DOI:10.13878/j.cnki.jnuist.2017.03.002

赵勇[1]　张维海[2]

奇异 Itô 随机系统几个重要基础问题的研究进展

摘要

近年来,一类由 Itô 随机微分方程驱动的奇异随机系统因其在实际领域中的广泛应用而备受关注.然而,系统方程同时包含奇异矩阵和扩散矩阵,大大增加了分析问题的复杂性.本文首先概述了奇异 Itô 随机系统几个重要基础问题的研究进展,主要包括:系统方程解的存在条件、广义 Itô 公式、容许性定义及稳定性问题.同时针对不同文献对上述问题的研究结果提出了自己的观点.最后对以上基础问题研究待解决的问题进行了展望.

关键词

奇异 Itô 随机系统;解的存在条件;广义 Itô 公式;容许性;稳定性

中图分类号 TP13
文献标志码 A

收稿日期 2017-04-11
资助项目 国家自然科学基金(61573227)

作者简介

赵勇,女,博士,讲师,研究方向为奇异随机系统的稳定与鲁棒控制、随机系统鲁棒控制.zhaoyong_er@ 126.com

张维海(通信作者),男,博士,教授,研究方向为随机奇异系统、随机系统鲁棒控制以及随机稳定性分析.w_hzhang@ 163.com

1　山东科技大学　数学与系统科学学院,青岛,266590

2　山东科技大学　电气与自动化工程学院,青岛,266590

0　引言

1974 年,英国学者 Rosenbrock 在研究复杂电网时,发现电网中某些部件突然失效,在失效的前后时刻有电流的瞬动现象,这种瞬间的变化不包括在常见的正常线性系统描述之中.在经历了大量的研究与试验后,他首次提出了基于电网的“奇异系统”的模型[1-2]

$$\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t),\tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量,$\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 的已知常数矩阵,且 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{E})=r\leqslant n$.随后,美国学者 Luenberger 发现经济领域中著名的动态 Leontief 投入产出模型也属于奇异系统,并在文献[3]中讨论了这类系统的解的存在唯一条件.至此,人们对奇异系统的研究正式拉开帷幕,并逐渐发展为现代控制理论的一大分支.随着研究的不断深入,在许多实际问题中诸如大规模系统[4]、机械工程[5]、航空模型[6]、网路理论[7-8]、受限机器人[9]等相继发现了奇异系统的广泛应用.奇异系统又被称为广义系统、描述系统、隐式系统、微分代数系统等[2,10].

从式(1)可以看出,当 $\boldsymbol{E}$ 为可逆阵时,通过非奇异变换可将奇异系统转化为正常线性系统,因而可以说正常线性系统是奇异系统的特例,奇异系统是正常线性系统的推广,正是这种推广赋予了奇异系统新的独有的特性[7-8].比如奇异系统的解结构中,不仅包含指数解还包含脉冲解,为了保证解的适定性,所研究的奇异系统必须要满足正则性和无脉冲性的条件;奇异系统一般包括慢子系统和快子系统两部分,其中慢子系统由微分方程(连续系统)或差分方程(离散系统)来描述,而快子系统由静态的代数方程来描述;奇异系统不一定有李雅普诺夫意义下的稳定性和镇定性,因为正常线性系统一般选李雅普诺夫函数为 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)$,$\boldsymbol{P}>0$ 是正定的,而奇异系统选的李雅普诺夫函数 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}(t)$,$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\geqslant 0$ 是不定的(针对连续系统).正是由于奇异系统的以上特点,使其研究起来比正常的线性系统更为复杂.近 30 年来,继文献[7-8]给出奇异系统解存在唯一的条件后,奇异系统的研究取得了突飞猛进的发展,学者们研究和解决了一系列奇异系统的控制问题,如稳定和镇定[11-16]、H_∞ 控制和带时滞和参数不确定性的鲁棒 H_∞ 控制[17-23]、鲁棒 H_∞ 滤波[24-26]、H_2/H_∞ 控制[27-29]等,为奇异系统的研究做出了重要贡献.尤其是奇异系统的专著《Robust control and filtering of singular systems》[25]、《不确定广义系统的分析与综合》[30]、《广义系统》[31]、《奇异系统的鲁棒

控制理论》[32]的出现标志着奇异系统的研究日趋成熟和完善.

在工业控制、社会经济和生物系统等众多实际问题中,随着系统模型精确度的提高,确定性系统建模已经不能够满足实际的要求,需要将随机因素考虑到模型中来.著名的 Langevin 方程、Black-Seholes 方程均是考虑外界随机环境噪声（白噪声）干扰的具体实例[33-34],这类方程被称为 Itô 随机微分方程[35].众所周知,基于 Itô 随机微分方程的随机控制已经在金融、经济、生物、网络等实际领域发挥了重要作用[36-37],与之相关的大量的重要研究成果已经陆续被报道,如稳定和镇定[38]、随机 H_∞ 控制[39-40]、鲁棒 H_∞ 滤波[41]、随机 H_2/H_∞ 控制[42-44]等.

为使奇异系统描述的实际模型更加精确,人们自然想到将外界环境噪声影响加入到模型中来.然而,由于奇异矩阵和扩散矩阵同时出现在系统模型中,使得这类系统兼具确定性奇异系统和正常随机系统的特征,所以研究起来也具有一定的挑战性.目前为止,关于奇异随机系统的研究成果远没有确定奇异系统丰富和成熟,相关的研究文献也比较少.

最早研究奇异随机系统的文献可追溯到 2004 年,Raouf 等[45]将确定性奇异系统正则和无脉冲的定义移植到奇异随机系统,通过李雅普诺夫方法研究了状态依噪声的奇异马尔可夫跳变系统的鲁棒稳定和镇定问题,文中并没有给出对奇异随机系统的 Itô 公式的严格证明.随后,Ho 等[46]研究了奇异 Itô 随机系统的稳定和滤波问题,首次给出了奇异 Itô 随机系统有无脉冲解的条件,该条件与确定奇异系统不同,它包含了扩散矩阵.同时,通过引入奇异矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的广义逆 $\boldsymbol{E}^+$ 给出奇异随机系统的 Itô 公式,并给出了严格的证明.然而,该文没有给出奇异 Itô 随机系统容许性完善的证明.尽管如此,该文的出现为奇异 Itô 随机系统的后续研究奠定了重要理论基础.Huang 等[47]研究了一类状态依噪声的奇异马尔可夫跳变随机系统的指数稳定性,以两种矩阵分解的形式给出了系统方程有无脉冲解的新条件,降低了文献[46]给出无脉冲解条件的保守性,将状态依噪声的奇异随机混杂系统转化成等价的奇异马尔可夫跳变系统,利用奇异马尔可夫跳变系统的正则、无脉冲、随机容许性的定义给出奇异随机系统均方正则、均方无脉冲、均方稳定和均方容许的定义.利用文献[46]给出的奇异随机系统的无脉冲解条件,Gao 等[48]研究了奇异随机系统的状态估计和控制问题,文献[49-50]将文献[46]的条件进一步推广到奇异随机马尔可夫跳变系统,讨论了不确定时滞奇异混杂系统的鲁棒 H_∞ 滤波控制问题.Gao 等[51]给出了奇异随机系统有无脉冲解且均方指数稳定的完整证明,从而改进和完善了文献[46]的稳定结果.Wang[52]通过设计一种包含奇异矩阵的特殊控制器,给出了一类控制器进入扩散项的奇异随机混杂系统指数稳定的条件.Xing 等[53]研究了具有范数界参数不确定性的有限时间奇异随机系统的鲁棒 H_∞ 控制,基于扩展的二次李雅普诺夫函数法研究了随机 T-S 模糊奇异系统的均方容许性[54].Zhang 等[55]分别用两种方法讨论了连续和离散时间奇异随机系统的稳定,提出了一种新的解的存在唯一条件,利用 $\mathcal{H}$-表示法将随机奇异系统转化成等价的$\dfrac{n(n+1)}{2}$-维标准的确定性奇异系统,从而改进了文献[47]的结果,将文献[51]的假设条件进一步减弱,使得所研究的奇异随机系统更有普遍性,并用严格的 LMI 法给出了系统均方容许的新条件.此外,文献[55]首次给出了离散时间奇异随机系统均方容许的 LMI 条件.文献[56]进一步讨论了连续和离散时间奇异随机马尔可夫跳变系统的稳定性,明确提出了奇异随机马尔可夫跳变系统“无脉冲”和“均方容许”的新概念,同时,该文从奇异随机系统本身出发,将对系统均方容许性的讨论直接转化为严格的 LMI 求解,大大简化了计算过程.在文献[55-56]的基础上,Zhao 等[57]研究了奇异随机马尔可夫跳变系统的镇定和状态观测器设计,用顺序不等式法克服扩散项导致的求解困难,用严格的 LMI 法求出了误差系统的控制器增益和观测器增益.最近,Zhao 等[58-59]讨论了奇异随机系统的状态反馈 H_∞ 控制,给出了使闭环系统均方容许且满足 H_∞ 干扰抑制水平的新条件,探索了带有参数不确定性及多噪声的奇异随机系统的鲁棒镇定及鲁棒 H_∞ 控制[60].目前,基于文献[55]中的研究结果,Li 等[61]研究了奇异 Itô 随机系统的基于观测器的滑模控制;Mathiyalagan 等[62]给出了一类分数阶奇异随机系统有限时间稳定的充分条件;Zhang 等[63]探索了有限时间奇异随机系统的线性二次 Pareto 最优控制.

查阅文献发现,研究奇异随机系统不可避免地涉及以下几个基础问题:

1）怎样给出系统方程解存在的条件?

2）怎样给出系统有无脉冲解及容许性的定义?

3)怎样给出奇异随机系统的 Itô 公式?

4)怎样研究奇异随机系统的稳定性?

以上几个基础问题的解决对研究奇异随机系统的相关控制问题起到了至关重要的作用.为此,本文回顾和整理了连续时间奇异随机系统关于解的存在唯一条件、Itô 公式、容许性定义及稳定问题的现有研究结果,并针对一些问题提出自己的研究观点.

本文结构如下:首先综述连续时间奇异 Itô 随机系统解的存在唯一条件,接下来总结系统无脉冲及容许定义的进展,然后归纳现有文献给出奇异 Itô 随机系统的 Itô 公式,最后探讨奇异随机系统稳定问题的研究现状.

本文采用的符号如下:S_n:$n\times n$ 对称阵的集合;$\boldsymbol{A}>0(\boldsymbol{A}<0)$:$\boldsymbol{A}$ 是实正定对阵矩阵(负定矩阵);$\boldsymbol{A}\geqslant 0(\boldsymbol{A}\leqslant 0)$:$\boldsymbol{A}$ 是实半正定对阵矩阵(半负定矩阵);$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$:$\boldsymbol{A}$ 的转置;vec(·):行叠加算子;$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$:矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的克罗内克积;$\|\cdot\|$:向量的欧几里德范数;$\varepsilon(\cdot)$:期望算子;$\boldsymbol{I}_n$:$n\times n$ 单位矩阵;$\mathbf{R}^n$:具有通常 2 范数 $\|\cdot\|$ 的 n- 维实向量空间;$\mathbf{R}^{m\times n}$:$m\times n$ 矩阵全体构成的空间;$\boldsymbol{E}^{+}$:奇异矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的广义逆矩阵;rank$(\boldsymbol{A})$:$\boldsymbol{A}$ 的秩;He(A):$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$:

1 解的存在唯一条件

本文重点讨论连续时间奇异 Itô 随机系统的研究结果.考虑如下 n-维线性奇异 Itô 随机系统

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}w(t),\\ \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n,\end{cases}\tag{2}$$

其中,$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 是系统的状态,$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$ 是确定的初始条件.$\boldsymbol{E},\boldsymbol{A},\boldsymbol{F}$ 是 $n\times n$ 常数矩阵,且 rank$(\boldsymbol{E})=r\leqslant n$,$w(t)$ 是定义在完备的概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ 上的一维标准的维纳过程.

假设 1[46] 对奇异随机系统(2),假设以下条件成立:

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}_2)=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{F}_2\end{bmatrix},\tag{3}$$

其中,$\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{F}_2$ 满足 $\boldsymbol{PA}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{PF}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_1\\ \boldsymbol{F}_2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}_1\in\mathbf{R}^{r\times n}$,$\boldsymbol{A}_2\in\mathbf{R}^{(n-r)\times n}$,$\boldsymbol{F}_1\in\mathbf{R}^{r\times n}$,$\boldsymbol{F}_2\in\mathbf{R}^{(n-r)\times n}$,而 $\boldsymbol{P}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是一个非奇异矩阵,它使 $\boldsymbol{PE}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_1\\ 0\end{bmatrix}$,其中,$\boldsymbol{E}\in\mathbf{R}^{r\times n}$,rank$(\boldsymbol{E}_1)=r$.

定理 1[46] 如果奇异随机系统(2)满足:

1)矩阵对$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$正则和无脉冲;

2)假设 1 成立,

则奇异随机系统(2)解存在且唯一.

注 1 从定理 1 中可以看出,如果矩阵对$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$正则和无脉冲,则一定存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{PEQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_r&0\\0&\boldsymbol{I}_{n-r}\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{PFQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_{11}&\boldsymbol{F}_{12}\\ \boldsymbol{F}_{21}&\boldsymbol{F}_{22}\end{bmatrix}\tag{4}$$

其中,$\boldsymbol{F}_{11}\in\mathbf{R}^{r\times r}$,$\boldsymbol{F}_{12}\in\mathbf{R}^{r\times(n-r)}$,$\boldsymbol{A}_r\in\mathbf{R}^{r\times r}$,

$\boldsymbol{F}_{21}\in\mathbf{R}^{(n-r)\times r}$,$\boldsymbol{F}_{22}\in\mathbf{R}^{(n-r)\times(n-r)}$.

此时,在假设 1 的条件下,必有

$$\mathrm{rank}[0\quad \boldsymbol{I}_{n-r}\quad \boldsymbol{F}_{21}\quad \boldsymbol{F}_{22}]=n-r,$$

故 $\boldsymbol{F}_{21}=\boldsymbol{F}_{22}=0$.因此,定理 1 的条件实际上是说,如果奇异随机系统(2)的矩阵对$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A},\boldsymbol{F})$满足

$$\boldsymbol{PEQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_r&0\\0&\boldsymbol{I}_{n-r}\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{PFQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_{11}&\boldsymbol{F}_{12}\\0&0\end{bmatrix},\tag{5}$$

则系统一定有无脉冲的解.不难看出式(5)等价于以下条件:

$$\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\neq 0,$$
$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{E})=\deg(\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})),$$
$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{E})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}).\tag{6}$$

Huang 等[47]在文献[46]的基础上进一步给出了带马尔可夫跳变参数的奇异随机系统有无脉冲解的新条件.为了模型的统一性,这里我们去掉了原文中的马尔可夫跳变参数.

定理 2[47] 对奇异随机系统(2),如果存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使得矩阵对$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A},\boldsymbol{F})$满足下列条件之一:

1)
$$\boldsymbol{PEQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_r&0\\0&\boldsymbol{I}_{n-r}\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{PFQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_{11}&\boldsymbol{F}_{12}\\0&\boldsymbol{F}_{22}\end{bmatrix};\tag{7}$$

2)
$$\boldsymbol{PEQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_r&\boldsymbol{B}\\0&\boldsymbol{C}\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{PFQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_{11}&0\\0&\boldsymbol{F}_{22}\end{bmatrix},\tag{8}$$

其中,$\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{r\times(n-r)}$,$\boldsymbol{C}\in\mathbf{R}^{(n-r)\times(n-r)}$,则奇异随机系统(2)有无脉冲解.

注 2 在式(7)中,当 $\boldsymbol{F}_{22}=0$ 时,定理 2 的条件 1)退化为式(5),而式(8)和式(5)没有包含关系.

定理 3[55]　对奇异随机系统(2),如果存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使得矩阵对$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A},\boldsymbol{F})$满足

$$\boldsymbol{PEQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{n1} & 0\\ 0 & \boldsymbol{N}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}_{n2}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{PFQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_{11} & \boldsymbol{F}_{12}\\ 0 & 0\end{bmatrix},\tag{9}$$

$\boldsymbol{N}\in\mathbf{R}^{n_2\times n_2}$是一个幂零矩阵,$\boldsymbol{F}_{11}\in\mathbf{R}^{n_1\times n_1}$,$\boldsymbol{F}_{12}\in\mathbf{R}^{n_1\times n_2}$,$n_1+n_2=n$,则奇异随机系统(2)解存在且唯一.

注 3　式(9)给出了奇异随机系统方程解存在的条件,不要求保证无脉冲性,当 $\boldsymbol{N}=0$ 时,式(9)退化为式(5).因此,定理 3 减弱了定理 1 和定理 2 给出的条件,使得所研究的奇异随机系统的范围更广.

注 4　通过定理 1—3 可以看出,扩散矩阵 $\boldsymbol{F}$ 在奇异随机系统的解的存在条件中起到了至关重要的作用,忽略 $\boldsymbol{F}$ 的存在,将确定性奇异系统正则条件作为奇异随机系统有解的条件是不合适的.

2　正则、无脉冲及容许性

确定性奇异系统的解存在非正则解与脉冲解,这些解的存在对系统的动态特性有非常坏的影响.因此,研究奇异系统解的正则性和无脉冲性显得尤为重要.而对于奇异随机系统,扩散矩阵的存在使得正则性已经不再构成系统方程解存在的条件.那么,我们如何给出奇异随机系统无脉冲性及容许性的定义呢?为方便将确定性奇异系统和随机奇异系统的结论加以对比,我们分别给出它们正则、无脉冲及容许的定义.

定义 1[25]　对于确定奇异系统(1):

1)矩阵对$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$是正则的,如果

$\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\neq 0$;

2)矩阵对$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$是无脉冲的,如果

$\deg(\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}))=\mathrm{rank}(\boldsymbol{E})$;

3)矩阵对$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$是容许的,如果它是正则、无脉冲和稳定的.

文献[47]将奇异随机系统(2)转换成确定性奇异系统(原文是奇异随机马尔可夫跳变系统转换成不含噪声的马尔可夫跳变系统,在此我们省略了马尔可夫跳变参数),

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}\,\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\widetilde{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}(t),\tag{10}$$

其中,

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E},\quad \widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{A}+\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{F},$$

$$\bar{\boldsymbol{x}}(t)=\varepsilon[\boldsymbol{x}(t)\otimes\boldsymbol{x}(t)].$$

在此基础上,利用确定性奇异随机系统的容许性给出奇异随机系统均方容许性的定义.

定义 2[47]　对于奇异系统(10):

1)系统(10)是正则的,如果

$\det(s\widetilde{\boldsymbol{E}}-\widetilde{\boldsymbol{A}})\neq 0$;

2)系统(10)是无脉冲的,如果

$\deg(\det(s\widetilde{\boldsymbol{E}}-\widetilde{\boldsymbol{A}}))=\mathrm{rank}(\widetilde{\boldsymbol{E}})$;

3)系统(10)是随机稳定的,如果存在正常数 λ_2,C_2 使得

$\varepsilon\|\bar{\boldsymbol{x}}(t,\bar{\boldsymbol{x}}_0)\|^2\leqslant C_2\|\bar{\boldsymbol{x}}_0\|^2\mathrm{e}^{-\lambda_2 t},\quad t\geqslant 0$;

4)系统(10)是容许的,如果它满足正则、无脉冲和随机稳定的.

定义 3[47]　对于奇异随机系统(2):

1)系统(2)是均方正则的,如果系统(10)是正则的;

2)系统(2)是均方无脉冲的,如果系统(10)是无脉冲的;

3)系统(2)是均方稳定的,如果存在正常数 λ_1,C_1 使得

$\varepsilon\|\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0)\|^2\leqslant C_1\|\boldsymbol{x}_0\|^2\mathrm{e}^{-\lambda_1 t},\quad t\geqslant 0$;

4)系统(2)是均方容许的,如果它在均方意义下正则、无脉冲和稳定的.

定义 4[55]　对于奇异随机系统(2):

1)系统(2)是无脉冲的,如果定理 1、定理 2 或定理 3 满足 $\boldsymbol{N}=0$ 三者之一成立;

2)系统(2)是渐近均方稳定的,如果对任意初始条件 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}$,都有

$\lim_{t\to\infty}\varepsilon[\|\boldsymbol{x}(t)\|^2]=0$;

3)系统(2)是均方容许的,如果它有一个无脉冲解且为渐近均方稳定的.

注 5　从上述定义中可以看出,仅利用矩阵对$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$无脉冲来定义奇异随机系统有无脉冲解是不合适的,以上事实充分说明确定奇异系统和随机奇异系统是存在本质差别的.

3　扩展的 Itô 公式

在研究随机系统的相关控制问题时,Itô 公式的运用是非常重要的.对于状态空间随机 Itô 系统,Itô 公式的推导早已被解决,为随机控制的发展奠定了重要理论基础,而对于奇异随机系统,不同的文献给出的 Itô 公式有所不同.我们总结了现有文献给出的奇异随机系统的 Itô 公式.

定理 4[45]　设 $\boldsymbol{x}(t)$是奇异随机系统(2)的 n-维随机过程,$t\geqslant 0$.定义 $V(\boldsymbol{x}(t),t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PEx}(t)$,$\boldsymbol{P}$

是正定矩阵,则奇异随机系统(2)的Itô公式为

$$\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t),t)=LV(\boldsymbol{x}(t),t)\mathrm{d}t+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PEx}(t)\mathrm{d}w(t),$$

其中,无穷小算子

$$LV(\boldsymbol{x}(t),t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PEx}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PAx}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PEFx}(t).$$

定理5[64] 设$\boldsymbol{x}(t)$是奇异随机系统(2)的n-维随机过程,$t\geqslant 0$.定义$V(\boldsymbol{x}(t),t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Px}(t)$,$\boldsymbol{P}$是非奇异矩阵且满足$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\geqslant 0$,则奇异随机系统(2)的Itô公式为

$$\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t),t)=LV(\boldsymbol{x}(t),t)\mathrm{d}t+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Px}(t)\mathrm{d}w(t),$$

其中,无穷小算子

$$LV(\boldsymbol{x}(t),t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Px}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PFx}(t).$$

定理6[47] 设$\boldsymbol{x}(t)$是奇异随机系统(2)的n-维随机过程,$t\geqslant 0$.定义$V(\boldsymbol{x}(t),t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PEx}(t)$,$\boldsymbol{P}$是对称矩阵,则奇异随机系统(2)的Itô公式为

$$\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t),t)=LV(\boldsymbol{x}(t),t)\mathrm{d}t+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PEx}(t)\mathrm{d}w(t),\tag{11}$$

其中,无穷小算子

$$LV(\boldsymbol{x}(t),t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PEx}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PAx}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PFx}(t).$$

注6 文献[45,47,64]均给出了带马尔可夫跳变参数的奇异随机系统的广义Itô公式,这里我们将跳变参数去掉了,并不影响问题的本质.

定理7[51] 设$\boldsymbol{x}(t)$是奇异随机系统(2)的n-维随机过程,$t\geqslant 0$.定义$V(\boldsymbol{x}(t),t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Px}(t)$,$\boldsymbol{P}$是非奇异矩阵且满足$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\geqslant 0$,则奇异随机系统(2)的Itô公式为

$$\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t),t)=LV(\boldsymbol{x}(t),t)\mathrm{d}t+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Px}(t)\mathrm{d}w(t),\tag{12}$$

其中,无穷小算子

$$LV(\boldsymbol{x}(t),t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Px}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{+\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PE}^{+}\boldsymbol{Fx}(t),$$

$\boldsymbol{E}^{+}$表示奇异矩阵$\boldsymbol{E}$的广义逆矩阵.

注7 定理5和定理7选取了相同的李雅普诺夫函数$V(\boldsymbol{x}(t),t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Px}(t)$,但给出的Itô公式却是不同的.我们认为定理7给出的结论更为合理.这是因为

$$\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t))=\mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Px}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}(\boldsymbol{Ex}(t))+(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}\mathrm{d}(\boldsymbol{x}(t)),\tag{13}$$

根据式(2),我们知道$\mathrm{d}(\boldsymbol{Ex}(t))$的确切表达式,但是并不知道$\mathrm{d}(\boldsymbol{x}(t))$的表达式.然而,当引入奇异矩阵$\boldsymbol{E}$的广义逆矩阵$\boldsymbol{E}^{+}$时,则有

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}^{+})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}^{+})^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}^{+})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{EE}^{+}\mathrm{d}(\boldsymbol{Ex}(t)).\tag{14}$$

将式(14)代入式(13),得

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Px}(t))=\mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Px}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}(\boldsymbol{Ex}(t))+\mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}^{+})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{EE}^{+}\mathrm{d}(\boldsymbol{Ex}(t)).\tag{15}$$

将式(2)代入式(15)后可得到式(12)中的无穷小算子.

注8 对于定理4和定理6选取选取相同的李雅普诺夫函数$V(\boldsymbol{x}(t),t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PEx}(t)$,根据

$$\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t))=\mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{PEx}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}(\boldsymbol{Ex}(t))+\mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{P}\mathrm{d}(\boldsymbol{Ex}(t)),\tag{16}$$

将式(2)代入到式(16)得到式(11)中的无穷小算子.因此,定理6给出的Itô公式是合理的.

4 奇异随机系统的稳定

稳定是系统分析和综合首先要考虑的问题.由于奇异随机系统的解存在脉冲摄动,因此研究奇异随机系统的稳定必须要保证系统的解是无脉冲的.目前,研究奇异随机系统的稳定问题通常有两种方法,一种是传统的Lyapunov方法,一种是将奇异随机系统转化成确定的奇异系统,通过确定奇异系统的稳定来给出随机奇异系统稳定的条件.

文献[47]在定义2与定义3的基础上利用奇异系统(10)容许性的研究结果给出奇异随机系统(2)均方容许的LMI条件.

定理8[47] 奇异系统(10)是容许的,如果存在非奇异矩阵$\boldsymbol{P}$使得下列LMI条件成立:

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{E}}\geqslant 0,$$
$$\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{A}}<0.$$

定理9[47] 奇异随机系统(2)是均方容许的,如果奇异系统(10)是容许的.

文献[55]利用H-表示技术改进定理8的结论,给出降维后的奇异系统容许的严格LMI条件.

引理1[65] 对任意具有合适维数的矩阵$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{C}$,有

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{ABC})=(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})\mathrm{vec}(\boldsymbol{B}).$$

引理2[66]

1) 对任意$\boldsymbol{X}\in S_n$,存在一$n^2\times\dfrac{n(n+1)}{2}$-维的独立于$\boldsymbol{X}$的矩阵$\boldsymbol{H}_n$使得

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{H}_n\widetilde{\boldsymbol{X}},$$

$\widetilde{\boldsymbol{X}}=[x_{11},x_{12},\cdots,x_{1n},x_{22},\cdots,x_{2n},\cdots,x_{nn}]^{\mathrm{T}}$.这里$\widetilde{\boldsymbol{X}}$是

通过删除 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{X})$ 的重复元素而得到的一个$\frac{n(n+1)}{2}$-维的向量.反过来,对任意 $\boldsymbol{\zeta}\in C^{n(n+1)/2}$,都存在 $\boldsymbol{X}\in S_n$,使得 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{H}_n\boldsymbol{\zeta}$.

2) $\boldsymbol{H}_n^T\boldsymbol{H}_n$ 是一个非奇异阵,$\boldsymbol{H}_n$ 是列满秩阵.

引理 3[55] 设 $\boldsymbol{Z}_1,\boldsymbol{Z}_2\in S_n$ 如果

$$\boldsymbol{H}_n^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{Z}_1)=\boldsymbol{H}_n^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{Z}_2),$$

那么 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{Z}_1)=\mathrm{vec}(\boldsymbol{Z}_2)$.

定理 10[55] 奇异随机系统(2)是均方容许的,如果$\frac{n(n+1)}{2}$-维确定的奇异系统

$$\bar{E}\dot{\tilde{X}}=\bar{A}\tilde{X} \tag{17}$$

是容许的,其中

$$\bar{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{H}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E})\boldsymbol{H}_n,\quad \tilde{\boldsymbol{X}}=(\boldsymbol{H}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_n)^{-1}\boldsymbol{H}_n^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}),$$

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{H}_n^{T}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{A}+\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{F})\boldsymbol{H}_n,$$

$$\boldsymbol{X}=\varepsilon[\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)],\quad \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{H}_n\tilde{\boldsymbol{X}},$$

$\boldsymbol{x}(t)$是系统(2)的轨道.

推论 1[55] 奇异随机系统(2)是均方容许的,如果存在矩阵 $\bar{\boldsymbol{P}}>0,\bar{\boldsymbol{Q}}$ 使得下列不等式成立:

$$(\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{E}+\bar{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}+\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{E}+\bar{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{Q})<0, \tag{18}$$

这里 $\bar{\boldsymbol{S}}$ 是一列满秩阵且满足 $\bar{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{S}}=0$.

注 9 注意到引入矩阵 $\boldsymbol{H}_n$ 后可去掉 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{X})$ 中重复性元素,此时,式(17)为$\frac{n(n+1)}{2}$-维标准奇异系统,其维数低于系统 (10).

注 10 与文献[47]相比,定理 10 直接使用 Itô 公式将奇异随机系统(2)转变成确定奇异系统 (17),并没有使用任何的辅助矩阵,这使得计算过程简单而清晰.此外,(18)是一严格的线性矩阵不等式,它是非常容易利用 MATLAB 的 LMI 工具箱来求解的.

注 11 一般来讲,当把随机系统转化成等价的确定系统后,可用利用确定系统的结果来研究随机系统的诸多问题.然而,对奇异系统而言,上述结论却不一定成立.为了更清楚地看到这一事实,我们看下面的具体数值例子.对系统(2)取如下的数据:

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0\\1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}0.5&0.2\\1&0.4\end{bmatrix},$$

对于矩阵 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{A},\boldsymbol{F}$,存在非奇异矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0&0.5\\1&-0.5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}-0.5&-1\\1.5&1\end{bmatrix},$$

使得

$$\boldsymbol{MEN}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{MAN}=\begin{bmatrix}0.5&0\\0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{MFN}=\begin{bmatrix}0.5&-0.3\\0&0\end{bmatrix}.$$

因此,由定理 2 条件 1) 知系统(2)有解.但由于 $\det(s\bar{\boldsymbol{E}}-\bar{\boldsymbol{A}})$,系统(17)无解.因此,我们可以得出结论:奇异随机系统(2)有解不能保证确定奇异系统(17)有解,反之亦然.以上事实充分说明奇异随机系统与正常的随机系统有本质的区别.

定理 11[55] 奇异随机系统(2)是均方容许的,如果存在矩阵 $\boldsymbol{P}>0,\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}<0 \tag{19}$$

且有下列条件之一成立:

1) $\mathrm{rank}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{E})$;

2) 定理 2 条件 1)成立.

在式(19)中,$\boldsymbol{S}$ 是列满秩阵且满足 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}=0$.

文献[51]利用定理 7 给出的广义 Itô 公式,在假设 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{E})$ 和矩阵对$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$正则的条件下给出了奇异随机系统无脉冲和均方指数稳定的条件.

定义 5[51] 奇异随机系统(2)是均方指数稳定的,如果存在正标量 α,β 使得

$$\varepsilon[\|\boldsymbol{x}(t)\|]^2\leqslant\alpha e^{-\beta t}.$$

定理 12[51] 奇异随机系统(2)是无脉冲和均方指数稳定的,如果存在矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\geqslant 0, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}^{+})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}^{+}\boldsymbol{F}<0. \tag{21}$$

注 12 如果条件 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{E})$ 被满足,那么系统(2)状态向量独立变量的个数是 r,并且随机扰动项 $\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}w(t)$ 没有真正改变系统的结构,此条件结合式(19)可保证奇异随机系统(2)等价于一个正常的随机 Itô 系统.由此可见,定理 11 的条件 1)比定理 12 的假设条件要弱,故降低了系统的保守性.另一方面,定理 11 给出的是严格的 LMI 条件,可以避免数值求解的可行性问题.

推论 1 奇异随机系统(2)是无脉冲和均方指数稳定的,如果存在矩阵 $\bar{\boldsymbol{P}}\in\mathbf{R}^{n\times n}>0$,非奇异阵 $\bar{\boldsymbol{Q}}\in\mathbf{R}^{(n-r)\times(n-r)}$,使得下列 LMI 条件成立:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}})+(\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}+ \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}^{+})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{+}\boldsymbol{F}<0. \tag{22}$$

其中,$\boldsymbol{U}\in\mathbf{R}^{(n-r)\times n}$、$\boldsymbol{V}\in\mathbf{R}^{n\times(n-r)}$ 分别是行满秩、列满秩矩阵,由 $\boldsymbol{E}$ 的左零空间和右零空间的基构成.

注 13 通过引入自由矩阵 $\bar{\boldsymbol{Q}}$ 不但将定理 12 中包含等式 LMI 条件转化成严格的 LMI 形式,而且式(22)形式更易于讨论奇异随机系统的镇定问题.

5 结论

本文综述了奇异 Itô 随机系统解的存在条件、广

义 Itô 公式、容许性定义及稳定问题的研究结果,并针对这些不同的结果提出了自己的研究观点.第 1 部分回顾了确定性奇异系统和随机奇异系统的研究现状,提出奇异随机系统研究中涉及的重要问题.第 2 部分总结了奇异随机系统解的存在条件,明确了该系统解的存在条件并不是唯一的,扩散矩阵起到了至关重要的作用,并给出了不同条件之间的包含关系.第 3 部分归纳了现有文献给出的奇异 Itô 随机系统的广义 Itô 公式,分析了个别研究结果的不合理性.第 4 部分概述了奇异 Itô 随机系统稳定问题的研究进展,比较了所给稳定条件的保守性.

目前为止,现有文献给出的奇异随机系统解的存在唯一条件均为充分的,发展充分且必要的解存在唯一条件将会对奇异随机系统的研究起到重大的推动作用.此外,奇异随机系统稳定问题的研究结果均是基于一定的假设条件进行的,如何去掉假设条件,使得奇异随机系统的研究如同确定性奇异系统一样通过直接寻求线性不等式的解来给出系统均方容许条件值得进一步研究.

参考文献
References

[1] Rosenbrock H H.Structural properties of linear dynamical systems[J].International Journal of Control, 1974, 20(2):191-202

[2] 王慧姣.不确定奇异系统的鲁棒控制研究[D].杭州:浙江大学信息科学与工程学院,2008
WANG Huijiao.Study on robust control for uncertain singular systems[D].Hangzhou:College of Information Science and Engineering,Zhejiang University,2008

[3] Luenberger D G,Arbel A.Singular dynamic Leontief systems[J].Econometrica,1977,45(4):991-995

[4] Luenberger D G. Dynamic equations in descriptor form [J].IEEE Transactions on Automatic Control, 1977, 22(3):312-321

[5] Hemami H, Wyman B F. Modeling and control of constrained dynamic systems with application to biped locomotion in the frontal plane[J].IEEE Transactions on Automatic Control,1979,24(4):526-535

[6] Ardema M D. Singular perturbations in systems and control[M].New York:Springer-Verlag Wien,1983

[7] Lewis F L. A survey of linear singular systems [J]. Circuits, Systems and Signal Processing, 1986, 5(1): 3-36

[8] Dai L Y.Singular control systems lecture notes in control and information sciences[M].New York:Springer,1989

[9] Ailon A.On the design of output feedback for finite and infinite pole assignment in singular systems with application to the control problem of constrained robots[J].Circuits, Systems and Signal Processing, 1994, 13(5): 525-544

[10] 吴争光.广义时滞系统的分析与综合[D].杭州:浙江大学控制科学与工程学院,2011
WU Zhengguang. Analysis and synthesis of singular systems with time-delay [D]. Hangzhou: College of Control Science anf Engineering, Zhejiang University,2011

[11] Takaba K, Morihira N, Katayama T. A generalized Lyapunov theorem for descriptor system[J].Systems & Control Letters,1995,24(1):49-51

[12] Xu S Y,Yang C W.Stabilization of discrete-time singular systems:A matrix inequalities approach[J].Automatica, 1999,35(9):1613-1617

[13] Xu S Y,Yang C W.An algebraic approach to the robust stability analysis and robust stabilization of uncertain singular systems [J]. International Journal of Systems Science,2010,31(1):55-61

[14] Ishihara J Y,Terra M H.On the Lyapunov theorem for singular systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2002,47(11):1926-1930

[15] Xu S Y, Van Dooren P, Stefen R, et al. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty [J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2002,47(7):1122-1128

[16] Xu S Y, Lam J.Robust stability and stabilization of discrete-time singular systems: An equivalent characterization [J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2004,49(4):568-574

[17] Masubuchi I, Kamitane Y, Ohara A, et al. H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach [J]. Automatica,1997,33(4):669-673

[18] Shi P, Boukas E K, Agarwal R K. Robust control of singular continuous-time systems with delays and uncertainties[C]//The 39th IEEE Conference on Decision and Control,2000:1515-1520

[19] Kim J H, Lee J H, Hong B P. Robust H_∞ control of singular systems with time delays and uncertainties via LMI approach[C]//American Control Conference,2002: 620-621

[20] Xu S Y, Lam J, Yang C W. Robust H_∞ control for discrete singular systems with state delay and parameter uncertainty[J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Application and Algorithm, 2002,4(4):539-554

[21] Xu S Y, Lam J, Yang C W. Robust H_∞ control for uncertain singular systems with state delay[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2003, 13(13):1213-1223

[22] Ji X, Su H Y, Chu J.Robust state feedback control for uncertain linear discrete singular systems[J].IET Control Theory & Application,2007,1(1):195-200

[23] Chadli M, Darouach M. Further enhancement on robust control design for discrete-time singular systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(2): 494-499

[24] Xu S Y, Lam J, Zou Y. H_∞ filtering for singular systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(12):2217-2222

[25] Xu S Y,Lam J.Robust control and filtering of singular systems[M].Berlin:Springer-Verlag,2006
[26] Xu S Y,Lam J.Reduced-order H_∞ filtering for singular systems[J].Systems and Control Letters,2007,56(1):48-57
[27] Zhang L X,Huang B,Lam J.LMI synthesis of H_2 and mixed H_2/H_∞ controllers for singular systems[J].IEEE Transactions on Signal Processing,Circuits and Systems II:Analog and Digital,2003,50(9):615-626
[28] Yue D,Lam J.Suboptimal robust mixed H_2/H_∞ controller design for uncertain descriptor systems with distributed delays[J].Computers & Mathematics with Applications,2004,47(6/7):1041-1055
[29] Xia Y Q,Shi P,Liu G P,et al.Robust mixed H_2/H_∞ state-feedback control for continuous-time descriptor systems with parameter uncertainties[J].Circuits,Systems and Signal Processing,2005,24(4):431-443
[30] 张庆灵,杨冬梅.不确定广义系统的分析与综合[M].沈阳:东北大学出版社,2003
ZHANG Qingling, YANG Dongmei. Analysis and synthesis for uncertain descriptor systems[M].Shenyang:Northeastern University Press,2003
[31] 张庆灵,杨冬梅,姚波,等.广义系统[M].北京:科学出版社,2004
ZHANG Qingling,YANG Dongmei,YAO Bo,et al.Generalized system[M].Beijing:Science Press,2004
[32] 鲁仁全,苏宏业,薛安克,等.奇异系统的鲁棒控制理论[M].北京:科学出版社,2008
LU Renquan, SU Hongye, XUE Anke, et al. Robust control theory for singular systems[M].Beijing:Science Press,2008
[33] Langevin P.Sur la théorie du mouvement Brownien[J].CR Acad Sci Paris,1908,146:530-533
[34] Black F,Scholes M.The pricing of options and corporate liabilities[J].Journal of Political Economy,1973,81(3):637-654
[35] Itô K.On stochastic differential equations[J].American Mathematical Society,1951,18(3):491-508
[36] Oksendal B.Stochastic differential equations:an introduction with application[M].New York:Springer,1998
[37] Mao X R,Yuan C G.Stochastic differential equations with Markovian switching[M].London:Imperial College Press,2006
[38] Wang Z D,Hong Q,Burnham K J.On stabilization of bilinear uncertain time-delay stochastic systems with Markovian jumping parameters[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2002,47(4):640-646
[39] Hinrichsen D, Pritchard A. Stochastic H_∞ [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1998, 36(5):1504-1538
[40] El Bouhtouri A, Hinrichsen D, Pritchard A J. H_∞-type control for discrete-time stochastic systems[J].International Journal of Robust and Nonlinear Control,1999,9(13):923-948
[41] Wang Z D,Lam J,Liu X H.Nonlinear filtering for state delayed systems with Markovian switching[J].IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(9):2321-2328
[42] Chen B S,Zhang W H.Stochastic H_2/H_∞ control with state-dependent noise [J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2004,49(1):45-57
[43] Zhang W H,Huang Y L,Zhang H S.Stochastic H_2/H_∞ control for discrete time systems with state and disturbance dependent noise[J].Automatica,2007,43(3):513-521
[44] Zhang W H,Huang Y L,Xie L H.Infinite horizon stochastic H_2/H_∞ control for discrete-time systems with state and disturbance dependent noise[J].Automatica,2008,44(9):2306-2316
[45] Raouf J,Boukas E K.Robust stabilization of Markovian jump linear singular systems with Wiener process[C]//American Control Conference,2004:3170-3175
[46] Ho D W C,Shi X Y,Wang Z D,et al.Filtering for a class of stochastic descriptor systems[C]//International Conference on Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems,2005(2):848-853
[47] Huang L R,Mao X R.Stability of singular stochastic systems with Markovian switching[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2011,56(2):424-429
[48] Gao Z Y,Shi X Y.Stochastic state estimation and control for stochastic descriptor systems[C]//IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics, 2008:331-336
[49] Xia J W.Robust H_∞ filtering design for uncertain time-delay singular stochastic systems with Markovian jump[J].Journal of Control Theory and Applications,2007,5(4):331-335
[50] 夏建伟.连续随机时滞系统鲁棒控制和滤波[D].南京:南京理工大学自动化学院,2007
XIA Jianwei. Robust control and filter for continuous time-delay stochastic systems[D].Nanjing:School of Automation, Nanjing University of Science and Technology,2007
[51] Gao Z W,Shi X Y.Observer-based controller design for stochastic descriptor systems with Brownian motions[J].Automatica,2013,49(7):2229-2235
[52] Wang G L.Stochastic stabilization of singular systems with Markovian switchings[J].Applied Mathematics and Computation,2015,250:390-401
[53] Xing S Y,Zhang Q L,Yuan S,et al.Robust finite-time H_∞ control for uncertain stochastic singular systems[C]// The 33rd Chinese Control Conference, 2014:5345-5350
[54] Xing S Y,Zhang Q L,Zhu B Y.Mean-square admissibility for stochastic T-S fuzzy singular systems based on extended quadratic Lyapunov function approach[J].Fuzzy Sets and Systems,2017,307:99-114
[55] Zhang W H,Zhao Y,Sheng L.Some remarks on stability of stochastic singular systems with state-dependent noise[J].Automatica,2015,51:273-277
[56] Zhao Y,Zhang W H.New results on stability of singular stochastic Markov jump systems with state-dependent noise[J].International Journal of Robust and Nonlinear Control,2016,26(10):2169-2186
[57] Zhao Y,Zhang W H.Observer-based controller design for singular stochastic Markov jump systems with state de-

pendent noise[J].Journal of Systems Science and Complexity,2016,29(4):946-958

[58] Zhao Y,Zhang W H.Stochastic state feedback H_∞ control for singular systems with multiplicative noise[C]//The 35th Chinese Control Conference,2016:1729-1733

[59] Zhao Y,Jiang X S,Zhang W H.Stochastic H_∞ control for discrete-time singular systems with state and disturbance dependent noise[J].Discrete Dynamics in Nature and Society,2017,DOI:10.1155/2017/4173852

[60] Zhao Y,Zhang W H.Robust stochastic stability and H_∞ control for uncertain singular Markovian jump systems with multiplicative noise[J].Asian Journal of Control,2017,DOI:10.1002/asjc.1543

[61] Li J H,Zhang Q L.An integral sliding mode control approach to observer-based stabilization of stochastic Itô descriptor systems[J].Neurocomputing,2016,173:1330-1340

[62] Mathiyalagan K,Balachandran K.Finite-time stability of fractional-order stochastic singular systems with time delay and white noise[J].Complexity,2016,21(S2):370-379

[63] Zhang W H,Lin Y N,Xue L R.Linear quadratic Pareto optimal control problem of stochastic singular systems[J].Journal of the Franklin Institute,2017,354(2):1220-1238

[64] Boukas E K.Stabilization of stochastic singular nonlinear hybrid systems[J].Nonlinear Analysis:Theory,Methods & Applications,2006,64(2):217-228

[65] Bellman R E.Introduction to matrix analysis[M].New York:McGraw-Hill,1970

[66] Zhang W H,Chen B S.$\mathcal{H}$-representation and applications to generalized Lyapunov equations and linear stochastic systems[J].IEEE Transactions on Automatic Control,2012,57(12):3009-3022

Research advances of several important and basic problems for singular Itô stochastic systems

ZHAO Yong[1] ZHANG Weihai[2]

1 College of Mathematics and Systems Science,Shandong University of Science and Technology,Qingdao 266590

2 College of Electrical Engineering and Automation,Shandong University of Science and Technology,Qingdao 266590

Abstract In recent years,singular stochastic systems governed by the Itô stochastic differential equation have received much attention due to their extensive applications to some practical areas.However,it is very complicated to discuss singular stochastic systems since the system equation includes both the singular matrix and the diffusion matrix simultaneously.In this paper,research development of several important and basic problems for singular Itô stochastic systems are concluded,including mainly the existence condition for the solution to the system equation,the general Itô formula,the definition of admissibility and the issue of stability.Also,some research perspectives are given for results of different references.Finally,some prospects to the unresolved problems are presented.

Key words singular Itô stochastic systems; existence of the solution; generalized Itô formula; admissibility; stability