,经典的 EM 方法是强 0.5 阶收敛的,但是当漂移项或扩散项不满足全局 Lipschitz 条件时,EM 方法将不收敛.Hutzenthaler 等[10]对于这种不收敛性(发散性)给出了严格的证明.

那么,针对非 Lipschitz 方程,各类格式是否也可用?精度又如何?为此,学者们开展了系列的探讨.例如,为了处理一类漂移项不满足全局 Lipschitz 条件的随机微分方程,特别是当漂移项满足多项式增长时,Hutzenthaler 等[11]提出了具有 0.5 阶强收敛性的 Tamed(驯服) Euler 方法.简单来说,Tamed Euler 方法在经典的 EM 算法基础上增加了对漂移项的控制,它的格式如下:

$$Y_{n+1}=Y_n+\frac{f(Y_n)\Delta}{|1+f(Y_n)\Delta|}+g(Y_n)\Delta W_n,\quad Y_0=x_0.$$

当随机微分方程的漂移项和扩散项都不满足全局 Lipschitz 时,特别是漂移项和扩散项都是多项式增长时,Hutzenthaler 等[12]将这种 Taming 的技巧同时应用于漂移项和扩散项提出了以下算法:

$$Y_{n+1}=Y_n+\frac{f(Y_n)\Delta+g(Y_n)\Delta B_n}{|1+f(Y_n)\Delta+g(Y_n)\Delta B_n|},\quad Y_0=x_0,$$

并证明了这种算法的强收敛性,但是似乎并没有给出收敛阶.

Wang 等[13]针对漂移项不满足全局 Lipschitz 条件的情况,利用 Taming 的技巧改进了经典的 Milstein 方法,提出具有 1 阶强收敛性的 Tamed Milstein 方法.Zong[14]将漂移项中满足全局 Lipschitz 条件和不满足全局 Lipschitz 的部分分离开提出了 Semi-Tamed (半驯服)Euler 方法.

近年来,Mao[15-16]利用截断技巧提出 Truncated(截断)Euler 方法来处理漂移项和扩散项都不满足全局 Lipschitz 条件的随机微分方程,并证明了该方法具有近似 0.5 阶强收敛.简单来说,Truncated Euler 方法在每一步迭代中都对 Y_n 加以控制使其不会太大,该方法的格式如下:

$$Y_{n+1}=Y_n+f(\min(Y_n,R(\Delta)))\Delta+ g(\min(Y_n,R(\Delta)))\Delta W_n,\quad Y_0=x_0,$$

这里的 $R(\Delta)$ 是一个依赖于时间步长 Δ 的函数,同时它的结构也取决于 f 和 g.对于 $R(\Delta)$ 的要求以及该方法的一些细节,请参见文献[15-16].

Guo 等[17]改进了 Truncated Euler 方法并研究了改进后的方法的渐近性.同时,他们在文献[18]中将 Truncating 的技巧运用于经典的 Milstein 方法提出具有近似 1 阶强收敛性的 Truncated Milstein 方法.

sin 函数也是控制漂移项和扩散项的好工具.Zhang 等[19]提出了具有 0.5 阶强收敛性的 Balanced Euler 方法,其格式如下:

$$Y_{n+1}=Y_n+\sin(f(Y_n)\Delta)+\sin(g(Y_n)\Delta W_n),\quad Y_0=x_0.$$

同时,该文还利用类似的技巧提出了具有 1 阶强收敛性的 Balanced Milstein 方法.

我们注意到,上述不同种类 Euler 型算法虽然结构不同,但是证明思路多是先证明数值解和解析解的 p-阶矩有界,然后再根据不同的算法格式证明强收敛性和收敛阶.这种证明思路或多或少借鉴了文献[7].在文献[7]中,作者给出了在已知 Euler 型数值解矩有界时推导收敛性和收敛速率的技巧.

另一种利用数值解局部收敛性推导全局收敛性的技巧也非常重要.在全局 Lipschitz 条件以及 Khasminskii 条件下,数值解的全局误差可以由局部误差推导出的结论,可分别在文献[20]和文献[21]中找到.

综上所述,当我们想构造显式的 Euler 型方法来数值逼近漂移项和扩散项不满足全局 Lipschitz 条件的随机微分方程时,采用的方法主要是在经典的 EM 方法基础上利用一些约束方式来控制漂移项和扩散项.一个很自然的问题是:以上这些理论上具有 0.5 阶(或者 1 阶)强收敛性的方法孰优孰劣?对于这个开放性问题,也许文献[22]中关于最优强收敛系数 K_1 的讨论是一个思路.

2 数值方法的稳定性

我们先来谈谈微分方程数值计算格式的稳定性的来源.

微分方程的数值计算格式稳定性概念的提出源于计算数学领域对数值计算舍入误差传播问题的考虑.众所周知,由于计算工具限制等各种原因,在数值计算过程中,舍入误差在所难免,某一步计算的舍入误差一定会随计算格式带入往后各步,也就是说,舍入误差将向后传播.如果计算格式对该误差具有敏感性,则该误差将随格式进行传播,被累计、被放大,甚至产生蝴蝶效应.当年,费肯鲍姆就是因为运用数字计算格式时出现了初值误差而发现了混沌现象.如果格式对该误差不敏感,则该误差的影响将被逐渐消除,无积累效应,不被严重放大.即在一定条件下得到控制,从而被最终屏蔽.基于此考虑,在计算数学领域提出了微分方程数值计算格式的稳定性概念,用以描述计算格式对舍入误差的敏感性.如果一个格式对舍入误差敏感,则称格式不稳定;否则,称其稳定.所以,微分方程数值计算格式的稳定性,是一个定性概念.微分方程数值计算格式稳定,意味着计算格式可以自行消化舍入误差,不在传播中因累计而放大.最常见的数值计算格式稳定性概念是绝对稳定性,在此不赘述.

本文所述计算格式稳定性概念与此相同.在系统与控制科学领域,我们同样需要考虑格式的收敛性(逼近度)和稳定性.我们的目的是:如何将计算格式用于系统仿真,并通过系统仿真分析(原)系统的稳定性.

在随机系统数值计算方面,数值方法的收敛性和稳定性是学者们主要讨论的两大类内容.由于大部分随机系统的非线性性和耦合性,很难求出其解析解.所以通过离散化的数值方法来研究系统的稳定性是一种有效的途径,它是窥探系统内部结构和性态的一种手段.目前探讨的问题主要是:

1)在一定条件下,比照连续模型与离散格式的稳定性,看看离散格式是否复制了连续模型的稳定性质;

2)连续模型与离散格式的稳定性的逻辑互推.

本文将主要讨论几类 Itô 随机微分方程数值方法的稳定性.数值方法的稳定性主要包括:矩意义下的渐近稳定、p-阶矩指数稳定、几乎必然指数稳定、依概率稳定、A 稳定等[2].其研究内容和方法要比确定型常微分系统丰富很多.下面,先介绍本文讨论的几大类稳定性定义,其中 $p>0$.

定义 1[23] 如果存在某一常数 $\Delta^*>0$,当步长 $\Delta<\Delta^*$ 时,某个数值方法产生的数值解 $\{X_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}|X_n|^p=0,$$

则称数值解是 p-阶矩渐近稳定的.此处,E 是数学期望.当 $p=2$ 时,p-阶矩渐近稳定也称为均方渐近稳定.

定义 2[24] 如果存在步长界 $\Delta^*>0$,当步长 $\Delta<\Delta^*$ 时,某个数值方法产生的数值解 $X_k(k=1,2,\cdots)$ 满足

$$\lim_{k\to\infty}\sup\frac{1}{k\Delta}\log(\mathrm{E}|X_k|^p)<0,$$

则称数值解是 p-阶矩指数稳定的.当 $p=2$ 时,p-阶矩指数稳定也称为均方指数稳定.

定义 3[25] 某个数值方法产生的数值解 $X_k(k=1,2,\cdots)$ 是几乎必然指数稳定的,如果对给定步长,满足

$$\lim_{k\to\infty}\sup\frac{\log|X_k|}{k\Delta}<0 \quad \text{a.s.}$$

值得指出,对连续模型解的稳定性也有类似于上面的定义,只需要在上述定义中将数值解 X_k 换成解析解 $x(t)$,$k\to\infty$ 替换为 $t\to\infty$ 即可.在这些稳定性定义中,p-阶矩指数稳定可推出渐近稳定,而在文献中,一般同时关注几乎必然指数稳定与矩指数稳定性,但实际上它们之间并无必然联系,因此,都是分开单独推证得出相关结论.如果附加一定的条件,比如线性增长条件,则由 p-阶矩指数稳定可推出几乎必然指数稳定[2].一般而言,p-阶矩指数稳定可以通过估计解的矩 $\mathrm{E}|x(t,x_0)|^p$ 来得到,这时需要借助某个适当的 Lyapunov 函数 $V(t,x)$ 来估计 $\mathrm{E}V(t,x(t))$,因此 Lyapunov 方法是研究矩稳定的一个很有效的方法.与矩指数稳定性不同,几乎必然指数稳定是一种轨道稳定,它依赖于解的轨道估计,通常有下面三种方法可推出几乎必然指数稳定:1)由解的矩指数稳定,利用 Chebyshev 不等式推出解的几乎必然指数稳定;2)利用非负半鞅收敛定理,直接证明解的几乎必然指数稳定;3)通过指数鞅不等式和 Borel-Cantelli 引理证明解的几乎必然指数稳定.

文献中,对随机微分方程数值解稳定性的研究,一般采用直接的推证方法,很少套用 Lyapunov 稳定性定理,但其中同样含有 Lyapunov 函数或者泛函的思想方法.

下面,从模型推广与方法创新的角度,分别介绍几类 Itô 型随机微分方程数值方法稳定性研究所取得的进展.

2.1 中立型随机泛函微分方程

经典的 Itô 随机微分方程(SDE)已经被许多学者研究[24,26-30].随着科学技术的高速发展,实践中的许多领域,如生物工程、机械工程等都涉及到时间滞后的现象.由于时滞带的存在,系统状态的变化不仅与当前的时间状态相关,而且还与过去的历史状态有关.从而,诞生了描述这类系统的随机时滞微分方程:

$$\mathrm{d}x(t)=f(x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}t+g(x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}W(t),\quad t\geqslant 0. \tag{6}$$

在这类方程的基础上,如果描述系统变化率的函数不仅依赖于系统的当前状态,而且还依赖于滞后项,那么,中立型随机时滞微分方程应运而生:

$$\mathrm{d}[x(t)-G(x(t-\tau))]=f(x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}t+g(x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}W(t),\quad t\geqslant 0, \tag{7}$$

其中,$G(x(t-\tau))$ 是中立项,满足 $G(0)=0$.更广泛地,我们有中立型随机泛函微分方程:

$$\mathrm{d}[x(t)-G(x_t)]=f(x(t),x_t)\mathrm{d}t+g(x(t),x_t)\mathrm{d}W(t),\quad t\geqslant 0, \tag{8}$$

其中,$x_t=x(t+\theta)$,$-\tau\leqslant\theta\leqslant 0$.

方程(8)最早由 Kolmanovskii 和 Nosov 于 1982 年在其文献[31]中提出,其意义是将确定中立型泛函微分方程推广到随机中立型泛函微分方程.后来,Mao[32-33]分别讨论了中立型泛函型随机微分方程解析解的均方指数稳定性以及运用 Razumikhin 技术证明解的指数稳定性.其后,相关学者开展一系列出色的研究工作,如 Liao 等[34]研究了中立型随机时滞微分方程解析解的几乎必然指数稳定性;Luo 等[35]为了克服文献[36]中要求函数满足线性增长条件和时滞为常数,提出局部 Lipschitz 条件,建立了相应的稳定性定理,证明了中立型时滞微分方程解析解的指数均方稳定性;胡荣[37]在其学位论文中详细讨论了方程(8)的解的渐近性态.

数值格式方面,Huang[38]研究了随机时滞微分方程(6)的 θ 方法、分步 θ 方法的稳定性.文中指出,当 $\theta\in[1/2,1]$ 时,θ 方法对所有步长都是均方渐近稳定的; 当 $\theta\in[0,1/2)$ 时,漂移项 f 如果满足如下条件(9),θ 方法则对有界步长是均方渐近稳定的:

$$f^{\mathrm{T}}(t,u,v)Qf(t,u,v)\leqslant K_1u^{\mathrm{T}}Qu+K_2v^{\mathrm{T}}Qv,\quad (t,u,v)\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d, \tag{9}$$

其中,Q 为正定矩阵,K_1,K_2 是常数.在同等条件下,作者证明分步 θ 方法比 θ 方法具有更强的稳定性.也就是,当 $\theta\in(1/2,1]$ 时,分步 θ 方法对所有步长都是均方指数稳定的; 当 $\theta\in[0,1/2]$ 时,若漂移项 f 满足条件(9),则分步 θ 方法对有界步长是均方指数

稳定的.

Liu 等[39]研究了中立型随机时滞微分方程(7)的 θ 方法、分步 θ 方法的稳定性.假设 f,g 满足条件:

$$(u-G(v))^{\mathrm{T}}Qf(u,v)+\frac{1}{2}Tr[g^{\mathrm{T}}(u,v)Qg(u,v)]\leqslant \alpha u^{\mathrm{T}}Qu+\beta v^{\mathrm{T}}Qv,$$

其中,$\alpha+\beta<0$,作者证明了当 $\theta\in[1/2,1]$ 时,θ 方法和分步 θ 方法对所有步长分别是均方渐近稳定和均方指数稳定的;当 $\theta\in[0,1/2)$ 或 $\theta\in(0,1/2]$ 时,如果 f 进一步满足条件(9),则 θ 方法对有界步长是均方渐近稳定的,而分步 θ 方法对任意步长是均方指数稳定的.

Zong 等[40]考虑了中立型随机时滞微分方程(7).在打包的单调性条件下:

$$2[x-G(y)]^{\mathrm{T}}f(x,y)+|g(x,y)|^2\leqslant -\mu|x|^2+\sigma|y|^2, \quad (10)$$

其中,$\mu>\sigma$,证明了 θ 方法和分步 θ 方法都是均方指数稳定的.其中,当 θ 在[0,1]的后半区间都是无条件指数均方稳定的,当 θ 在[0,1]的前半区间时,漂移项 f 如果进一步满足线性增长条件 $|f(x,y)|^2\leqslant K(|x|^2+|y|^2)$,两类 θ 方法对有界步长是均方指数稳定的.

2015 年,Zhou[41]运用非负半鞅收敛定理研究了方程(8)的 BEM 方法的几乎必然指数稳定性.假设 f,g 满足局部 Lipschitz 条件,且满足下面的多项式增长条件(polynomial growth conditions):

$$2\langle\varphi(0)-G(\varphi_1),f(\varphi(0),\varphi)\rangle\leqslant -a_0|\varphi(0)|^2+\frac{\hat{a}}{\tau}\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\theta+\frac{\dot{a}}{\tau}\int_{-\tau}^{0}|\varphi_1(\theta)|^2\mathrm{d}\theta+\frac{a}{\tau}\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{\alpha+2}\mathrm{d}\theta+\frac{\bar{a}}{\tau}\int_{-\tau}^{0}|\varphi_1(\theta)|^{\alpha+2}\mathrm{d}\theta-\tilde{a}|\varphi(0)|^{\alpha+2},$$

$$|g(\varphi(0),\varphi)|^2\leqslant b_0|\varphi(0)|^2+\frac{\bar{b}}{\tau}\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{\alpha+2}\mathrm{d}\theta+\tilde{b}|\varphi(0)|^{\alpha+2},$$

其中 $\alpha,a_0,\hat{a},\dot{a},a,\bar{a},\tilde{a},b_0,\bar{b},\tilde{b}$ 是正常数,$\varphi,\varphi_1\in C([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$.在保证 BEM 方法有定义的情况下(即单边 Lipschitz 条件),BEM 方法可以重现方程解析解的几乎必然指数稳定性.文中还指出,显式的 EM 方法需要将上述条件替换为

$$2\langle\varphi(0)-G(\varphi_1),f(\varphi(0),\varphi)\rangle\leqslant -a_0|\varphi(0)|^2+\frac{\bar{a}}{\tau}\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\theta+\frac{a}{\tau}\int_{-\tau}^{0}|\varphi_1(\theta)|^2\mathrm{d}\theta,$$

$$|f(\varphi(0),\varphi)|^2\vee|g(\varphi(0),\varphi)|^2\leqslant b_0|\varphi(0)|^2+\frac{\bar{b}}{\tau}\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\theta,$$

EM 方法才能重现解析解的几乎必然指数稳定性.Zhou 等[42]用类似的技术研究了(非中立型)随机泛函微分方程数值解的几乎必然指数稳定性.

由于中立型随机泛函微分方程(8)很难求出其解析解,因此研究方程的数值方法具有重要意义.除上述工作,学者们还研究了不同数值方法的各种稳定性和收敛性[43-45].其中,Wang 等[23]讨论了中立随机时滞微分方程 BEM 方法的均方渐近稳定性;随后,Yu 等[8,46-47]讨论了方程(8)的 EM 方法、BEM 方法的几乎必然渐近稳定性和指数稳定性;Zong 等[48]讨论了中立随机时滞微分方程 EM 方法和 BEM 的矩指数稳定性和几乎必然指数稳定性;Wu 等[49]研究了方程(8)EM 方法的强均方收敛性.其他文献见[50-51].

2.2 具有 Markov 跳的随机微分方程

早在 1960 年,Kats 等[52]和 Krasovskii[53]就开始了马尔科夫跳随机系统稳定性和控制方面的研究.随后,Milstein 等[54]对这类系统解的矩稳定性进行了探讨.近年来,不少学者对系统解的存在唯一性、稳定性和数值方法的收敛性和稳定性进行了研究,取得了很多研究成果[55-61].

1999 年,Mao[62]考虑了具有 Markov 跳的 Itô 型随机微分方程:

$$\mathrm{d}x(t)=f(x(t),t,r(t))\mathrm{d}t+g(x(t),t,r(t))\mathrm{d}W(t), \quad (11)$$

其中 $f:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+\times S\to\mathbf{R}^n$, $g:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+\times S\to\mathbf{R}^{n\times m}$. $W(t)$ 是 m-维维纳过程,$r(t)$ 是连续的马尔科夫链,它在有限状态空间 $S=\{1,2,\cdots,N\}$ 中取值.在保证方程解是存在唯一的条件下(即 f,g 满足局部 Lipschitz 条件和线性增长条件),文章用 Lyapunov 函数法研究了方程解析解的 p-阶矩指数稳定性.即,假定存在函数 $V(x,t,i)\in C^{2,1}(\mathbf{R}_0^n\times\mathbf{R}_+\times S;\mathbf{R}_+)$ 满足:

$$c_1|x|^p\leqslant V(x,t,i)\leqslant c_2|x|^p,\quad LV(x,t,i)\leqslant -\lambda|x|^p,$$

则方程的解是 p-阶矩指数稳定的,即

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log(\mathrm{E}|x(t;x_0)|^p)\leqslant -\frac{\lambda}{c_2}<0.$$

进一步,如果 f,g 满足一致 Lipschitz 连续条件,则由解的 p-阶矩指数稳定可推出其几乎必然指数稳定,即

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log(|x(t;x_0)|)\leqslant -\frac{\lambda}{c_2p}<0.$$

关于算子 L,请参考经典文献[2].

Mao 等在文献[63]中详细介绍了马尔科夫跳随机微分方程解的存在唯一性、稳定性以及数值方法的收敛性、稳定性.书中指出,如果方程(11)的 f,g 满足局部 Lipschitz 条件,且线性增长条件替换为下面的单调性条件(monotone condition):

$$x^{\mathrm{T}}f(x,t,i)+\frac{1}{2}|g(x,t,i)|^2\leqslant K(1+|x|^2),\quad(12)$$

则方程(11)在$[t_0,T]$上有唯一解.实际上,因为单调性条件允许 f 可以是 $x-x^3$ 这种非线性函数,所以它比线性增长条件弱.另外,他们还证实:关于方程(11)的数值解,如果某个数值方法产生的数值解 $X(t)$ 在初始值 x_0 下,对充分小的步长和任意 $T>0$ 满足矩估计和逼近条件:

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathrm{E}|X(t)|^2<B_{x_0,T},$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathrm{E}|X(t)-x(t)|^2\leqslant C_T\Delta\mathrm{E}|x_0|^2,$$

其中,$B_{x_0,T}$是依赖于 x_0 和 T 的常数,C_T 是依赖于 T 的常数,$x(t)$是方程的解析解,则方程(11)的解析解是均方指数稳定的,当且仅当存在步长 $\Delta>0$,数值方法是均方指数稳定的.这一结论描述了方程的解析解和数值解在什么条件下可以等价.我们在下文还将重点介绍此类工作.其次,文献[63]还讨论了哪些数值方法能满足这些条件.后来,Higham 等[64]结合 EM 方法和随机 θ 方法,运用文献[63]的思想讨论了这两种数值方法的稳定性.而且,针对具有 Markov 跳的线性随机微分方程

$$\mathrm{d}x(t)=\mu(r(t))x(t)\mathrm{d}t+\sigma(r(t))x(t)\mathrm{d}W(t),\quad(13)$$

文献[64]给出了解的二阶矩 Lyapunov 指数:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log(\mathrm{E}\,|\,x(t)\,|^2)=\sum_{j\in S}\pi_j(2\mu_j+\sigma_j^2).$$

当且仅当上式右端小于零时,方程(13)的解是均方指数稳定的.这里,$\mu(j)=\mu_j,\sigma(j)=\sigma_j,S=\{1,2,\cdots,N\}$.Markov 链的概率分布 $\pi_j>0$ 满足 $\sum_{j=1}^{N}\pi_j=1$.

文献[9]分析了方程(13)解的 Lyapunov 指数:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log(|\,x(t)\,|)=\sum_{j=1}^{N}\pi_j\left(\mu_j-\frac{1}{2}\sigma_j^2\right)\quad \text{a.s.}$$

当且仅当上式右端小于零时,方程(13)的解是几乎必然指数稳定的.文献[9]证明,不论是线性的随机微分方程(13),还是一般形式的具有 Markov 跳的随机微分方程

$$\mathrm{d}x(t)=f(x(t),r(t))\mathrm{d}t+g(x(t),r(t))\mathrm{d}W(t),\quad(14)$$

当 f,g 满足线性增长条件:

$$|f(x,i)|\vee|g(x,i)|\leqslant K|x|,\quad \forall(x,i)\in\mathbf{R}^n\times S,$$

EM 方法均能重现相应方程解析解的几乎必然指数稳定性和 p-阶矩指数稳定性.2011 年,Mao 等[65]发现,当漂移项 f 是 x 的非线性函数时,方程(14)仍有可能是几乎必然指数稳定的,但 EM 方法不能重现其稳定性.原因是,EM 方法本身格式的特点决定其在推导几乎必然稳定性过程中,需要 f 满足线性增长条件.文献[65]还指出,隐式的 BEM 方法可以放宽这一条件,只要满足:

$$|f(x,i)|\leqslant h_k|x|,\quad |x|\leqslant k,\quad i\in S,\quad h_k>0,$$

$$(x-y)^{\mathrm{T}}(f(x,i)-f(y,i))\leqslant\mu_i|x-y|^2,$$

$$\forall(x,y)\in\mathbf{R}^n,\quad \mu_i\in\mathbf{R},$$

即允许 f 是非线性的条件下,BEM 方法可以重现方程解的几乎必然指数稳定性.这一条件的放宽显示出 BEM 方法的优越性,从而引起了学者们对随机系统 BEM 方法的广泛研究[66-68].

2004 年,Yuan 等[55]在 f,g 满足线性增长条件下,先证明方程(14)的解和 EM 数值解是 p-阶矩有界的;然后,当 f,g 进一步满足局部 Lipschitz 条件时,EM 方法数值解均方收敛到方程的解析解.由于有些函数不一定满足 Lipschitz 条件,文献[69]在非 Lipschitz 条件下,通过引入新的单调递增函数作为判断条件,讨论了方程(14)的 EM 方法的收敛性问题.

2006 年,Li 等[70]考虑了具有 Markov 跳的随机时滞微分方程

$$\mathrm{d}x(t)=f(x(t),r(t))\mathrm{d}t+g(x(t-\tau),r(t))\mathrm{d}W(t),\quad(15)$$

证明了当 f,g 满足全局 Lipschitz 条件以及

$$2x^{\mathrm{T}}f(x,i)\leqslant\alpha_i|x(t)|^2,\ |g(x,i)|^2\leqslant\beta_i|x(t)|^2,\quad(16)$$

其中,$\alpha_i\in\mathbf{R},\beta_i\geqslant0$,如果参数 α_i,β_i 所组成的矩阵与一个非奇异 M 阵满足相关条件,则 EM 方法数值解是均方指数稳定的.此处,因为函数 g 中含有时滞 τ,与 f 不同,所以要把单调性条件(12)拆开处理,从而条件(16)要比(12)强.

对于函数 f,g 中均含有时滞 τ 的具有 Markov 跳的随机时滞微分方程,文献[71]研究了方程解的 p-阶矩指数稳定性,并当 f,g 满足线性增长条件时,证明了由 p-阶矩指数稳定性可推出解的几乎必然指数稳定性.后来,Mao 等[60]把该系统推广到具有 Markov 跳的中立型随机时滞系统:

$$\mathrm{d}[x(t)-G(x(t-\tau),r(t))]=f(x(t),x(t-\tau),t,r(t))\mathrm{d}t+$$

$$g(x(t),x(t-\tau),t,r(t))\mathrm{d}W(t), \quad (17)$$

给出了充分条件,证明系统解的几乎必然指数稳定性.此处,$G(x(t-\tau),r(t))$代表中立项.

2.3 具有 Poisson 跳的随机微分方程

关于 Poisson 跳的随机微分方程及其数值方法,Higham 等[72]做了早期且重要的工作.2005 年,他们首次将随机微分方程的研究方法和技巧推广到如下带 Poisson 跳的随机微分方程中:

$$\mathrm{d}x(t)=f(x(t^-))\mathrm{d}t+g(x(t^-))\mathrm{d}W(t)+ h(x(t^-))\mathrm{d}N(t), \quad (18)$$

其中f,g,h分别称为漂移项、扩散项和跳跃项系数,$x(t^-)=\lim\limits_{s\to t^-}x(s)$,$W(t)$是定义在完备概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一维布朗运动,$N(t)$是定义在相同空间上的强度为$\lambda$的一维 Poisson 过程.假设$W(t)$和$N(t)$是相互独立的.显然,当跳跃项$h=0$时,方程退化为一般的随机微分方程.文献[72]证明,当漂移项系数满足单边 Lipschitz 条件,扩散项和跳跃项系数满足全局 Lipschitz 条件:

$$\langle x-y,f(x)-f(y)\rangle \leqslant\mu|x-y|^2, \quad \forall x,y\in\mathbf{R}^n, \quad (19)$$

$$|g(x)-g(y)|^2\leqslant L_g|x-y|^2, \quad \forall x,y\in\mathbf{R}^n, \quad (20)$$

$$|h(x)-h(y)|^2\leqslant L_h|x-y|^2, \quad \forall x,y\in\mathbf{R}^n \quad (21)$$

时,分步向后欧拉法(split-step backward Euler)和补偿分步向后欧拉法(compensated split-step backward Euler)是均方指数稳定的.分步向后欧拉法格式为

$$Y_n^*=Y_n+f(Y_n^*)\Delta,$$

$$Y_{n+1}=Y_n^*+g(Y_n^*)\Delta W_n+h(Y_n^*)\Delta N_n. \quad (22)$$

实际上,分步向后欧拉法等价于下面修正系统:

$$\mathrm{d}X_\Delta(t)=f_\Delta(X_\Delta(t^-))\mathrm{d}t+g_\Delta(X_\Delta(t^-))\mathrm{d}W(t)+ h_\Delta(X_\Delta(t^-))\mathrm{d}N(t) \quad (23)$$

的显式欧拉方法

$$Y_{n+1}=Y_n+f_\Delta(Y_n)\Delta+g_\Delta(Y_n)\Delta W_n+h_\Delta(Y_n)\Delta N_n.$$

但分步法的提出有其结构上的优势.比如,更能方便地对漂移项f运用单边 Lipschitz 条件,在推导上比一步法更灵活,从而能够得到方法的稳定性结论.文献中结论表明,分步向后欧拉法在有限步长内,数值解是均方指数稳定的.

补偿分步向后欧拉法格式为

$$Y_n^*=Y_n+f_\lambda(Y_n^*)\Delta,$$

$$Y_{n+1}=Y_n^*+g(Y_n^*)\Delta W_n+h(Y_n^*)\Delta N_n,$$

其中$f_\lambda(x)=f(x)+\lambda h(x)$满足单边 Lipschitz 条件.在分析中,一般引入补偿泊松过程$\widetilde{N}(t)=N(t)-\lambda t$,它是一个鞅.补偿分步向后欧拉法有更强的稳定性结论.即在一定条件下,如果原方程解析解均方指数稳定,则能推出数值解对所有步长均是均方指数稳定的.这种由方程稳定性可推出数值方法对所有步长是稳定的特性有时也称为A稳定性.

2006 年,Higham 等[73]继续研究了方程(18)的隐式θ方法,在全局 Lipschitz 条件下,证明了θ方法的收敛性、均方渐近稳定性和A稳定性.文中对(18)的线性形式,证明了当$\theta\geqslant 0.5$时,θ方法具有A稳定性.2007 年,Higham 等[67]证明了方程(18)的数值方法的收敛性,结论表明 EM 方法、SSBE 方法和 BEM 方法是强 0.5 阶收敛的.Yang 等[74]把 Tamed-Euler 方法应用于分段连续型带有 Poisson 跳的随机微分方程,得到数值解的强收敛性和估计出其方法的收敛阶.收敛性方面的研究可参见文献[58,75-78].

在 Poisson 跳随机微分方程数值计算方面,国内学者甘四清及其博士生做了很多工作.Wang 等[79]在漂移项满足单边 Lipschitz 条件,扩散项和跳跃项满足全局 Lipschitz 条件下,证明对有界步长,BEM 方法能保持方程(18)解析解的均方指数稳定性.对(18)的线性形式

$$\mathrm{d}x(t)=ax(t^-)\mathrm{d}t+bx(t^-)\mathrm{d}W(t)+cx(t^-)\mathrm{d}N(t), \quad (24)$$

证明了当$\theta\in[0,0.5)$时,随机θ方法对有界步长是均方渐近稳定的;而当$\theta\in[0.5,1]$时,随机θ方法在任意步长下是均方渐近稳定的,即满足A稳定性.随后,Hu 等[80]证明,对充分小步长,强平衡隐式方法和弱平衡隐式方法能重现方程(24)的均方渐近稳定性.

2011 年,Li 等[81]在文献[82]的基础上,考察如下带 Poisson 跳的随机时滞微分方程:

$$\mathrm{d}x(t)=f(t,x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}t+g(t,x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}W(t)+ h(t,x(t^-),x(t^--\tau))\mathrm{d}N(t), \quad (25)$$

作者运用离散非负半鞅收敛定理,证明了 EM 方法要在漂移项f满足线性增长的前提条件下,才能保持方程(25)解析解的几乎必然指数稳定性;如果线性增长条件减弱为单边 Lipschitz 条件时,BEM 方法可以重现方程解析解的几乎必然指数稳定性.这显示了隐式 BEM 方法在条件上的宽松性和优越性.关于方程(25)的研究还可参见文献[75,83-85].

在方程(25)的基础上,若考虑中立项的影响,则得到如下带 Poisson 跳的中立随机时滞微分方程:

$$\mathrm{d}[x(t)-G(x(t-\tau))]= f(t,x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}t+g(t,x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}W(t)+ h(t,x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}N(t). \quad (26)$$

显然,上面的方程比中立随机时滞方程和方程(25)

更复杂,要同时考虑中立项的存在和跳跃项的影响.2012 年,Tan 等[87] 在局部 Lipschitz 条件、线性增长条件以及压缩映射条件下,讨论了方程(26)解的存在唯一性.Liu 等[88] 运用不动点定理证明了积分形式表达的 Poisson 跳方程零解的均方渐近稳定性.2014 年,Tan 等[89] 证明了在局部 Lipschitz 条件下 EM 方法数值解收敛于方程的解析解.文献[90]讨论了方程(26)的随机 θ 方法的均方收敛性,以及相应的(非中立型)线性标量方程解的均方渐近稳定性.文献[91]证明了方程(26)的解析解和 θ 方法数值解的均方指数稳定性.文献[78]对 Poisson 跳驱动的正倒向随机微分方程提出了一类高精度数值方法.

3 解析解和数值解稳定性之间的等价性

近年来,随着讨论方程的不断复杂化,对各种不同类型的方程和数值方法的研究也非常活跃,得到了很多结果[92-94].但是我们注意到,很多考虑稳定性的文献,其研究思路基本上是由某个 A 条件推出方程解析解的稳定性,然后考察数值解能否在 A 条件下重现方程真实解的稳定性.当然,我们希望数值解能在解析解稳定的相同条件下得到相应的稳定性.如果不行,则需要在 A 条件下加强一点什么条件,才能推出数值解相应的稳定性.显然,这种条件其实是充分条件,单向性的.真正方程的解析解稳定性和数值解稳定性之间的双向性互推并没有实现.而这一点,正是我们研究数值解稳定性的意义所在.

2003 年,Higham 等[95] 对最简单的 n-维随机微分方程提出了两个公开问题.

$$\mathrm{d}y(t)=f(y(t))\mathrm{d}t+g(y(t))\mathrm{d}W(t),$$
$$t\geqslant 0,\quad f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n,\quad g:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{n\times m}. \tag{27}$$

问题 1 如果随机微分方程是均方指数稳定的,那么对充分小步长,数值方法是否也均方指数稳定?

问题 2 对较小步长,如果某个数值方法是均方指数稳定的,能否推断相应的随机微分方程也是均方指数稳定的?

在下面的条件下,文献[95]给出了解析解和数值解之间的稳定性等价定理:

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathrm{E}|x(t)|^2\leqslant B_{\xi,T},\quad \forall T\geqslant 0,$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathrm{E}|x(t)-y(t)|^2\leqslant(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\mathrm{E}|x(t)|^2)C_T\Delta,$$

其中,常数 $B_{\xi,T}$依赖于 ξ,T,C_T 依赖于 $T.x(t),y(t)$ 分别指数值解和解析解.

定理 1 假设某个数值方法满足上面的条件,则随机微分方程(27)是均方指数稳定的,当且仅当数值方法是均方指数稳定的,且存在常数 $T>0$,使得步长 $\Delta>0$ 满足:

$$C_{2T}\mathrm{e}^{\gamma T}(\Delta+\sqrt{\Delta})+1+\sqrt{\Delta}\leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{4}\gamma T},\quad C_T\Delta\leqslant 1, \tag{28}$$

其中 $\gamma>0$ 是均方指数稳定的衰减率.

后来,Mao[96] 把该思想应用到随机时滞微分方程(6),当 f,g 满足全局 Lipschitz 条件时,讨论了方程(6)的解析解和 EM 方法数值解的均方指数稳定性的等价问题.借助于该文的方法,2016 年,文献[97]考虑了具有分段常数时滞的随机微分方程,在一定条件下,证明了方程解析解和 EM 方法数值解的均方指数稳定性是等价的.

2015 年,Mao[98] 把上面研究的均方指数稳定性推广到更一般的稳定性,再次对两个公开问题展开讨论.

问题 1* 如果随机微分方程是稳定的(比如均方指数稳定或几乎必然指数稳定),数值方法是否也随机稳定?

问题 2* 对较小步长,如果某个数值方法是随机稳定的,能否推断相应的随机微分方程也是随机稳定的?

假设 1 对充分小的步长 Δ,数值解 x_k 满足:

$$\sup_{0\leqslant k\Delta\leqslant T}\mathrm{E}|x_k|^p\leqslant \overline{H}(T,p,K)|y_0|^p,\quad \forall T\geqslant 0, \tag{29}$$

其中,$x_0=y_0$ 是初始值,$p\in(0,1)$,$\overline{H}(T,p,K)$是依赖 T,p,K 的正常数.

假设 2 对充分小的步长 Δ,数值解 x_k 满足:

$$\sup_{0\leqslant k\Delta\leqslant T}\mathrm{E}|x_k-y(k\Delta)|^p\leqslant C_T|y_0|^p h(\Delta),\quad \forall T\geqslant 0, \tag{30}$$

其中,$x_0=y_0$ 是初始值,$p\in(0,1)$,C_T 是依赖 T 的正常数,$h:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$是严格递增的连续函数,且 $h(0)=0$.

文献[98]给出结论:

1) 若假设 1、假设 2 满足,则方程(27)解的 p-阶矩指数稳定⇒数值解 p-阶矩指数稳定(回答问题 1*).

2) 若假设 1、假设 2 满足,且步长满足下列条件(31),则数值解的 p-阶矩指数稳定⇒方程(27)解的 p-阶矩指数稳定(回答问题 2*).

3) 若假设 1、假设 2 满足,且参数 T 及步长满足下列条件(31),则方程(27)解的 p-阶矩指数稳定⇔数值解 p-阶矩指数稳定.

$$2^p C_T h(\Delta)+\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\gamma T}\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\gamma T}, \tag{31}$$

其中 γ 是 p-阶矩指数稳定的衰减率.

实际上,结论 3)给出了数值解和解析解稳定性

等价的充分必要条件，具有重要的理论意义.假设 1 是关于数值解 p-阶矩的有界估计，假设 2 是数值解和解析解收敛性的估计，我们称之为逼近度条件，基于这类条件的研究技巧称之为逼近度方法.由于这两个假设在实际中很难判断，所以作者给出了具体的条件，使得这两个假设可以成立.那就是全局 Lipschitz 条件及在此基础上的步长条件：

$$|f(x)-f(y)| \vee |g(x)-g(y)| \leqslant K|x-y|,\quad \forall x,y\in\mathbf{R}^n, \tag{32}$$

$$(6\vee 2K^2)\Delta<1, \tag{33}$$

如果随机 θ 方法满足假设 1 和假设 2.那么，研究 θ 方法的 p-阶矩指数稳定性可以得到方程(27)解的 p-阶矩指数稳定性.这类结果揭示了：数值格式的稳定性与连续模型稳定性在逻辑上可以互推.因此，这是目前数值研究中不多见的一种研究思路，其进一步的研究，也相当具有挑战性.

4　对逼近度方法学术思路的分析

从终极目标看，我们的研究目的是提供可靠的理论保障，使我们能从系统仿真结果推断系统的渐近性态，如稳定性.因此，需要先确定系统解析解与数值解稳定性可以从逻辑上互推的性质，提供严密的理论依据.显然，为实现这类互推，需要建立两种解之间的关联，否则，不可能存在互推.而这种关联，用逼近度描述正好合适，其原因在于：1）我们设计方程求解的数值格式，分析其逼近度是最主要的一项基础工作，对我们的需要来说，是顺手的事；2）符合互推稳定性的需要.所以，在毛学荣教授及其合作者的系列论文中，提出了这类假设，即数值格式具有高于零阶的逼近度，其实就是局部截断误差、收敛性[95-96].当然，我们也注意到，这类假设直接涉及方程的解析解和数值解本身，而问题是：我们并不具体知道它们.正是因为方程难以求解，我们才借助数值计算与仿真.所以，其实这类条件本身是不能直接验证的.因此，需要采用其他条件对此予以保证，例如 Lipschitz 条件.在 Mao[98] 提出一般理论之前，以前的相关文献直接采用 Lipschitz 条件，高于零阶的逼近度是其自然推论.从这个角度来看，采用 Lipschitz 条件而不是采用逼近度的假设，更加符合研究结果的描述与验证.但是，如果有 Lipschitz 条件，则当然有了高于零阶的逼近度，所以，逼近度条件其实更弱.这里，为清晰和比较起见，我们不妨称逼近度方法所得结果为命题，而采用 Lipschitz 条件的结果为判据.

5　随机微分方程数值计算与仿真所面临的的挑战

5.1　关于等价性结论与数值仿真结果的意义与运用

通过数值仿真真的可以确定系统解析解的稳定性吗？难!

实际上，当我们在一定条件下建立了解析解与数值解之间的稳定性等价性定理，我们所得的是系统稳定性之间的等价性，是系统与系统之间的互推关系，是集合与集合之间的互推关系，而不是两个系统个别解之间的互推关系.原理上，我们的仿真一次只确定一个解的渐近性态，而一般地，基于一个解的渐近性态，例如就是指数渐近稳定性，我们还是不足以推断整个数值格式的稳定性，更不能推断关于解析解的任何性质，哪怕我们就是想推断一个解的性质，那也不能，因为没有依据.那么，我们如何从仿真结果确定数值格式以及原系统解析解系统的稳定性呢？首先，我们需要有等价性结论作基础；其次，我们需要确证数值格式稳定.在假设第一个问题已有结论的前提下，我们来看第二个问题，即确定数值格式稳定的难度.为讨论方便，我们先放下随机微分方程，回到确定型方程.简单说，这个问题其实就是差分格式通解的构成问题.如果差分格式的通解可以由若干互不相关的特解构成，例如就是线性组合，而我们又能确定若干互不相关的特解的渐近性态，那问题就解决了.所以，如果我们的格式是 n 阶常系数线性差分格式，则需要 n 个互不相关的特解的渐近性态，也就是说：我们需要 n 个初值线性无关的特解的仿真结果.当然，如果 $n=1$，一个仿真结果就够了.但是，如果方程再略微复杂，则难以有如此明确的结论，问题的难度也陡增.例如，如果我们的格式是非线性格式、随机格式，因为一般不存在关于通解构成的基础理论，我们就不完全知道需要用多少个特解来确定通解（即便是存在所谓的通解）.因此，也就不知道需要用多少个仿真来确定格式的稳定性.我们认为：可以用多少个、用什么样的仿真结果确定数值格式的稳定性从而可以推断原系统解析解的稳定性是一个具有挑战性的问题.

5.2　面向渐近稳定性的等价性结论

因为推导的需要，目前的等价性结论都是面向指数稳定性的.但是，实际上，数字计算与仿真提供的是具有直观属性的数字与图形.一般地，从一个仿真结果很难看出一个数值解是否真的就是指数稳定，只能看出是否是渐近稳定.只有面向渐近稳定性

的等价性结论才有实用价值.因此,我们需要建立面向渐近稳定性的等价性结论,而这,其论证难度陡增,也是今后可以考虑但具有相当难度的一个挑战课题.

结束语与致谢:

由于时间、篇幅和水平所限,本文所综述的工作只是相关工作中的一点点,难免挂一漏万,敬请谅解.

在本文写作过程中,吴付科教授、宋明辉教授、宗小峰博士、刘暐博士、付余老师、杨慧子博士及赵桂华老师等给予了大力指导、支持与协助.在此,向为本文写作给予了支持的所有师生表示衷心的感谢.

参考文献
References

[1] Kloeden P E, Platen E. Numerical solution of stochastic differential equations[M].Springer- Verlag Berlin, Germany Google Scholar,1992
[2] Mao X. Stochastic differential equations and applications [M].Elsevier,2007
[3] Kloeden P E, Platen E. Higher-order implicit strong numerical schemes for stochastic differential equations[J]. Journal of Statistical Physics,1992,66(1/2):283-314
[4] Liang H, Yang Z, Gao J. Strong superconvergence of the Euler-Maruyama method for linear stochastic Volterra integral equations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2017,317:447-457
[5] Wang X, Gan S. Weak convergence analysis of the linear implicit euler method for semilinear stochastic partial differential equations with additive noise [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2013,398(1): 151-169
[6] Higham D J. Stochastic ordinary differential equations in applied and computational mathematics[J].IMA Journal of Applied Mathematics,2011,76:449-474
[7] Higham D J, Mao X, Stuart A M. Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2002,40(3):1041-1063
[8] Yu Z. Almost sure and mean square exponential stability of numerical solutions for neutral stochastic functional differential equations [J]. International Journal of Computer Mathematics,2015,92(1):132-150
[9] Pang S, Deng F, Mao X. Almost sure and moment exponential stability of Euler-Maruyama discretizations for hybrid stochastic differential equations[J].Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 213 (1): 127-141
[10] Hutzenthaler M, Jentzen A, Kloeden P E. Strong and weak divergence in finite time of Euler's method for stochastic differential equations with non-globally lipschitz continuous coefficients[J]. Proceedings of the Royal Society A Mathematical, Physical and Engineering Sciences,2009,467(2130):1563-1576
[11] Hutzenthaler M, Jentzen A, Kloeden P E. Strong convergence of an explicit numerical method for SDEs with non-globally lipschitz continuous coefficients[J]. The Annals of Applied Probability,2012:1611-1641
[12] Hutzenthaler M, Jentzen A. Numerical approximations of stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients [M]. American Mathematical Society,2015
[13] Wang X, Gan S. The tamed Milstein method for commutative stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients[J].Journal of Difference Equations and Applications,2013,19(3):466-490
[14] Zong X, Wu F, Huang C. Convergence and stability of the semi-tamed Euler scheme for stochastic differential equations with non-Lipschitz continuous coefficients[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 228: 240-250
[15] Mao X. The truncated Euler-Maruyama method for stochastic differential equations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 290: 370-384
[16] Mao X. Convergence rates of the truncated Euler-Maruyama method for stochastic differential equations [J].Journal of Computational and Applied Mathematics, 2016,296:362-375
[17] Guo Q, Liu W, Mao X, et al. The partially trumcated Euler-Maruyama method and its stability and bounded ness[J]. Applied Numerical Mathematics, 2017, 115: 235-251
[18] Guo Q, Liu W, Mao X, et al. The truncated milstein method for stochastic differential equations [J]. arXiv: 1704.04135[math.NA],2017
[19] Zhang Z, Ma H. Order-preserving strong schemes for SDEs with locally Lipschitz coefficients[J]. Applied Numerical Mathematics,2017,112:1-16
[20] Milstein G N, Tretyakov M V. Stochastic numerics for mathematical physics[M].Springer Science & Business Media,2013
[21] Tretyakov M V, Zhang Z. A fundamental mean-square convergence theorem for SDEs with locally Lipschitz coefficients and its applications[J].SIAM Journal on Numerical Analysis,2013,51(6):3135-3162
[22] Müller-Gronbach T. The optimal uniform approximation of systems of stochastic differential equations [J]. The Annals of Applied Probability,2002,12(2):664-690
[23] Wang W, Chen Y. Mean-square stability of semi-implicit Euler method for nonlinear neutral stochastic delay differential equations [J]. Applied Numerical Mathematics, 2011,61(5):696-701
[24] Zong X, Wu F, Choice of θ and mean-square exponential stability in the stochastic theta method of stochastic differential equations[J].Journal of Computational and Applied Mathematics,2014,255:837-847
[25] Zhou S, Xie S, Fang Z. Almost sure exponential stability

of the backward Euler-Maruyama discretization for highly nonlinear stochastic functional differential equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 236: 150-160

[26] Zong X, Wu F, Huang C. Preserving exponential mean square stability and decay rates in two classes of theta approximations of stochastic differential equations[J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2014, 20(7):1091-1111

[27] Huang C.Exponential mean square stability of numerical methods for systems of stochastic differential equations [J].Journal of Computational and Applied Mathematics, 2012,236(16):4016-4026

[28] 王小捷.随机微分方程数值算法研究[D].长沙:中南大学,2012
WANG Xiaojie.Numerical study of stochastic differential equations[D].Changsha:Central South University,2012

[29] 李燕.随机系统的稳定性与数值策略的研究[D].武汉:华中科技大学,2014
LI Yan. Research on stability and numerical strategy of stochastic systems[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology,2014

[30] 王冠军.几类随机非线性系统的动力学分析[D].南京:东南大学,2009
WANG Guanjun.Dynamical analysis for several classes of stochastic nonlinear systems[D].Nanjing:Southeast University,2016

[31] Kolmanovsky V, Nosov V.Stability of neutral-type functional differential equations[J].Nonlinear Analysis:Theory, Methods & Applications,1982,6(9):873-910

[32] Mao X. Exponential stability in mean square of neutral stochastic differential functional equations[J].Systems & Control Letters,1995,26(4):245-251

[33] Mao X.Razumikhin-type theorems on exponential stability of neutral stochastic differential equations[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis,1997,28(2):389-401

[34] Liao X, Mao X. Almost sure exponential stability of neutral stochastic differential difference equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1997,212(2):554-570

[35] Luo Q, Mao X, Shen Y. New criteria on exponential stability of neutral stochastic differential delay equations [J].Systems & Control Letters,2006,55(10):826-834

[36] Mao X.Asymptotic properties of neutral stochastic differential delay equations[J].Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes,2000,68 (3/4):273-295

[37] 胡荣.中立型随机泛函微分方程解的渐近性质[D].武汉:华中科技大学,2009
HU Rong. Asymptotic properties of solutions of neutral stochastic functional differential equations[D].Wuhan: Huazhong University of Science and Technology,2009

[38] Huang C.Mean square stability and dissipativity of two classes of theta methods for systems of stochastic delay differential equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2014,259:77-86

[39] Liu L, Zhu Q.Mean square stability of two classes of theta method for neutral stochastic differential delay equations [J].Journal of Computational and Applied Mathematics, 2016,305:55-67

[40] Zong X, Wu F, Huang C. Exponential mean square stability of the theta approximations for neu-tral stochastic differential delay equations[J].Journal of Computational and Applied Mathematics,2015,286:172-185

[41] Zhou S.Exponential stability of numerical solution to neutral stochastic functional differential equation[J].Applied Mathematics and Computation,2015,266:441-461

[42] Zhou S, Hu C.Numerical approximation of stochastic differential delay equation with coefficients of polynomial growth[J].Calcolo,2016:1-22

[43] 李启勇.几类随机延迟微分方程数值方法的稳定性分析[D].长沙:中南大学,2012
LI Qiyong.Stability analysis of numerical methods for several classes of stochastic delay differential equations[D]. Changsha:Central South Unirersity,2012

[44] 马强.几类随机微分方程的保结构数值方法[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2012
MA Qiang. Structure-preserving numerical methods for several classes of stochastic differential equations[D]. Harbin:Harbin Institute of Technology,2012

[45] 吴瑞华.几类随机种群模型渐近性质的研究[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2014
WU Ruihua.Research on asymptotic properties of several stochastic population systems [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology,2014

[46] Yu Z, Liu M.Almost surely asymptotic stability of numerical solutions for neutral stochastic delay differential equations[J].Discrete Dynamics in Nature and Society,2011, Doi:10.1155/2011/217672

[47] Yu Z. The improved stability analysis of the backward Euler method for neutral stochastic delay differential equations[J]. International Journal of Computer Mathematics,2013,90(7):1489-1494

[48] Zong X, Wu F.Exponential stability of the exact and numerical solutions for neutral stochastic delay differential equations[J].Applied Mathematical Modelling,2016,40 (1):19-30

[49] Wu F, Mao X.Numerical solutions of neutral stochastic functional differential equations[J].SIAM Journal on Numerical Analysis,2008,46(4):1821-1841

[50] Wu F, Hu S, Huang C.Robustness of general decay stability of nonlinear neutral stochastic functional differential equations with infinite delay[J].Systems & Control Letters,2010,59(3):195-202

[51] Jankovic S, Jovanovic M.The p-th moment exponential stability of neutral stochastic functional differential equations[J].Filomat,2006,20(1):59-72

[52] Kats I I, Krasovskii N.On the stability of systems with random parameters[J].Journal of Applied Mathematics and Mechanics,1960,24(5):1225-1246

[53] Krasovskii N, Lidskii E.Analytical design of controllers in systems with random attributes [J]. Automation and Remote Control,1961,22(1/2/3):1021-1025

[54] Mil'shtein G N, Repin Y M. The action of a Markov process on a system of differential equations [J]. Differentsial'nye Uravneniya,1969,5(8):1371-1384

[55] Yuan C, Mao X. Convergence of the Euler-Maruyama method for stochastic differential equations with Markovian switching[J]. Mathematics and Computers in Simulation,2004,64(2):223-235
[56] Wang L, Xue H. Convergence of numerical solutions to stochastic differential delay equations with Poisson jump and Markovian switching[J]. Applied Mathematics and Computation,2007,188(2):1161-1172
[57] 王振东.基于可控马尔科夫链的跳跃系统控制问题研究[D].合肥:中国科学技术大学 ,2014
WANG Zhendong. Control of Markovian jump systems with controllable Markov chain[D]. Hefei: University of Science and Technology of China,2014
[58] Li R, Meng H, Dai Y. Convergence of numerical solutions to stochastic delay differential equations with jumps[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 172(1): 584-602
[59] Mao X, Yuan C, Yin G. Numerical method for stationary distribution of stochastic differential equations with Markovian switching[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2005,174(1):1-27
[60] Mao X, Shen Y, Yuan C. Almost surely asymptotic stability of neutral stochastic differential delay equations with Markovian switching[J]. Stochastic Processes and their Applications,2008,118(8):1385-1406
[61] Zhou S, Wu F. Convergence of numerical solutions to neutral stochastic delay differential equations with Markovian switching[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2009,229(1):85-96
[62] Mao X. Stability of stochastic differential equations with Markovian switching[J]. Stochastic Processes and Their Applications,1999,79(1):45-67
[63] Mao X, Yuan C. Stochastic differential equations with Markovian switching[M]. World Scientific,2006
[64] Higham D J, Mao X, Yuan C. Preserving exponential mean-square stability in the simulation of hybrid stochastic differential equations[J]. Numerische Mathematik,2007,108(2):295-325
[65] Mao X, Shen Y, Gray A. Almost sure exponential stability of backward Euler-Maruyama discretizations for hybrid stochastic differential equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, 235(5): 1213-1226
[66] Mao X, Szpruch L. Strong convergence rates for backward Euler-Maruyama method for nonlinear dissipative-type stochastic differential equations with super-linear diffusion coeffcients[J]. Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes,2013,85(1):144-171
[67] Higham D J, Kloeden P E. Strong convergence rates for backward Euler on a class of nonlinear jump-diffusion problems[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2007,205(2):949-956
[68] Wang X, Gan S. The improved split-step backward Euler method for stochastic differential delay equations[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2011, 88(11):2359-2378
[69] Mao X, Yuan C, Yin G. Approximations of Euler-Maruyama type for stochastic differential equations with Markovian switching, under non-lipschitz conditions[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007,205(2):936-948
[70] Li R, Meng H, Chang Q. Exponential stability of numerical solutions to SDDEs with Markovian switching[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 174(2):1302-1313
[71] Mao X, Matasov A, Piunovskiy A B, et al. Stochastic differential delay equations with Markovian switching[J]. Bernoulli,2000,6(1):73-90
[72] Higham D J, Kloeden P E. Numerical methods for nonlinear stochastic differential equations with jumps[J]. Numerische Mathematik,2005,101(1):101-119
[73] Higham D J, Kloeden P E. Convergence and stability of implicit methods for jump-diffusion systems[J]. International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 2006,3(2):125-140
[74] Song M, Yang H, Liu M, et al. Strong convergence of the tamed Euler method for stochastic differential equations with piecewise continuous arguments and Poisson jumps under nonglobally Lipschitz continuous coefficients[J]. Filomat, accepted
[75] Wang L, Mei C, Xue H. The semi-implicit Euler method for stochastic differential delay equation with jumps[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 192(2): 567-578
[76] Chalmers G D, Higham D J. Convergence and stability analysis for implicit simulations of stochastic differential equations with random jump magnitudes[J]. Discrete and Continuous Dy-namical Systems Series B, 2008, 9(1): 47-64
[77] 赵桂华.几类带跳随机微分方程数值解的收敛性和稳定性[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2009
ZHAO Guihua. Convergence and stability of numerical solutions for several classes of stochastic differential equations with jumps[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology,2009
[78] Fu Y, Zhao W, Zhou T. Multistep schemes for forward backward stochastic differential equations with jumps[J]. Journal of Scientific Computing, 2016, 69(2): 651-672
[79] Wang X, Gan S. Compensated stochastic theta methods for stochastic differential equations with jumps[J]. Applied Numerical Mathematics,2010,60(9):877-887
[80] Hu L, Gan S. Convergence and stability of the balanced methods for stochastic differential equations with jumps[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2011,88(10):2089- 2108
[81] Li Q, Gan S. Almost sure exponential stability of numerical solutions for stochastic delay differential equations with jumps[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing,2011,37(1/2):541-557
[82] Wu F, Mao X, Szpruch L. Almost sure exponential stability of numerical solutions for stochastic delay differential equations[J]. Numerische Mathematik, 2010, 115(4):681-697
[83] Tan J, Wang H. Mean-square stability of the Euler-Maruy-

ama method for stochastic differential delay equations with jumps[J].International Journal of Computer Mathematics,2011,88(2):421-429
[84] Li Q,Gan S,Wang X.Compensated stochastic theta methods for stochastic differential delay equations with jumps [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2013,90(5):1057-1071
[85] Jacob N,Wang Y,Yuan C.Stochastic differential delay equations with jumps, under nonlinear growth condition [J].Stochastics:An International Journal of Probability and Stochastics Processes,2009,81(6):571-588
[86] Jacob N, Wang Y, Yuan C. Numerical solutions of stochastic differential delay equations with jumps[J].Stochastic Analysis and Applications,2009,27(4):825-853
[87] Tan J,Wang H,Guo Y.Existence and uniqueness of solutions to neutral stochastic functional differential equations with Poisson jumps[J].Abstract and Applied Analysis, 2012(3):509-512
[88] Liu D, Yang G, Zhang W. The stability of neutral stochastic delay differential equations with Poisson jumps by fixed points[J].Journal of Computational and Applied Mathematics,2011,235(10):3115-3120
[89] Tan J, Wang H, Guo Y, et al. Numerical solutions to neutral stochastic delay differential equations with Poisson jumps under local Lipschitz condition[J].Mathematical Problems in Engineering,2014(1):1-11
[90] 胡琳.几类带泊松跳随机微分方程数值方法的收敛性与稳定性[D].长沙:中南大学,2012
HU Lin.Convergence and stability of numerical methods several classes of stochastic differential equations with Poisson-driven jumps[D].Changsha:Central South University,2012
[91] Mo H,Zhao X,Deng F.Exponential mean-square stability of the θ-method for neutral stochastic delay differential equations with jumps[J].International Journal of Systems Science,2017,48(3):462-470
[92] Song M,Yang H,Liu M.Convergence and stability of impulsive stochastic differential equations[J].International Journal of Computer Mathematics,2016:1-9
[93] 宗小峰.随机微分方程的数值分析及随机稳定化[D].武汉:华中科技大学,2014
ZONG Xiaofeng.Numerical analysis of stochastic differential equations and stochastic stabilization [D].Wuhan: Huazhong University of Science and Technology,2014
[94] Fu Y, Zhao W. An explicit second-order numerical scheme to solve decoupled forward backward stochastic equations [J]. East Asian Journal on Applied Mathematics,2014,4(4):368-385
[95] Higham D J, Mao X, Stuart A M. Exponential mean-square stability of numerical solutions to stochastic differential equations [J]. LMS Journal of Computation and Mathematics,2003,6:297-313
[96] Mao X.,Exponential stability of equidistant Euler-Maruyama approximations of stochastic differential delay equations[J].Journal of Computational and Applied Mathematics,2007,200(1):297-316
[97] Milošević M.The Euler-Maruyama approximation of solutions to stochastic differential equations with piecewise constant arguments[J].Journal of Computational and Applied Mathematics,2016,298:1-12
[98] Mao X.Almost sure exponential stability in the numerical simulation of stochastic differential equations[J].SIAM Journal on Numerical Analysis,2015,53(1):370-389

Investigation on stability of numerical schemes of stochastic differential equations: A survey

DENG Feiqi[1] MO Haoyi[1,2]
1 School of Automation Science and Engineering,South China University of Technology,Guangzhou 510640
2 School of Applied Mathematics,Guangdong University of Technology,Guangzhou 510006

Abstract In this paper,a survey is given for the investigation on the stability of numerical schemes of stochastic differential equations in the past years.As a related topic,the convergence of the schemes is involved.The paper introduces the achieved results by literatures for the classical Itô stochastic differential equations,stochastic functional differential equations of the neutral type, and the stochastic differential equations with Markov or Poisson jumps.The involved numerical schemes include the Euler-Maruyama scheme, the Backward Euler-Maruyama scheme, the θ scheme,and the split-step scheme,etc.The paper analyzes the academic thoughts in some classical literatures on the stability equivalence theorems and proposes some problems and challenges for further investigations on the numerical computations and simulations of stochastic differential equations at the end of the paper.

Key words stochastic differential equations;numerical schemes;stability;simulations