DOI:10.13878/j.cnki.jnuist.2017.03.005

吴付科[1]　张维海[2]

随机微分方程的稳定性理论:方法概述

摘要

从所应用的主要方法出发,回顾了随机连续系统的各种稳定性理论结果,并探讨了这些稳定性之间的关系.

关键词

随机系统;随机微分方程;几乎处处稳定性;矩稳定性;依概率稳定性;分布稳定性;随机镇定

中图分类号 P393

文献标志码 A

收稿日期 2017-04-16

资助项目 国家自然科学基金(61473125);国家自然科学优秀青年基金(11422110)

作者简介

吴付科,男,博士,教授,2011 年入选教育部新世纪优秀人才支持计划,2014 年获得基金委优秀青年基金资助,主要从事随机微分方程以及相关领域的研究.wufuke@ hust.edu.cn

1 华中科技大学 数学与统计学院,武汉,430074

2 山东科技大学 电气与自动化工程学院,青岛,266590

1 前言及稳定性介绍

随机现象广泛存在于生物、金融、通信及控制等领域,是影响系统性质的重要因素.当一个系统受到随机波动的干扰时,结果将变得更加多样和复杂.比如:在生物系统中,随机因素往往是生物多样性的关键因素[1-2],同时,适当的随机因素也能诱导系统产生新的稳定状态[3-4]或导致种群产生稳定分布[5],另一方面,过强的随机冲击也能导致种群灭绝[6-7].由此可见,随机因素的引入使系统产生了丰富的研究课题,研究随机因素对系统的影响对于揭示系统运行的机制具有重要意义.由于这些随机系统往往需要用随机微分方程描述,因此从数学的角度来讨论随机微分方程的性质及其应用就变得至关重要.

自从 Itô 引进随机积分以来的半个多世纪里,随机微分方程获得了迅速的发展,当 Lyapunov 方法被引入随机微分方程之后,随机微分方程的稳定性理论获得了快速发展,在 Arnold[8]、Friedman[9]、Khasminskii[10]、Kushner[11-13]和毛学荣教授[14-16]及其他学者的努力下,随机稳定性理论及其应用已经形成了一个庞大的理论体系,在自动控制、生物化学反应、通信和制造领域具有重要的应用价值.本文的主要目的是从所利用的方法出发,回顾近年来随机微分方程稳定性理论的发展、研究的方法和一些应该注意的研究课题.

本文利用如下记号:$|\cdot|$ 表示 n 维欧式空间 $\mathbf{R}^n$ 的范数,如果 A 是向量或者矩阵,则 A' 表示其转置,如果 A 是矩阵,其迹范数表示为 $\sqrt{A'A}$,$\mathbf{R}_+=[0,\infty)$.$(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0},P)$表示一个完备的概率空间,$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$是一个满足通常条件(即递增、右连续且包含所有的零概率集)的 σ-代数流.$w(t)$是定义于这个概率空间上的 m-维 Brown 运动,不失一般性,假定$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$就是 $w(t)$生成的自然流,即 $\mathcal{F}_t=\sigma(w(s):0\leqslant s\leqslant t)$.用 $L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$表示随机变量 x 的集合满足 $\mathrm{E}|x|^p<\infty$.

考虑如下 n-维随机微分方程

$$\mathrm{d}x(t)=f(x(t),t)\mathrm{d}t+g(x(t),t)\mathrm{d}w(t), \tag{1}$$

其中初始值 $x(0)=x_0$ 为常数,$f:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+\mapsto\mathbf{R}^n$,$g:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+\mapsto\mathbf{R}^{n\times m}$.由于本文主要回顾稳定性理论结果,因此假设这个方程的解总是存在的,记为 $x(t)$,在某些情况下,如果为了显示解与初始值的关系或者与轨道的性质,也记为 $x(t,x_0)$或者 $x(t,\omega)$.此时这个解也是一个 Markov 过程(参考文献[8,16]),即对任意的 $A\in\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$和 $t>s\geqslant 0$,其转移概率为

$$P(A,t;x,s)=\mathrm{P}(x(t)\in A|\mathcal{F}_s)=\mathrm{P}(x(t)\in A|x(s)),\quad(2)$$

也常记 $P(A,t;x_0)=P(A,t;x,0)$.

定义 $C^{1,2}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+;\mathbf{R}_+)$ 为具有关于 x 的二阶导数和关于 t 的一阶导数的所有的函数类 $V(x,t):\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+\mapsto\mathbf{R}_+$.也定义一个与方程(1) 相关的算子 $\mathcal{L}$,当其作用于函数 V 上时,$\mathcal{L}V:\mathbf{R}^n\times\boldsymbol{R}_+\mapsto\mathbf{R}$ 表示如下:

$$\mathcal{L}V(x,t)=V_t(t,x)+V_x(x,t)f(x,t)+\frac{1}{2}\mathrm{trace}[g^{\mathrm{T}}(x,t)V_{xx}(x,t)g(x,t)],\quad(3)$$

此处

$$V_t(x,t)=\frac{\partial V(x,t)}{\partial t},$$

$$V_x(x,t)=\left(\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_1},\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_n}\right),$$

$$V_{xx}(x,t)=\left[\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}\right]_{n\times n}.$$

定义 $\mathcal{K}:\mathbf{R}_+|\rightarrow\mathbf{R}_+$ 为连续严格递增函数类 μ,满足 $\mu(0)=0$,在此基础上,定义 $\mathcal{K}_\infty$ 是一个满足 $\lim\limits_{r\to\infty}\mu(r)=\infty$ 的 $\mathcal{K}$类.也定义 $L^1(\mathbf{R}_+;\mathbf{R}_+)$ 是所有的可积函数类,即对 $\gamma\in L^1(\mathbf{R}_+;\mathbf{R}_+)$,则有 $\int_0^\infty\gamma(s)\mathrm{d}s<\infty$.

由于随机因素的引入,系统的稳定性也变得更加多样化,随机微分方程稳定性主要包括依概率稳定性、几乎处处稳定性、p-阶矩稳定性和依分布稳定性等.当考虑依概率稳定、p-阶矩和几乎处处稳定性的时候,假设方程(1) 存在平凡解,即 $f(0,t)=0$ 和 $g(0,t)=0$. 当考虑依分布稳定的时候,则不需要平凡解假设.现在回顾各种稳定性定义如下(参考文献[10,16]):

1)依概率稳定:方程(1)的平凡解 $x(t)\equiv0$ 是

①依概率稳定:如果对任意的 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$,存在常数 $h\geqslant0$ 使得如果 $t\geqslant0$ 且 $|x_0|<h$,那么

$\mathrm{P}(|x(t,x_0)|>\varepsilon)<\delta$;

②依概率渐近稳定:如果它是依概率稳定的,同时对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 $h=h(\varepsilon)$ 使得对于 $|x_0|<h$,当 $t\to\infty$,$\mathrm{P}(|x(t,x_0)|>\varepsilon)\to0$.

2)p-阶矩稳定:方程(1)的平凡解 $x(t)\equiv0$ 是

①p-阶矩稳定:如果对任意的 $\varepsilon>0$,存在常数 $h\geqslant0$ 使得对 $p>0$,$t\geqslant0$ 和 $|x_0|<r$,$\mathrm{E}|x(t,x_0)|^p<\varepsilon$;

②p-阶矩渐近稳定:如果它是 p-阶矩稳定的,同时对于任意小的初始值 x_0,当 $t\to\infty$,$\mathrm{E}|x(t,x_0)|^p\to0$.

③p-阶矩指数稳定:如果存在常数 $A>0$ 和 $\gamma>0$,使得 $\mathrm{E}|x(t,\omega,t_0,x_0)|^p\leqslant A|x_0|^p\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}$.

2-阶矩的稳定性也称为均方稳定性.

3)几乎处处稳定:方程(1)的平凡解 $x(t)\equiv0$ 是

①几乎处处稳定:如果对任意的 $\varepsilon>0$,存在常数 $h\geqslant0$ 使得对 $p>0$ 和 $|x_0|<r$,

$\mathrm{P}\{|x(t,\omega,t_0,x_0)|>\varepsilon,t\geqslant t_0\}=0$;

②几乎处处渐近稳定:如果它是几乎处处稳定的,同时对于任意小的初始值 x_0,

$\mathrm{P}\{\limsup\limits_{t\to\infty}|x(t,\omega,t_0,x_0)|=0\}=1$.

③几乎处处指数稳定:如果

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log|x(t,\omega,t_0,x_0)|<0.\quad \text{a.s.}$$

4)依分布稳定:方程(1)的解 $x(t)$ 是依分布稳定的,如果存在一个概率测度 $\pi(\cdot)$ 使得对任意的 $A\in\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$,$\lim\limits_{t\to\infty}p(t,A;x_0)=\pi(A)$.

评论 1 依分布稳定有一个等价定义如下:对于方程(1)的解过程 $x(t)$,如果对任意有界连续的函数 f,存在随机变量 $x\in\mathbf{R}^n$,当 $t\to\infty$,$\mathrm{E}f(x(t))\to\mathrm{E}f(x)$,则称 $x(t)$ 依分布收敛(或弱收敛)到 x.

本文从研究随机稳定性的常用方法出发,回顾方程(1)的各种稳定性结果.为了使结果更加聚焦,本文不考虑带有控制项和 Markov 切换项的问题,虽然这些问题也同样具有丰富的成果和重要的意义.又因为笔者的知识范围所限,对于后面三种稳定性相对较为熟悉一些,因此本文主要考虑 p-阶矩稳定性、几乎处处稳定性和依分布稳定性.但是在稳定性之间的关系讨论时,也讨论了依概率稳定性与其他三种稳定性的关系.因为每种稳定性都有海量的文献,也有很多的综述文章,比如文献[17]等,所以本文在回顾这些稳定性结果的时候,主要从所利用的方法出发,讨论同类的方法在当前文献中的应用.

2 几乎处处稳定性

几乎处处稳定性也就是轨道稳定性,刻画随机微分方程解的轨道的渐近性质,主要的方法是基于 Itô 公式基础上的 Lyanpunov 函数方法,运用的技术主要是指数鞅不等式、大数定理或半鞅收敛定理等,或者在一定的条件下通过 p-阶矩稳定性得到.关于通过矩稳定性得出几乎处处稳定性的问题,将在后面在稳定性之间的关系中描述,此处重点回顾指数鞅不等式、大数定理和半鞅收敛定理的技术在几乎处处稳定性研究中的应用.首先回顾如下基于指数鞅不等式的结果(参考文献[16]):

定理 1 假设存在一个函数 $V\in C^{2,1}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+;\mathbf{R}_+)$ 和常数 $p>0,c_1>0,c_2\in\mathbf{R},c_3>0$,使得对任意的 $x\neq 0$ 和 $t\geqslant 0$,

1) $c_1|x|^p\leqslant V(x,t)$;

2) $\mathcal{L}V(x,t)\leqslant c_2V(x,t)$;

3) $|V_x(x,t)g(x,t)|^2\geqslant c_3V^2(x,t)$,

则对于任意的初始值 $x_0\in\mathbf{R}^n$,

$$\lim_{t\to\infty}\sup\log|x(t)|\leqslant-\frac{c_3-2c_2}{2p},\quad \text{a.s.}$$

如果 $c_3>2c_2$,则随机微分方程(1)的平凡解是几乎处处指数稳定的.

证明 通过该证明过程,可了解指数鞅不等式在里面如何起作用.如果 $x_0=0$,由于平凡解也是方程的解,所以由解的唯一性,对任意的 $t>0,x(t)\equiv 0$.如果 $x_0\neq 0$,仍然由解的唯一性,对任意的 $t>0$,$x(t)\neq 0$.利用 Itô 公式和条件 2)可得

$$\log V(x(t),t)\leqslant\log V(x_0,0)+c_2t-\frac{1}{2}\int_0^t\frac{|V_x(x(s),s)g(x(s),s)|^2}{V^2(x(s),s)}\mathrm{d}s+M(t),\quad(4)$$

此处

$$M(t)=\int_0^t\frac{V_x(x(s),s)g(x(s),s)}{V(x(s),s)}\mathrm{d}w(s)$$

是一个连续的局部鞅且明显满足 $M(0)=0$.对任意的 $\varepsilon\in(0,1)$ 和自然数 n,利用指数鞅不等式得出

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant n}\left[M(t)-\frac{\varepsilon}{2}\int_0^t\frac{|V_x(x(s),s)g(x(s),s)|^2}{V^2(x(s),s)}\mathrm{d}s\right]>\frac{2}{\varepsilon}\log n\right\}\leqslant\frac{1}{n^2}.$$

应用 Borel-Cantelli 引理可以得出对几乎处处的 $\omega\in\Omega$,存在 $n_0=n_0(\omega)$ 使得对于任意 $n\geqslant n_0$,

$$M(t)\leqslant\frac{2}{\varepsilon}\log n+\frac{\varepsilon}{2}\int_0^t\frac{|V_x(x(s),s)g(x(s),s)|^2}{V^2(x(s),s)}\mathrm{d}s\ \Big].$$

对几乎处处的 $\omega\in\Omega$,当 $n-1\leqslant t\leqslant n$ 并且 $n\geqslant n_0$,利用上面不等式和条件 3)得

$$\frac{1}{t}\log V(x(t),t)\leqslant\frac{1}{t}\log V(x_0,0)-\frac{(1-\varepsilon)c_3-2c_2}{2}+\frac{2\log n}{\varepsilon(n-1)},$$

让 $t\to\infty$ 得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log V(x(t),t)\leqslant-\frac{(1-\varepsilon)c_3-2c_2}{2},\quad \text{a.s.}$$

然后取 ε 充分小可以得出需要的结果.

此处可以看到通过指数鞅不等式可以对鞅部分进行估计,进而得出整个的解的估计.如果 $g(x,t)=kx$,此时可以选择 $V(x,t)=|x|^p(p\geqslant 2)$,则此时

$$M(t)=\int_0^t\frac{p|x|^{p-2}x^{\mathrm{T}}g(x,t)}{|x|^p}\mathrm{d}w(s)=pkw(t).$$

此时利用大数定理得出

$$\lim_{t\to\infty}\frac{w(t)}{t}\to 0,\quad \text{a.s.}$$

也可以得出以上结论.

利用指数鞅不等式或大数定理对鞅部分进行估计的方法有广泛的应用,如文献[18]考虑带有滞后切换系统的几乎处处稳定性问题[18],毛学荣等[19]考虑的非局部 Lipschitz 条件系统的几乎处处稳定性问题,Caraballo 等[20]讨论的无穷维的随机发展方程的几乎处处稳定性问题.这个方法在几乎处处稳定性方面的更多理论和应用可以从文献[7,21-22]等发现.

其实从上面定理也可以发现,在几乎处处意义下,噪声对稳定性具有镇定作用,参数 c_3 越大,系统的稳定性越好,而 c_3 来自噪声项 g,因此对于常微分方程 $\dot{x}(t)=f(x(t),t)$,通过合理选择噪声项 g,可以使随机系统(1)成为几乎处处稳定的系统,这就是随机镇定的思想.但也应注意到,很多模型很难(或不能)给出这种条件,其中一大类是噪声项退化的模型,如下述线性标量二阶随机微分方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}y(t)=v(t)\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}v(t)=\mu_1y(t)\mathrm{d}t+\mu_2v(t)\mathrm{d}t+\sigma_1y(t)\mathrm{d}w_1(t)+\\ \quad\sigma_2v(t)\mathrm{d}w_2(t),\end{cases}\quad(5)$$

其中 $\mu_1,\mu_2>0,\sigma_1,\sigma_2>0$ 是固定的常数,$w_1(t)$ 和 $w_2(t)$ 是两个独立的布朗运动.

作为 Lyapunov 第二方法的重要发展,LaSalle 不变原理可以刻画非自治系统的极限集(参考文献[23-24]),在此基础上,大量的 Lyapunov 稳定性方法的结果都可以看成 LaSalle 不变原理的推论.1999年,毛学荣教授成功地建立了 LsSalle 定理的随机形式[25-26],所利用的重要工具就是半鞅收敛定理(参考文献[27-28]).

引理 1(半鞅收敛定理) 让 $A(t)$ 和 $U(t)$ 是两个连续适应的递增过程,满足 $A(0)=U(0)=0$, a.s. $M(t)$ 是一个实值连续的局部鞅,也满足 $M(0)=0$, a.s.对任意的非负 $\mathcal{F}_0$-可测的随机变量 ξ,对任意的 $t\geqslant 0$,定义

$$X(t)=\xi+A(t)-U(t)+M(t).$$

如果 $X(t)$ 是非负的,那么在几乎处处意义下,

$$\{\lim_{t\to\infty} A(t)<\infty\}\subset\{\lim_{t\to\infty} X(t)\text{存在且有限}\}\cap\{\lim_{t\to\infty} U(t)<\infty\},$$

这意味着如果在几乎处处意义下,$\lim_{t\to\infty} A(t)<\infty$,那么对几乎所有的 $\omega\in\Omega$,

$$\lim_{t\to\infty} X(t,\omega)\text{存在且有限,而且}\lim_{t\to\infty} U(t,\omega)<\infty.$$

利用半鞅收敛定理可以讨论更为一般的极限集的存在性问题,但是因为本文回顾随机稳定性理论,因此在以下结论中,回顾半鞅收敛定理在其证明中的应用[25].

定理 2 如果存在一个函数 $V\in C^{2,1}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+;\mathbf{R}_+)$ 和 $\mu_1,\mu_2\in\mathcal{K}_\infty,\mu_3\in\mathcal{K}$,使得对任意的 $(x,t)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+$,

$$\mu_1(|x|)\leqslant V(x,t)\leqslant\mu_2(|x|) \tag{6}$$

且

$$\mathcal{L}V(x,t)\leqslant\gamma(t)-\mu_3(|x|), \tag{7}$$

此处 $\gamma\in L^1(\mathbf{R}_+;\mathbf{R}_+)$,那么对任意的初始值 $x_0\in\mathbf{R}^n$,在几乎处处意义下,$\lim_{t\to\infty}|x(t,x_0)|=0$,即方程(1)的平凡解是几乎处处渐近稳定的.

证明 利用 Itô 公式和式(7)得出

$$\begin{aligned}V(x(t),t)&=V(x_0,0)+\int_0^t\mathcal{L}V(x(s),s)\mathrm{d}s+\\&\int_0^t V_x(x(s),s)g(x(x),s)\mathrm{d}w(s)\leqslant\\&V(x_0,0)+\int_0^t\gamma(s)\mathrm{d}s-\int_0^t\mu_3(|x(s)|)\mathrm{d}s+\\&\int_0^t V_x(x(s),s)g(x(x),s)\mathrm{d}w(s).\end{aligned}$$

容易观察到 $\int_0^t V_x(x(s),s)g(x(x),s)\mathrm{d}w(s)$ 是一个连续的局部鞅(因为预先假设解是存在唯一的,所以没有对 f 和 g 做任何限制,此处只需要 g 稍作限制),并且 $\gamma\in L^1(\mathbf{R}_+;\mathbf{R}_+)$,因此利用半鞅收敛定理,存在 $\bar{\Omega}\subset\Omega$,满足 $\mathrm{P}(\bar{\Omega})=1$,对每一个 $\omega\in\bar{\Omega}$:

$$\lim_{t\to\infty} V(x(t,\omega),t)\text{ 存在且有限,而且}$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t\mu_3(|x(s,\omega)|)\mathrm{d}s<\infty.$$

由此可以得出,对于所有 $\omega\in\bar{\Omega}$:

$$\lim_{t\to\infty}\mu_3(|x(t,\omega)|)=0. \tag{8}$$

否则,存在某个 $\hat{\omega}\in\bar{\Omega}$,

$$\lim_{t\to\infty}\mu_3(|x(t,\hat{\omega})|)>0,$$

所以存在某个 $\varepsilon>0$ 和一个正序列 $\{t_k\}_{k\geqslant1}$ 满足 $t_k+1<t_{k+1}$,使得对所有的 $k\geqslant1$:

$$\mu_3(|x(t_k,\hat{\omega})|)>\varepsilon.$$

根据解和函数 μ_3 的非负连续性,存在 $\delta\in(0,1)$,使得对任意的 $t\in[t_k,t_k+\delta]$,$\mu_3(|x(t,\hat{\omega})|)>\varepsilon/2$,那么

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t\mu_3(|x(s,\hat{\omega})|)\mathrm{d}s>\sum_{k=1}^{\infty}\int_{t_k}^{t_k+\delta}\mu_3(|x(t,\hat{\omega})|)>\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon\delta}{2}=\infty,$$

这产生了矛盾,因此式(8)成立.由于 $\lim_{t\to\infty} V(x(t),t)$ 几乎处处存在且有限,则条件(6)说明 $|x(t)|$ 也几乎处处存在且有限,最后根据 $\mu_3\in\mathcal{K}$,$\lim_{t\to\infty}\mu_3(|x(t)|)=0$,a.s.意味着 $\lim_{t\to\infty}|x(t)|=0$,定理得证.

如果进一步增强条件,利用条件

$$\mathrm{e}^{\lambda t}|x|^p\leqslant V(x,t)\text{ 和 }\mathcal{L}V(x,t)\leqslant\gamma(t)$$

代替上述定理中的条件(6)和(7),则可以得出几乎处处指数稳定性的结果:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log|x(t)|=0,\text{a.s.}$$

如果定义了更一般的收敛速度(比如 ψ 收敛性,参考[29-30]),仍然可以得出相应的结果.

半鞅收敛定理已经发展成为研究几乎处处稳定性的强大工具,当前的研究扩展到延迟依赖的稳定性[31-32].即使对于随机延迟或泛函微分方程,鞅的性质仍然具有,因此在随机延迟系统的几乎处处稳定性研究中也具有广泛的应用[33-35],Blythe 等[36]用它来讨论随机延迟神经网络的稳定性,Yuan 等[37]将这个理论建立在半鞅驱动的随机泛函微分方程上来研究解的几乎处处稳定性,更多的理论发展和应用可以参考文献[19,38-41].

值得注意的是离散半鞅的收敛定理也成立,这就给出了研究离散随机系统几乎处处稳定性的一个有力工具.文献[42-43]利用离散半鞅的收敛定理作为工具,讨论了随机微分方程数值解的几乎处处稳定性的直接方法,而之前研究数值解的几乎处处稳定性往往需要通过矩稳定性得出.在文献[44]中,张维海教授彻底建立了离散形式的 LaSalle 定理.

比较定理 1 和定理 2,容易看出,定理 1 主要是针对乘性噪声驱动的随机微分方程,这是由定理 1 的条件 3)所决定的,而定理 2 则可以处理更加一般的噪声驱动的随机微分方程.事实上,针对加性噪声的情形,重对数定律也是研究几乎必然稳定性的重要手段之一,可参考 Appleby 等[45]的工作.

3 p-阶矩稳定性

p-阶矩稳定性刻画了随机微分方程解的平均渐近性质,与几乎处处稳定性一样,主要方法也是基于 Itô 公式的 Lyapunov 方法.由于在取期望的过程中局部鞅部分消失,所以此时可以利用大量的常微分方程的稳定性方法求解.让我们回顾如下最初的结果(见文献[10,16]):

定理 3 如果存在一个函数 $V\in C^{2,1}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+;\mathbf{R}_+)$ 和正常数 c_1,c_2 和 c_3 使得对任意的 $(x,t)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+$,

$$c_1|x|^p\leqslant V(x,t)\leqslant c_2|x|^p \tag{9}$$

且

$$\mathcal{L}V(x,t)\leqslant -c_3V(x,t), \tag{10}$$

那么对任意的初始值 $x_0\in\mathbf{R}^n$, $\mathrm{E}|x(t)|^p\leqslant\frac{c_2}{c_1}|x_0|^p\mathrm{e}^{-c_3t}$,即方程(1)的平凡解是 p-阶矩指数稳定的.

上面的结论看似简单平淡,实则很强,因为它存在一个接近于可逆的结论(参见文献[10]):

定理 4 如果方程(1)的平凡解是 p-阶矩指数稳定的,并且系数 f 和 g 有关于 x 的连续二阶导数,则存在一个函数 $V\in C^{2,1}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+;\mathbf{R}_+)$ 和正常数 c_1, c_2 和 c_3 满足条件(9) 和(10).

Khasminskii[10] 也给出如下 p-阶矩渐近稳定的结论:

定理 5 假设方程(1)系数 f 和 g 满足定理 4 的条件,且 $\int_{t_0}^{\infty}\mathrm{E}|x(s,t_0,x_0)|^p\mathrm{d}s<\infty$,则

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}|x(t,t_0,x_0)|^p=0.$$

在 p-阶矩稳定性中,均方稳定性是非常重要的一类稳定性.在数学上,均方(2-阶矩)就是 Hilbert 空间里的范数,均方稳定性就是范数稳定性.在物理与工程中,均方表示能量或功率,均方稳定性其实就是能量为零的状态.

均方稳定性,特别是对于线性系统或满足线性增长的系统,已经建立了比较完善的稳定性理论,所用的方法也更加多样化,比如 LMI 方法(线性矩阵不等式)(参见文献[46-47]),而且具有广泛的应用(参见文献[48]等).此处重点回顾算子谱分析方法.

考虑 n-维线性定常随机 Itô 系统

$$\mathrm{d}x(t)=Fx(t)\mathrm{d}t+Gx(t)\mathrm{d}w(t) \tag{11}$$

的均方稳定性及其相应的算子谱判据.用 Lyapunov 函数方法,易得如下的充分必要条件:

定理 6[49] 线性系统(11)的平凡解是渐近均方稳定的充分必要条件是下列广义的 Lyapunov 不等式

$$PF+F'P+G'PG<0 \tag{12}$$

存在正定对称矩阵解 $P>0$.

容易验证,对于线性定常随机系统(11),均方渐近稳定与均方指数稳定等价.现在的问题是:如何建立随机系统(11)均方稳定性的特征值判据?这是一个很困难的问题,因为可以很容易举出反例,即使 F 和 G 的特征值都在开的左半复平面内,系统仍然可能不是均方稳定的.在文献[50]中,张维海教授等引入了下列广义 Lyapunov 算子 $\mathcal{L}_{F,G}$ 如下:

$$\mathcal{L}_{F,G}:Z\in S_n\mapsto FZ+ZF'+GZG'\in S_n.$$

这里 S_n 是一个对称矩阵的集合,易见 $\mathcal{L}_{F,G}$ 是一个有限维的对称算子,共有 $n(n+1)/2$ 个特征值.文献[50]给出了随机系统均方稳定性的算子谱判据或特征值判据如下:

定理 7[50] 线性系统(11)的平凡解是渐近均方稳定的充分必要条件是 $\sigma(\mathcal{L}_{F,G})\subset C^-$,此处 C^- 表示左半复平面.

利用引进的广义 Lyapunov 算子,可以引进许多随机稳定性的新概念.

定义 1[51] 系统(11)称为是临界稳定的,如果 $\sigma(\mathcal{L}_{F,G})\subset C^{-,0}$,其中,$C^{-,0}$ 表示闭的左半复平面.

定义 2[52] 系统(11)称为是基本不稳定的,如果 $\sigma(\mathcal{L}_{F,G})\cap C^+\neq\phi$,其中,$C^+$ 表示开的右半复平面.

定义 1 和定义 2 推广了文献[53]关于确定性系统的有关概念.

定理 8[52] 系统(11)是基本不稳定的充分必要条件是:对任意的 $Q>0$,存在常数 $\gamma>0$,和至少具有一个正特征值的对称矩阵 P,使下列广义 Lyapunov 方程有解:

$$AP+PA'+CPC'=\gamma P+Q. \tag{13}$$

文献[54]对系统(11)引进了一种新的区间稳定性概念,即所谓的$(-\beta,-\alpha)$-稳定.

定义 3 系统(11)称为是$(-\beta,-\alpha)$-稳定的,$0\leqslant\alpha<\beta$,如果

$$\sigma(\mathcal{L}_{F,G})\subset C_{-\beta}^{-\alpha}:=\{\lambda:-\beta<\mathrm{Re}(\lambda)<-\alpha\}.$$

定义 4[10,16] 对系统(11),其均方 Lyapunov 指数 L_e^2 定义为

$$L_e^2:=\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\log(\mathrm{E}\|x(t)\|^2),$$

若系统(11)是$(-\beta,-\alpha)$-稳定的,则具有下列很好的

性质:

定理 9 若系统(11)是$(-\beta,-\alpha)$-稳定的,$0\leqslant\alpha<\beta$,则有下列结论成立:

1)系统(11)是指数均方稳定的,其收敛速度比$O(\mathrm{e}^{-(\alpha+\varepsilon)t})$快,但是比$O(\mathrm{e}^{(-\beta+\varepsilon)t})$慢,这里$\varepsilon>0$是任意小的正数.换句话说,存在正常数$C_1,C_2>0$,

$\mathrm{E}\|x(t)\|^2\leqslant C_1\|x_0\|^2\mathrm{e}^{-(\alpha+\varepsilon)t}$,

$\mathrm{E}\|x(t)\|^2\geqslant C_2\|x_0\|^2\mathrm{e}^{(-\beta+\varepsilon)t}$.

2)可以精确计算出均方 Lyapunov 指数 $\mathcal{L}_e^2=\max_i\mathrm{Re}(\lambda_i)$,此处$\lambda_i$为$\mathcal{L}_{F,G}$的第$i$个特征值.

广义 Lyapunov 算子$\mathcal{L}_{F,G}$具有多方面的应用,在许多方面可以建立与确定性系统完全平行的结论,而且可以推广到各种线性时不变系统如 Markov 切换系统,下面做一些总结和展望:

1)除了上面讨论的$(-\beta,-\alpha)$-稳定,还可以讨论一般的区域稳定性如 LMI 区域稳定性[55]、多项式区域稳定性[56],从而可以将确定性系统的结论推广到随机系统[57];

2)借助于$\mathcal{L}_{F,G}$,可以建立随机系统精确能观性、精确能检测性的 PBH 判据,从而将线性系统理论中关于完全能观性、完全能检测性的 PBH 判据推广到随机系统[50-51,58];

3)借助于微分同胚变换,将一个非线性的随机时不变系统转化为一个线性随机系统[59],然后借助于$\mathcal{L}_{F,G}$,同样可以讨论非线性随机时不变系统的区域稳定性问题,这是一个值得探索的方向;

4)若随机系统中带有控制变量u,则可以考虑随机系统的极点型配置问题.文献[50-51]中提出了一些未解决的问题,值得探索.

4 依分布稳定性

随机过程的分布稳定性本质上说明随机过程的统计特性(比如随机过程的期望、方差和矩等)不随时间的变化而改变.如果随机过程是遍历的,则稳定分布就可以看做这个随机过程的极限分布.本文主要回顾两类研究分布稳定性的方法,第一类方法由 Khasminskii 基于 Markov 过程的常返性所建立的理论(参考文献[23]第四章),对于方程(1),决定它的解过程的 Markov 性及其常返性,主要体现为如下假设:

假设 1 存在一个具有正则边界Γ(光滑的)的有界开域$U\subset\mathbf{R}^n$具有如下性质:

(A1)在U和在其中某个邻域内,扩散矩阵$A(x,t)=g'(x,t)g(x,t)>0$;

(A2)对初值$x_0\in\mathbf{R}^n\backslash U$,$\tau=\inf\{t:x(t,x_0)\in U\}$的均值是有限的,而且对于任意的紧子集$K\subset\mathbf{R}^n$,$\sup\limits_{x_0\in K}\mathrm{E}\tau<\infty$.

这个假设中,(A1)其实就是在某个开域中的一致椭圆条件,这个条件保证了解$x(t)$在某个有界开域中具有有限的平均常返时间(常返的),因为根据 Markov 过程相关理论[10],这也保证了$x(t)$在任意开域中的正常返性.(A2)保证了在某个开域内,样本路径"混合得充分好".在这个假设下,具有如下分布稳定性结论:

定理 10[10] 在假设 1 成立的条件下,方程(1)的解过程$x(t)$存在一个唯一的稳定分布μ.

在这个结果的基础上,可以建立如下强大数定理:

定理 11[10] 在假设 1 成立的条件下,方程(1)的解过程$x(t)$存在一个唯一的稳定分布μ.进一步,如果存在函数f关于μ可积,则对任意的初值$x_0\in\mathbf{R}^n$,

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^t f(x(t,x_0))\,\mathrm{d}t=\int_{\mathrm{R}^n}f(y)\mu(\mathrm{d}y)\right\}=1.$$

也可以得出$x(t)$是胎紧的(tight,这个体现了解的依概率有界性):

定理 12[10] 在假设 1 成立的条件下,对任意的初始值x_0和任意的$\varepsilon>0$,存在充分大的$R>0$和$t(x_0)>0$,使得对任意的$t>t(x_0)$,方程(1)的解过程$x(t,x_0)$满足

$\mathrm{P}(|x(t,x_0)|>R)<\varepsilon$.

另一类分布稳定性方法利用耗散性条件,基于如下两个假设:

假设 2 对任意的$x,y\in\mathbf{R}^n$,

(B1)存在常数$\lambda_1>0$使得

$2(x-y)'(f(x,t)-f(y,t))\leqslant-\lambda_1|x-y|^2$;

(B2)存在常数λ_2使得

$|g(x,t)-g(y,t)|^2\leqslant\lambda_2|x-y|^2$.

此时有如下的稳定分布的存在唯一性定理:

定理 13 在假设 2 成立的条件下,如果$\lambda_1>\lambda_2$,方程(1)的解过程$x(t)$存在一个唯一的稳定分布(不变测度)μ,并且这个不变测度是指数混合的(exponentially mixing).

对于基于第一类方法的分布稳定性,毛学荣教授[5]利用其建立了随机 Lotka-Volterra 种群方程的稳定分布的存在唯一性,刘红等[60]考虑了带有切换

的 Lotka-Volterra 利他种群系统的遍历性和正常返性的问题,关于随机种群系统的不变测度更进一步的讨论可以参考文献[61].

对于基于第二类方法的分布稳定性,张希承教授建立了非 Lipschitz 条件下的不变测度的存在性和指数遍历性结果[62],席福宝教授[63]讨论了状态依赖的切换扩散过程的 Feller 性和指数遍历性问题,王健教授讨论了 Levy 过程驱动的 Ornstein-Uhlenbeck 过程的不变测度的存在性和指数遍历性问题[64].

由于以上两种方法都基于随机过程的 Markov 性,延迟系统的解不满足 Markov 性,因此建立随机延迟系统的不变测度和遍历性很长时间没有进展,在 Mohammed 考虑随机泛函微分方程中解映射的适应性、Markov 性等基础上[65],鲍建海等[60-69]通过一系列文章建立各种随机延迟和泛函微分方程并讨论了随机偏微分方程中解映射的不变测度的存在性和遍历性问题.文献[70]建立了无穷延迟的随机泛函微分方程的解映射的不变测度和遍历性结果.

5 各种稳定性之间的关系

由于随机性的引入,导致了随机序列的收敛性更加多样,各种稳定性之间既互有联系,又有强弱的不同,因此有了更加丰富的结果.根据经典的概率论和随机过程知识,以上各种稳定性之间关系如下(参考文献[71]):

定理 14 以上四种稳定性关系如下:

1)几乎处处稳定性⇒依概率稳定性;

2)p-阶矩稳定性⇒依概率稳定性;

3)依概率稳定性⇒依分布稳定性;

4)依概率稳定性⇒存在一个子序列有几乎处处稳定性.

在某些条件下,上面有的关系是可逆的,比如:如果一个随机变量依分布收敛到一个常数(退化分布),那么这个收敛性也是依概率收敛的;如果存在一个随机变量 $y\in L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$ 并且对任意的 $t\geqslant 0$,随机过程 $|x(t)|\leqslant y$,则此时几乎处处稳定性是最强的稳定性.根据控制收敛定理,几乎处处稳定性可以得出 p-阶矩稳定性,而且进一步,依分布稳定性也可以得出 p-阶矩稳定性.

在随机系统中,有一个值得注意的结果是如果对方程(1)的系数施加一定的条件,则从这个方程的平凡解的 p-阶矩稳定性可以得出几乎处处稳定性(参考文献[16]),结果可以描述如下:

定理 15 如果存在常数 K 使得

$$x'f(x,t)\vee|g(x,t)|^2\leqslant K|x|^2,$$

则方程(1)的平凡解的 p-阶矩指数稳定性也意味着几乎处处稳定性.

这个结论值得注意的是:因为由 Lyapunov 不等式,对于任意的 $p>q>0$,$(\mathrm{E}|x(t)|^q)^{\frac{1}{q}}\leqslant(\mathrm{E}|x(t)|^p)^{\frac{1}{p}}$,这说明高阶矩的稳定性可以得出小阶矩的稳定性,也就是说,高阶矩的稳定性强于小阶矩的稳定性.而上面的定理对于 $p>0$ 并无任何限制,因此如果能得出小阶矩的稳定性,则上面的定理就可以得出几乎处处稳定性.文献[22]就得出,如果系统既是几乎处处稳定的,又是 p-阶矩稳定的,则他们的 Lyapunov 稳定指数一定具有如下关系:

$$\lim_{p\to 0}\left[\frac{1}{p}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\mathrm{E}|x(t)|^p\right]=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log|x(t)|,\tag{14}$$

但是在考虑小阶矩的稳定性时,需要注意在 0 点的可导性问题(参考文献[72]).

考虑下面一维常系数线性随机微分方程

$$\mathrm{d}x(t)=ax(t)\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^m b_i x(t)\mathrm{d}w_i(t),\tag{15}$$

此处 $a,b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 是常数.这个线性方程具有如下显式解:

$$x(t)=x_0\exp\left[\left(a-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m b_i^2\right)t+\sum_{i=1}^m b_i w_i(t)\right],$$

根据大数定理得出

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log|x(t)|=a-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m b_i^2+\sum_{i=1}^m b_i\left[\lim_{t\to\infty}\frac{w_i(t)}{t}\right]=$$

$$a-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m b_i^2,\tag{16}$$

所以方程(15)的平凡解几乎处处稳定的充要条件就是

$$a-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m b_i^2<0.$$

其实从这里可以明显看出,对于几乎处处稳定性而言,噪声强度越大(b_i 越大),对于系统平凡解的稳定性越有利,就是噪声的随机镇定的表现.从解的表达式也可以得出

$$\mathrm{E}|x(t)|^p=$$

$$|x_0|^p\mathrm{E}\exp\left[p\left(a-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m b_i^2\right)t+p\sum_{i=1}^m b_i w_i(t)\right].$$

利用指数鞅表达式(参考文献[16]):

$$\mathrm{E}\exp\left[-\frac{p^2}{2}\sum_{i=1}^m b_i^2 t+p\sum_{i=1}^m b_i w_i(t)\right]=1,$$

所以可以得出

$$\mathrm{E}|x(t)|^p = |x_0|^p \exp\left[p\left(a - \frac{1-p}{2}\sum_{i=1}^{m} b_i^2\right)t\right],$$

这意味着

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log \mathrm{E}|x(t)|^p = p\left(a - \frac{1-p}{2}\sum_{i=1}^{m} b_i^2\right), \quad (17)$$

这验证了小阶矩稳定性($p\to 0$)与几乎处处稳定性的Lyapunov 稳定性指数之间的等价性关系式(14),也说明了方程(15)的平凡解的p-阶矩稳定的充要条件就是

$$a - \frac{1-p}{2}\sum_{i=1}^{m} b_i^2 < 0.$$

这个结果也显示,对于小阶矩 $p\in(0,1)$ 而言,噪声也具有镇定作用,而对于高阶矩($p>1$),噪声对于稳定性只起破坏作用.

6 结束语

由于篇幅和笔者的知识范围所限,本文仍然有较多的重要结果没有涉及.对于延迟系统,Yorke 的方法和随机 Razumikhin 定理是研究延迟系统的一个重要的稳定性原理,毛学荣教授[73-74]建立了随机形式的 Razumikhin 定理,据此得出了p-阶矩稳定性,但是如何直接利用 Razuminskii 定理的思想建立几乎处处稳定性仍然是一个没有解决的问题.

参考文献
References

[1] Ozbudak E M, Thattai M, Kurtser I, et al. Regulation of noise in the expression of a single gene[J]. Nature genetics, 2002, 31: 69-73
[2] Thattai M, Van Oudenaarden A. Stochastic gene expression in fluctuating environments[J]. Genetics, 2004, 167: 523-530
[3] Kepler T B, Elston T C. Stochasticity in transcriptional regulation: origins, consequences, and mathematical representations[J]. Biophysical Journal, 2001, 81: 3116-3136
[4] Turcotte M, Garcia-Ojalvo J, Süel G M. A genetic timer through noise-induced stabilization of an unstable state[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2008, 105: 15732-15737
[5] Mao X. Stationary distribution of stochastic population systems[J]. Systems & Control Letters, 2011, 60(6): 398-405
[6] Mao X. Delay population dynamics and environmental noise[J]. Stochastics and Dynamics, 2005, 5(2): 149-162
[7] Wu F, Yin G. Environmental noises produce suppression and extinction in stochastic Lotka-Volterra model with infinite delay[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 396: 772-785
[8] Arnold L. Stochastic differential equations: Theory and applications[M]. New York: Wiley, 1972
[9] Friedman A. Stochastic differential equations and applications[M]. New York: Academic Press, 1975
[10] Khasminskii R Z. Stochastic stability of differential equations[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2012
[11] Kushner H J. Stochastic stability and control[M]. New York: Academic Press, 1967
[12] Kushner H J. Approximation and weak convergence methods for random processes, with applications to stochastic systems theory[M]. Cambridge: MIT Press, 1984
[13] Kushner H J. Weak convergence methods and singularly perturbed stochastic control and filtering problems[M]. Boston: Birkhäuser, 1990
[14] Mao X. Stability of stochastic differential equations with respect to semimartingales[J]. Longman Scientific and Technical, 1991, 35(2): 267-277
[15] Mao X. Exponential stability of stochastic differential equations[M]. New York: Marcel Dekker, 1994
[16] Mao X. Stochatic differential equations and applications[M]. Chichester: Horwood Publishing, 1997
[17] Teel A R, Subbaraman A, Sferlazza A. Stability analysis for stochastic hybrid systems: A survey[J] Automatica, 2014, 50(10): 2435-2456
[18] Zhang H, Wu Z, Xia Y. Exponential stability of stochastic systems with hysteresis switching[J]. Automatica, 2014, 50(2): 599-606
[19] Mao X, Song Q, Yang D. A note on exponential almost sure stability of stochastic differential equation[J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2014, 51(1): 221-227
[20] Caraballo T, Hammami M A, Mchiri L. Practical asymptotic stability of nonlinear stochastic evolution equation[J]. Stochastic Analysis and Applications, 2014, 32(1): 77-87
[21] Barbata A, Zasadzinski M, Ali H S, et al. Exponential observer for a class of one-sided Lipschitz stochastic nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(1): 259-264
[22] Zong X, Wu F, Yin G, et al. Almost sure and pth-moment stability and stabilization of regime-switching jump diffusion systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2014, 52(4): 2595-2622
[23] Hale J K, Lunel S M V. Introduction to functional differential equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1993
[24] LaSalle J P. Stability theory of ordinary differential equations[J]. Journal of Differential Equations, 1968, 4: 57-65
[25] Mao X. Stochastic versions of the LaSalle theorem[J]. Journal of Differential Equations, 1999, 153: 175-195
[26] Mao X. Some contributions to stochastic asymptotic stability and boundedness via multiple Lyapunov functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 260: 325-340
[27] Gihman I I, Skorokhod A V. The theory of stochastic processes I[M]. Heideberg: Springer-Verlag, 2004
[28] Liptser R Sh, Shiryayev A N. Theory of martingales[M].

Dordrecht:Kluwer Academic Publishers,1989
[29] Caraballo T,Garrido-Atienza M J,Real J.Stochastic stabilization of differential systems with general decay rate [J].System & Control Letters,2003,48:397-406
[30] Wu F,Hu S,Huang C.Robustness of general decay stability of nonlinear neutral stochastic functional differential equations with infinite delay [J]. System & Control Letters,2010,59:195-202
[31] Basin M,Rodkina A.On delay-dependent stability for a class of nonlinear stochastic systems with multiple state delays[J].Nonlinear Analysis:Theory,Methods & Applications,2008,68(8):2147-2157
[32] Rodkina A,Basin M.On delay-dependent stability for a class of nonlinear stochastic delay-differential equations [J].Mathematics of Control,Signals and Systems,2006, 18(2):187-197
[33] Mao X. Attraction, stability and boundedness for stochastic differential delay equations [J]. Nonlinear Analysis,2001,47:4795-4806
[34] Shen Y,Luo Q,Mao X.The improved LaSalle-type theorems for stochastic functional differential equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006,318(1):134-154
[35] Wu F,Hu S.Attraction,stability and robustness for stochastic functional differential equations with infinite delay [J].Automatica,2011,47:2224-2232
[36] Blythe S, Mao X, Liao X. Stability of stochastic delay neural networks[J].Journal of Franklin Institute,2001, 338:481-495
[37] Yuan C,Mao X.Attraction and stochastic asymptotic stability and boundedness of stochastic functional differential equations with respect to semimartingales[J]. Stochastic Analysis and Applications, 2006, 24: 1169-1184
[38] Huang C,Cao J.Almost sure exponential stability of stochastic cellular neural networks with unbounded distributed delays[J].Neurocomputing,2009,72(13): 3352-3356
[39] Li M,Deng F.Almost sure stability with general decay rate of neutral stochastic delayed hybrid systems with Lévy noise [J]. Nonlinear Analysis (Hybrid Systems), 2017,24:171-185
[40] Mao X.Stability and stabilisation of stochastic differential delay equations[J].IET Control Theory & Applications, 2007,1(6):1551-1566
[41] Zhao X,Deng F.A new type of stability theorem for stochastic systems with application to stochastic stabilization [J].IEEE Transactions on Automatic Control,2016,61 (1):240-245
[42] Liu W, Mao X. Almost sure stability of the Euler-Maruyama method with random variable stepsize for stochastic differential equations[M].Numerical Algorithms, 2016:1-20
[43] Wu F, Mao X, Szpruch L. Almost sure exponential stability of numerical solutions for stochastic delay differential equations[J].Numerische Mathematik,2010,115: 681-697
[44] Zhang W,Lin X,Chen B.LaSalle-type theorem and its applications to infinite horizon optimal control of discrete-time nonlinear stochastic systems[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2017,62:250-272
[45] Appleby J A D,Cheng J,Rodkina A.Characterisation of the asymptotic behaviour of scalar linear differential equations with respect to a fading stochastic perturbation [J].Discrete & Continuous Dynamical Systems,2011,3 (3):79-90
[46] Chen W,Guan Z,Lu X.Delay-dependent exponential stability of uncertain stochastic systems with multiple delays:An LMI approach[J].Systems & Control Letters, 2005,54(6):547-555
[47] Xu S, Lam J, Mao X, et al. A new LMI condition for delay-dependent robust stability of stochastic time-delay systems [J]. Asian Journal of Control, 2005, 7 (4): 419-423
[48] Liao X, Chen G, SanchezE N. Delay-dependent exponential stability analysis of delayed neural networks: an LMI approach [J]. Neural networks, 2002, 15 (7): 855-866
[49] Da Prato G,Zabczyk J.Stochastic equations in infinite dimensions, encyclopedia of mathematics and its applications [M]. Cambridge: Cambridge University Press,1992
[50] Zhang W,Chen B S.On stabilization and exact observability of stochastic systems with their applications[J]. Automatica,2004,40(1):87-94
[51] Zhang W, Zhang H, Chen B S. Generalized Lyapunov equation approach to state-dependent stochastic stabilization/detectability criterion[J].IEEE Trans Automat Control,2008,53(7):1630-1642
[52] Hou T,Zhang W,Ma H.Essential instability and essential destabilisation of linear stochastic systems [J]. IET Control Theory and Applications,2011,5(2):334-340
[53] 黄琳.稳定性理论[M].北京:北京大学出版社,1992
HUANG Lin.Stability theories[M].Beijing:Peking University Press,1992
[54] Zhang W, Xie L. Interval stability and stabilization of linear stochastic systems [J]. IEEE Trans Automat Control,2009,54(4):810-815
[55] Chilali M,Gahinet P,Apkarian P.Robust pole placement in LMI regions[J].IEEE Trans Automat Control,1999, 44(12):2257-2270
[56] Gutman S,Jury E I.A general theory for matrix root clustering in subregions of the complex plan[J].IEEE Trans Automat Control,1981,26(4):853-863
[57] Zhang W,Chen B S.$\mathcal{H}$-representation and applications to generalized Lyapunov equations and linear stochastic systems[J].IEEE Trans Automat Control,2012,57(12): 3009-3022
[58] Hou T,Ma H,Zhang W.Spectral tests for observability and detectability of periodic Markov jump systems with nonhomogeneous Markov chain[J].Automatica,2016,63 (1):175-181
[59] Pan Z.Differential geometric condition for feedback complete linearization of stochastic nonlinear system[J].Automatica,2001,37:145-149
[60] Liu H,Li X,Yang Q.The ergodicity property and positive

recurrence of a multi-group Lotak-Volterra mutualistic system with regime switching[J].System & Control Letters,2013,62:805-810
[61] Nguyen D H, Yin G. Coexistence and exclusion of stochastic competitive Lotka-Volterra models[J].Journal of Differential Equations,2017,262(3):1192-1225
[62] Zhang X. Exponential ergodicity of non-Lipschitz stochastic differential equations [J]. Proceeding of the American Mathematical Society,2009,137(1):329-337
[63] Xi F. Feller property and exponential ergodicity of diffusion processes with state-dependent switching[J]. Science in China Series A:Mathematics,2008,51(3):329-342
[64] Wang J. On the exponential ergodicity of Lévy-driven Ornstein-Uhlenbeck processes [J]. Journal of Applied Probability,2012,49(4):990-1004
[65] Mohammed S E A.Stochastic functional differential equations[J].Pitman Advanced Pub Program,1984,18(2):63-64
[66] Bao J,Wang F Y,Yuan C.Bismut formulae and applications for functional SPDEs [J]. Bulletin des Sciences Mathèmatiques,2013,137:509-522
[67] Bao J,Yin G,Yuan C.Ergodicity for functional stochastic differential equations and applications [J]. Nonlinear Analysis,2014,98:66-82
[68] Bao J,Yin G,Yuan C,et al.Exponential ergodicity for retarded stochastic differential equations[J].Applied Analysis,2014,93:2330-2349
[69] Bao J,Yin G,Yuan C.Stationary distributions for retarded stochastic differential equations without dissipativity[J]. Stochastics,2017,89(2):530-549
[70] Wu F, Yin G, Mei H. Stochastic functional differential equations with infinite delay:Existence and uniqueness of solutions, solution maps, Markov properties, and ergodicity[J]. Journal of Differential Equations, 2017, 262(3):1226-1252
[71] Shiryaev A N. Probability [M]. New York: Springer-Verlag,1996
[72] Karatzas I,Shreve S E. Brownian motion and stochastic calculus[M].New York:Springer-Verlag,2012
[73] Mao X.Razumikhin-type theorems on exponential stability of stochastic functional-differential equations [J]. Stochastic Processes and Their Applications, 1996, 65(2):233-250
[74] Mao X.Razumikhin-type theorems on exponential stability of neutral stochastic functional-differential equations[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis,1997,28(2):389-401

Stability theory of stochastic differential equations:Survey of methods

WU Fuke[1] ZHANG Weihai[2]

1 School of Mathematics and Statistics,Huazhong University of Science and Technology,Wuhan 430074

2 College of Electrical Engineering and Automation,Shandong University of Science and Technology,Qingdao 266590

Abstract From aspects of the research methods,this paper reviews various classes of stability results of continuous stochastic systems,and discusses the relationship among these stabilities under different conditions.

Key words stochastic systems;stochastic differential equations;almost sure stability;moment stability;stability in probability;stationary distribution;stochastic stabilization