DOI:10.13878/j.cnki.jnuist.2016.06.012

尤苏蓉[1]　许婧[1]

基于模糊值损益证券的期望效用优化分析

摘要

对由具有模糊值损益证券所构成市场中的期望效用优化问题进行了分析.在分析中使用了加权期望效用模型度量模糊值财富对应的期望效用,提出了模糊意义下的套利概念,证明了最优投资组合存在当且仅当市场不存在模糊意义下的套利机会,重点讨论了最优投资组合的性质,并利用最优组合描述了资产的当前价格.

关键词

效用优化;加权期望效用;模糊数

中图分类号 O29;F224

文献标志码 A

收稿日期 2016-01-31

资助项目 中央高校基本科研业务费专项资金(15D110906)

作者简介

尤苏蓉,男,副教授,研究方向为随机微分方程及金融数学.sryou@ dhu.edu.cn

1 东华大学 理学院,上海,201620

0 引言

在经典随机金融市场模型中,风险资产的价值表现往往用随机变量或随机过程建模,这两种随机工具主要用于随机性未来状态背景下的金融建模分析.在现实金融市场中存在着很多无法用随机模型度量的不确定性因素,如由参数不确定性引起的不精确的预测、信息不足、投资者的主观决策等,而模糊工具则可以较好地解决这一类问题.

模糊工具现已被广泛应用于金融分析领域,这些应用主要包括以下几个方面:1)将现有的金融模型中的参数模糊化,得到新的模型,如带有模糊内在收益率的 NPV 模型[1]、模糊波动率和模糊强度[2-7]的资产定价模型;2)利用模糊数或模糊随机变量构造资产的未来价值或收益率,并利用新的市场模型分析经典金融问题,如在传统的投资组合选择问题上,已有学者利用模糊数或模糊随机变量定义证券的未来价值[8-10],同时提出了新的风险度量的定义,得到了新的均值-方差模型并求出了最优投资组合;3)在资产定价问题上,将资产的未来价值定义为模糊随机变量,提出了带有模糊信息的风险中性定价[11]、基于模糊随机价格的均值评估[12-14]等新的定价方法并得到了一些有趣的结论;4)利用模糊工具,如模糊层次分析法(AHP)、模糊指标值(TOPSIS)、模糊推理、模糊逻辑方法和模糊时间序列来评估市场表现[15-16]或财务预测[17-20].

在经典金融市场分析中有两个相互联系的问题:金融资产定价和消费者效用优化.根据期望效用理论,一个投资者可以在无套利市场得到效用最大化,同时根据无套利定价理论[21],该投资者的最优策略又可以构造一个定价方法,现已有不少基于效用最大化的定价方法,如公平价格理论[22]和无差别定价方法[23].借助以上定价方法,可以分析未来价格为模糊数的证券市场的效用优化问题.对于期望效用为模糊数的问题,文献[24]中提出了加权期望效用模型并将其应用于投资组合选择.加权期望效用优化的概念来源于模糊数的评价方法[12].加权期望效用模型会在本文中进行进一步的讨论.为了确保最优投资组合的存在性,本文将给出模糊背景下的无套利的充分和必要条件,同时,本文还将讨论最优投资组合和基本证券的价格之间的关系.

本文结构安排如下:第一节简单介绍了模糊数和加权期望效用

模型;第二节为主要结论,并对具有模糊值损益市场的期望效用优化问题进行了分析;第三节给出了一个数值算例对文章结论予以说明;第四节则给出了一些讨论与展望.

1 基于模糊财富的期望效用模型

在模糊信息影响下的金融市场中,证券的价值可以用模糊数建模.假设模糊数 $\tilde{X}$ 为某种不确定的价值,其 α- 截集为 $\tilde{X}_\alpha=[\tilde{X}_\alpha^L,\tilde{X}_\alpha^U]$.对于某个给定的 α,假设 $\tilde{X}_\alpha^L$ 和 $\tilde{X}_\alpha^U$ 关于 α 连续,其中 $\tilde{X}_\alpha^L$ 和 $\tilde{X}_\alpha^U$ 可以分别看作是给定的隶属度 α 水平下的最差和最佳表现.关于模糊数的基本运算规则,可参见文献[23].关于两个模糊数大小的比较方法有多种,如基于水平集、模糊测度等[25].本文采取如下规则对模糊数进行排序:对于两个具有模糊价值的风险资产 $\tilde{X}$ 和 $\tilde{Y}$,若对于任意 $\alpha\in[0,1]$,$\tilde{X}_\alpha^L=\tilde{Y}_\alpha^L$ 且 $\tilde{X}_\alpha^U=\tilde{Y}_\alpha^U$ 成立,那么称 $\tilde{X}$ 等于 $\tilde{Y}$;若对于任意 $\alpha\in[0,1]$,$\tilde{X}_\alpha^L\geqslant\tilde{Y}_\alpha^L$ 且 $\tilde{X}_\alpha^U\geqslant\tilde{Y}_\alpha^U$ 成立,则称 $\tilde{X}$ 优于 $\tilde{Y}$,记作 $\tilde{X}\geqslant\tilde{Y}$.

定义 1[24] 假设一个投资者可由两个参数(u,λ)表示,其中:

1)u 为投资者对财富的效用函数,定义 u 是严格增的,严格凹的,在 $\mathbf{R}^+$ 到 $\mathbf{R}$ 上二次可微且满足如下正则条件:

$$u'(x)>0,\quad u''(x)<0,$$
$$\lim_{x\to0+}u'(x)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty}u'(x)=0. \tag{1}$$

2)$\lambda\in[0.5,1]$,代表投资者对于不确定性的悲观程度.

定义 2[24] 对于模糊财产 $\tilde{X}$,投资者(u,λ)的加权期望效用定义如下:

$$U_\lambda(\tilde{X})=\int_0^1[\lambda u(\tilde{X}_\alpha^L)+(1-\lambda)u(\tilde{X}_\alpha^U)]\mathrm{d}\alpha. \tag{2}$$

命题 1[24] 对于任意投资者(u,λ),U_λ 有如下性质:

1)$U_\lambda(\cdot)$ 在模糊背景下的偏好顺序“$\geqslant$”下是非降的;

2)$U_\lambda(\cdot)$ 在模糊背景下为凹函数.

2 基于不确定性证券的效用优化分析

考虑市场中存在多个证券的效用优化问题.假设存在 N 种证券,它们的价值/未来损益表现为模糊数 $\tilde{S}_i$,而当前价格为确定值 π_i,$i=1,2,\cdots,N$.一个由 N 种证券组成的投资组合向量为 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_N)^{\mathrm{T}}$,其中 $\xi_i\in\mathbf{R}$ 为第 i 种证券的单位数.那么对应地,$\boldsymbol{\xi}$ 的当前的价格和未来损益分别为 $V_0(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\pi}$ 和 $V_1(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}\cdot\tilde{\boldsymbol{S}}$,其中 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_1,\cdots,\pi_N)^{\mathrm{T}}$ 是价格向量,$\tilde{\boldsymbol{S}}=(\tilde{S}_1,\cdots,\tilde{S}_N)^{\mathrm{T}}$ 是未来损益向量.

对于一个投资者(u,λ),假设其初始财富值为 e,他希望寻求一个最优投资组合 $\boldsymbol{\xi}^*$ 以获得最优期望效用.投资者的投资预算集为

$$\mathscr{B}(e)=\{\boldsymbol{\xi}\mid V_0(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\pi}\leqslant e,(V_1(\boldsymbol{\xi}))_\alpha^L\geqslant0,\ \alpha\in[0,1]\}. \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\pi}\leqslant e$ 为关键约束,而约束$(\boldsymbol{\xi}\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^L\geqslant0$ 来自于 u 的定义域.将加权期望效用作为目标函数,得到如下规划:

$$\begin{aligned}&\max\quad U_\lambda(\boldsymbol{\xi}\cdot\tilde{\boldsymbol{S}}),\\&\text{s.t.}\quad \boldsymbol{\xi}\in\mathscr{B}(e).\end{aligned}$$

更加明确地,该规划可以改写如下:

$$(\mathrm{P1})\quad\begin{aligned}&\max:\int_0^1[\lambda u((\boldsymbol{\xi}\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^L)+\\&\qquad(1-\lambda)u((\boldsymbol{\xi}\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^U)]\mathrm{d}\alpha,\\&\text{s.t.}\quad \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\pi}\leqslant e.\end{aligned} \tag{4}$$

那么,在什么条件下(P1)将有最优解?在经典随机金融分析中,在随机财富的期望效用背景下的同样的问题在无套利条件下有最优解.现在模糊背景下提出类似的新的套利的概念.

定义 3 给定一个价格向量 $\boldsymbol{\pi}$ 和一个模糊损益向量 $\tilde{\boldsymbol{S}}$,一个投资组合 $\boldsymbol{\xi}$ 在模糊意义下是套利的,若以下 3 个条件之一成立:

1)$\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\pi}<0$,且对于任意 α,$(\boldsymbol{\xi}\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^L\geqslant0$;

2)$\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\pi}\leqslant0$,且对于任意 α,$(\boldsymbol{\xi}\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^L\geqslant0$,同时存在一个 α_0 使得$(\boldsymbol{\xi}\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_{\alpha_0}^L>0$ 成立;

3)$\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\pi}=0$,且对于任意 α,$(\boldsymbol{\xi}\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^L=0$,但存在一个 α_0 使得$(\boldsymbol{\xi}\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_{\alpha_0}^U>0$ 成立.

现对上述定义进行说明.若 $\boldsymbol{\xi}$ 满足定义 3 的 1)和 2),持有 $\boldsymbol{\xi}$ 即会带来收益,且在未来任意时刻即使在最坏情况下收益均为非负.另外有一种情况也应被视为套利,假设某一证券 A,其模糊损益为 $\tilde{a}$,α- 截集为 $\tilde{a}_\alpha=[\tilde{a}_\alpha^L,1]$,另一证券 B 的模糊损益为 $\tilde{b}$,$\tilde{b}_\alpha=[1,\tilde{b}_\alpha^U]$.显然,对于任意 $\alpha\in[0,1]$,$(\tilde{b}-\tilde{a})_\alpha^L=0$,若 A 与 B 有相同的当前价格,那么将会产生套利,因为 1 是 A 的最好价值表现,却是 B 的最差表现.命题 2 将对这类情况进行讨论.

命题 2 市场在模糊意义下无套利,当且仅当:

$$\{\boldsymbol{\xi}\mid\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\pi}\leqslant0\}\cap\{\boldsymbol{\xi}\mid(\boldsymbol{\xi}\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^L\geqslant0,$$

$\alpha \in [0,1]\} = \{\vec{0}\}$. (5)

证明 显然,当等式(5)成立时为无套利.现证明,若存在一个 $\bar{\xi}$ 使得对于任意 $\alpha \in [0,1]$,

$$\bar{\xi} \cdot \pi \leqslant 0, \quad (\bar{\xi} \cdot \tilde{S})_\alpha^L \geqslant 0 \tag{6}$$

成立,那么在无套利市场下,$\bar{\xi}$ 一定为0.

式(6)中包含了如下3种情况:

1) $\bar{\xi} \cdot \pi < 0$,对任意 $\alpha \in [0,1]$,满足 $(\bar{\xi} \cdot \tilde{S})_\alpha^L \geqslant 0$;

2) $\bar{\xi} \cdot \pi \leqslant 0$,对任意 $\alpha \in [0,1]$,满足 $(\bar{\xi} \cdot \tilde{S})_\alpha^L \geqslant 0$,但存在一个 α_0 使得 $(\bar{\xi} \cdot \tilde{S})_{\alpha_0}^L > 0$;

3) $\bar{\xi} \cdot \pi = 0$,对任意 $\alpha \in [0,1]$,满足 $(\bar{\xi} \cdot \tilde{S})_\alpha^L = 0$.

由于市场无套利,1)、2)不成立,而3)则可以推出 $(\bar{\xi} \cdot \tilde{S})_\alpha^L = (\bar{\xi} \cdot \tilde{S})_\alpha^U = 0, \alpha \in [0,1]$.因此,$\bar{\xi} \cdot \tilde{S} = 0$,此时并不是一个模糊数而是一个确定的实数,因此 $\bar{\xi}$ 必须为0.

假设1 对于任意 $i = 1, \cdots, N$, $(\tilde{S}_i)_0^L \geqslant 0$ 且存在 i_0 使得 $(\tilde{S}_{i_0})_0^L > 0$.

命题3 在假设1的条件下,(P1)有最优解当且仅当市场在模糊意义下无套利.

证明 显然,由于 u 的连续性,(P1)的目标函数关于 ξ 连续,因此若 $\mathscr{B}(e)$ 有界,那么该规划必有最优解.为此,反设 $\mathscr{B}(e)$ 无界,那么必然存在一个组合序列,记为 $\{\xi^k\}$,使得 $\xi^k \in \mathscr{B}(e)$ 且 $\|\xi^k\| \to \infty$.令 $\hat{\xi}^k = \xi^k / \|\xi^k\|$,则 $\{\hat{\xi}^k\}$ 有界,因此必然存在一个收敛的子序列 $\hat{\xi}^{l_k}$ 满足 $\hat{\xi}^{\lambda_\kappa} \to \hat{\xi}^0 (k \to \infty)$.

由 $\pi \cdot \xi^{l_k} \leqslant e$ 和 $(\xi^{l_k} \cdot \tilde{S})_\alpha^L \geqslant 0$ 可知,当 $k \to \infty$ 时 $\pi \cdot \hat{\xi}^{l_k} \leqslant e / \|\xi^{l_k}\| \to 0$ 且 $(\hat{\xi}^{l_k} \cdot \tilde{S})_\alpha^L \geqslant 0$ 成立,因此对于任意 $\alpha \in [0,1]$, $\pi \cdot \xi^0 \leqslant 0$ 和 $(\xi^0 \cdot \tilde{S})_\alpha^L \geqslant 0$ 成立.

由命题2可知,在一个无套利市场中 $\xi^0 = \vec{0}$,与给定的 $\|\xi^0\| = 1$ 矛盾.因此在无套利条件下,$\mathscr{B}(e)$ 有界,从而存在最优解.

另一方面,若市场在模糊意义下存在套利,那么由假设1可知,存在一个投资组合 $\bar{\xi}$ 使得 $\bar{\xi} \cdot \pi \leqslant 0$, $(\bar{\xi} \cdot \tilde{S})_\alpha^L > 0, \alpha \in [0,1]$ 成立,因此对于任意 $\xi \in \mathscr{B}(e)$ 和任意 $\alpha \in [0,1]$, $\xi + \bar{\xi} \in \mathscr{B}(e)$ 成立,

$((\xi + \bar{\xi}) \cdot \tilde{S})_\alpha^L > (\xi \cdot \tilde{S})_\alpha^L$ 且 $((\xi + \bar{\xi}) \cdot \tilde{S})_\alpha^U > (\xi \cdot \tilde{S})_\alpha^U$.

又由于对于任意 α, u 严格增,那么对于任意 $\xi \in \mathscr{B}(e)$, $U_\lambda((\xi + \bar{\xi}) \cdot \tilde{S}) > U_\lambda(\xi \cdot \tilde{S})$ 成立,这说明不存在最优投资组合.定理得证.

在市场无套利条件下,期望效用可在某一个投资组合 ξ^* 处达到最大.显然,ξ^* 依赖于初始财富值 e 且最大期望效用是一个关于 e 的函数,将其记为 $W(e) = U_\lambda(\xi^* \cdot \tilde{S})$.

为了更好地讨论最优解 ξ^* 的性质,在此将(P1)重新改写成一个等价形式,从而使 $u((\xi \cdot \tilde{S})_\alpha^L)$ 和 $u((\xi \cdot \tilde{S})_\alpha^U)$ 的表达式更加简洁明确.令 $\xi^+ = (\xi_1^+, \cdots, \xi_N^+)^{\mathrm{T}}$, $\xi^- = (\xi_1^-, \cdots, \xi_N^-)^{\mathrm{T}}$,其中:

$$\xi_i^+ = \frac{\xi_i + |\xi_i|}{2}, \xi_i^- = \frac{|\xi_i| - \xi_i}{2}, i = 1, \cdots, N.$$

ξ^+ 和 ξ^- 是两个非负向量,分别代表向量 ξ 的正部和负部,且满足

$$\xi = \xi^+ - \xi^-,$$

$$\xi^+ \circ \xi^- = (\xi_1^+ \xi_1^-, \cdots, \xi_N^+ \xi_N^-)^{\mathrm{T}} = \vec{0}.$$

根据正负部 ξ^+ 和 ξ^-,可以得到

$$(\xi \cdot \tilde{S})_\alpha^L = \xi^+ \cdot \tilde{S}_\alpha^L - \xi^- \cdot \tilde{S}_\alpha^U,$$

$$(\xi \cdot \tilde{S})_\alpha^U = \xi^+ \cdot \tilde{S}_\alpha^U - \xi^- \cdot \tilde{S}_\alpha^L,$$

其中 $\tilde{S}_\alpha^L = ((\tilde{S}_1)_\alpha^L, \cdots, (\tilde{S}_N)_\alpha^L)^{\mathrm{T}}$, $\tilde{S}_\alpha^U = ((\tilde{S}_1)_\alpha^U, \cdots, (\tilde{S}_N)_\alpha^U)^{\mathrm{T}}$.此时,(P1)的规划问题可以改写成如下形式:

$$(\mathrm{P1}) \quad \begin{aligned} \max: & \int_0^1 [\lambda u(\xi^+ \cdot \tilde{S}_\alpha^L - \xi^- \cdot \tilde{S}_\alpha^U) + \\ & (1-\lambda) u(\xi^+ \cdot \tilde{S}_\alpha^U - \xi^- \cdot \tilde{S}_\alpha^L)] \mathrm{d}\alpha, \\ \text{s.t.} \quad & \xi^+ \cdot \pi - \xi^- \pi \leqslant e, \\ & \xi^+, \xi^- \geqslant 0, \quad \xi^+ \circ \xi^- = \vec{0}. \end{aligned}$$

根据参考文献[24],上述优化问题可以忽略约束条件 $\xi^+ \circ \xi^- = \vec{0}$,证明方法与文献[24]类似,因此文中不再赘述.

命题4 规划问题(P1)等价于:

$$(\mathrm{P2}) \quad \begin{aligned} \max: & \int_0^1 [\lambda u(\xi^1 \cdot \tilde{S}_\alpha^L - \xi^2 \cdot \tilde{S}_\alpha^U) + \\ & (1-\lambda) u(\xi^1 \cdot \tilde{S}_\alpha^U - \xi^2 \cdot \tilde{S}_\alpha^L)] \mathrm{d}\alpha, \\ \text{s.t.} \quad & \xi^1 \cdot \pi - \xi^2 \cdot \pi = e, \\ & \xi^1 \geqslant 0, \quad \xi^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

若 ξ^* 是(P1)的最优解,那么 (ξ_+^*, ξ_-^*) 是(P2)的最优解,其中 ξ_+^*, ξ_-^* 分别为 ξ^* 的正部和负部.相反地,若 (ξ_*^1, ξ_*^2) 是(P2)的最优解,那么 $\xi_*^1 - \xi_*^2$ 为(P1)的最优解.(P1)的最优解的性质也可以在(P2)的基础上进行分析.

命题5 若 ξ^* 是(P1)的最优投资组合,那么对于 $i = 1, 2, \cdots, N$,

$$\pi_i \xi_i^* = \frac{1}{W'(e)} \int_0^1 [\lambda u'((\xi^* \cdot \tilde{S})_\alpha^L)(\tilde{S}_i \xi_i^*)_\alpha^L + (1-\lambda) u'((\xi^* \cdot \tilde{S})_\alpha^U)(\tilde{S}_i \xi_i^*)_\alpha^U] \mathrm{d}\alpha, \tag{7}$$

其中 $W'(e)$ 是 $W(e)$ 关于 e 的导数;

$$W'(e)=\frac{1}{e}\int_0^1[\lambda u'((\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^L)(\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^L+(1-\lambda)u'((\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^U)(\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^U]\mathrm{d}\alpha. \quad (8)$$

证明 若 $\xi_i^*=0$，则等式(7)显然成立. 假设 $\xi_i^*\neq0$，记(P2)的目标函数为

$$f(\boldsymbol{\xi}^1,\boldsymbol{\xi}^2)=\int_0^1[\lambda u(\boldsymbol{\xi}^1\cdot\tilde{\boldsymbol{S}}_\alpha^L-\boldsymbol{\xi}^2\cdot\tilde{\boldsymbol{S}}_\alpha^U)+(1-\lambda)u(\boldsymbol{\xi}^1\cdot\tilde{\boldsymbol{S}}_\alpha^U-\boldsymbol{\xi}^2\cdot\tilde{\boldsymbol{S}}_\alpha^L)]\mathrm{d}\alpha.$$

构造拉格朗日函数

$$L(\boldsymbol{\xi}^1,\boldsymbol{\xi}^2;\nu,\vec{\boldsymbol{\gamma}}_1,\vec{\boldsymbol{\gamma}}_2)=f(\boldsymbol{\xi}^1,\boldsymbol{\xi}^2)-\nu(\boldsymbol{\xi}^1\cdot\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{\xi}^2\cdot\boldsymbol{\pi}-e)-\vec{\boldsymbol{\gamma}}_1\cdot\boldsymbol{\xi}^1-\vec{\boldsymbol{\gamma}}_2\cdot\boldsymbol{\xi}^2.$$

令 $\boldsymbol{\xi}^*=\boldsymbol{\xi}_+^*-\boldsymbol{\xi}_-^*$，其中 $\boldsymbol{\xi}_+^*,\boldsymbol{\xi}_-^*$ 分别为其正部和负部. 设 $(\boldsymbol{\xi}_+^*,\boldsymbol{\xi}_-^*)$ 是(P2)的最优解，此时，由最优一阶条件，可以得到：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\xi_i^1}f(\boldsymbol{\xi}_+^*,\boldsymbol{\xi}_-^*)=\nu\pi_i+\gamma_{1i},\quad i=1,2,\cdots,N,\\
&\frac{\partial}{\partial\xi_i^2}f(\boldsymbol{\xi}_+^*,\boldsymbol{\xi}_-^*)=-\nu\pi_i+\gamma_{2i},\quad i=1,2,\cdots,N,\\
&(\boldsymbol{\xi}_+^*-\boldsymbol{\xi}_-^*)\cdot\boldsymbol{\pi}=e,\\
&\gamma_{1i}\xi_{i+}^*=0,\quad \gamma_{2i}\xi_{i-}^*=0,\quad \gamma_{1i}\geqslant0,\quad \gamma_{2i}\geqslant0,\\
&\quad i=1,2,\cdots,N.
\end{aligned}\quad (9)$$

由积分和求导的可交换性，可得：

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i^1}f(\boldsymbol{\xi}^1,\boldsymbol{\xi}^2)=\int_0^1[\lambda u'(\boldsymbol{\xi}^1\cdot\tilde{\boldsymbol{S}}_\alpha^L-\boldsymbol{\xi}^2\cdot\tilde{\boldsymbol{S}}_\alpha^U)(\tilde{S}_i)_\alpha^L+(1-\lambda)u'(\boldsymbol{\xi}^1\cdot\tilde{\boldsymbol{S}}_\alpha^U-\boldsymbol{\xi}^2\cdot\tilde{\boldsymbol{S}}_\alpha^L)(\tilde{S}_i)_\alpha^U]\mathrm{d}\alpha,$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i^2}f(\boldsymbol{\xi}^1,\boldsymbol{\xi}^2)=-\int_0^1[\lambda u'(\boldsymbol{\xi}^1\cdot\tilde{\boldsymbol{S}}_\alpha^L-\boldsymbol{\xi}^2\cdot\tilde{\boldsymbol{S}}_\alpha^U)(\tilde{S}_i)_\alpha^U+(1-\lambda)u'(\boldsymbol{\xi}^1\cdot\tilde{\boldsymbol{S}}_\alpha^U-\boldsymbol{\xi}^2\cdot\tilde{\boldsymbol{S}}_\alpha^L)(\tilde{S}_i)_\alpha^L]\mathrm{d}\alpha.$$

将其代入式(9)中的第一、二个等式得到：

$$\int_0^1[\lambda u'((\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^L)(\tilde{S}_i)_\alpha^L+(1-\lambda)u'((\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^U)(\tilde{S}_i)_\alpha^U]\mathrm{d}\alpha=\nu\pi_i+\gamma_{1i}, \quad (10)$$

$$\int_0^1[\lambda u'((\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^L)(\tilde{S}_i)_\alpha^U+(1-\lambda)u'((\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^U)(\tilde{S}_i)_\alpha^L]\mathrm{d}\alpha=\nu\pi_i-\gamma_{2i}. \quad (11)$$

将其分为两种情况进行讨论：

1）若 $\xi_{+i}^*>0$，那么 $\gamma_{1i}=0,\xi_{-i}^*=0$ 且 $\xi_i^*=\xi_{+i}^*>0$ 成立，则：

$$\int_0^1[\lambda u'((\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^L)(\tilde{S}_i)_\alpha^L+(1-\lambda)u'((\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^U)(\tilde{S}_i)_\alpha^U]\mathrm{d}\alpha=\nu\pi_i,$$

$$\int_0^1[\lambda u'((\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^L)(\tilde{S}_i\xi_i^*)_\alpha^L+(1-\lambda)u'((\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^U)(\tilde{S}_i\xi_i^*)_\alpha^U]\mathrm{d}\alpha=\nu\pi_i\xi_i^*.$$

2）若 $\xi_{-i}^*>0,\gamma_{2i}=0,\xi_{+i}^*=0$ 且 $\xi_i^*=-\xi_{-i}^*<0$，则：

$$\int_0^1[\lambda u'((\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^L)(\tilde{S}_i)_\alpha^U+(1-\lambda)u'((\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^U)(\tilde{S}_i)_\alpha^L]\mathrm{d}\alpha=\nu\pi_i,$$

$$\int_0^1[\lambda u'((\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^L)(\tilde{S}_i\xi_i^*)_\alpha^L+(1-\lambda)u'((\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^U)(\tilde{S}_i\xi_i^*)_\alpha^U]\mathrm{d}\alpha=\nu\pi_i\xi_i^*.$$

综合以上两种情况，即可得到：

$$\pi_i\xi_i^*=\frac{1}{\nu}\int_0^1[\lambda u'((\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^L)(\tilde{S}_i\xi_i^*)_\alpha^L+(1-\lambda)u'((\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^U)(\tilde{S}_i\xi_i^*)_\alpha^U]\mathrm{d}\alpha.$$

由 $\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\xi}^*=e$ 即可得到 ν 的表达式：

$$\nu=\frac{1}{e}\int_0^1[\lambda u'((\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^L)(\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^L+(1-\lambda)u'((\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^U)(\boldsymbol{\xi}^*\cdot\tilde{\boldsymbol{S}})_\alpha^U]\mathrm{d}\alpha. \quad (12)$$

在(P2)的规划中，e 只存在于第一个约束条件"$\boldsymbol{\xi}^1\cdot\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{\xi}^2\cdot\boldsymbol{\pi}=e$"中. 由包络定理[26]可知，在该约束条件中 $W'(e)$ 与乘数 ν 相等.

3 数值算例

假设存在3种模糊资产，其当前价格分别为5/4，7/4，5/2，未来损益分别为 $\tilde{a}=(1,3/2,2,5/2)$，$\tilde{b}=(3/2,7/4,2,7/3)$，$\tilde{c}=(2,11/4,3,7/2)$，其中梯形模糊数 $\tilde{X}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的 α-截集为

$$\tilde{X}_\alpha=[x_1+(x_2-x_1)\alpha,x_4-(x_4-x_3)\alpha].$$

令某一投资者的效用函数为 $u(x)=1-e^{-x}$，悲观度 $\lambda=0.8$，初始财富值 $e=10$. 由于效用函数的特殊性，对 $\tilde{X}$ 的加权期望效用的积分计算结果如下：

$$U_\lambda(\tilde{X})=1+\frac{\lambda}{x_2-x_1}(e^{-x_2}-e^{-x_1})-\frac{1-\lambda}{x_4-x_3}(e^{-x_3}-e^{-x_4}).$$

将其代入(P1)和(P2)，最优投资组合即为如下规划的解：

$$\begin{aligned}
\max:&1+0.8\times[\exp(-3\xi_1^+/2+2\xi_1^--7\xi_2^+/4+\\
&2\xi_2^--11\xi_3^+/4+3\xi_3^-)-\exp(-\xi_1^++\\
&5\xi_1^-/3-3\xi_2^+/2+7\xi_2^-/3-2\xi_3^++\\
&7\xi_3^-/2)]\div(\xi_1^+/2+\xi_1^-/2+\xi_2^+/4+\\
&\xi_2^-/3+3\xi_3^+/4+\xi_3^-/2),\\
&-0.2\times[\exp(-2\xi_1^++3\xi_1^-/2-2\xi_2^++\\
&7\xi_2^-/4-3\xi_3^++11\xi_3^-/4)-\\
&\exp(-5\xi_1^+/2+\xi_1^--7\xi_2^+/3+\\
&3\xi_2^-/2-7\xi_3^+/2+2\xi_3^-)]\div
\end{aligned}$$

$$(\xi_1^+/2 + \xi_1^-/2 + \xi_2^+/3 + \xi_2^-/4 + \xi_3^+/2 + 3\xi_3^-/4),$$

$$\text{s.t.}\quad 7(\xi_1^+ - \xi_1^-)/4 + 15(\xi_2^+ - \xi_2^-)/8 + 23(\xi_3^+ - \xi_3^-)/8 = 1\ 000,$$

$$\xi_1^+, \xi_1^-, \xi_2^+, \xi_2^-, \xi_3^+, \xi_3^- \geqslant 0.$$

通过 Matlab 计算得到最优投资组合如下:

$$(\xi_1^+, \xi_1^-, \xi_2^+, \xi_2^-, \xi_3^+, \xi_3^-) = (3.568\ 9, 0, 1.194\ 3, 0, 1.379\ 6, 0),$$

再结合 $\boldsymbol{\xi}^* \cdot \tilde{S}$ 和 u' 的表达式,等式(7) 中的结果即得到验证.

4 小结

本文提出了一个在市场受到不确定信息影响时的期望效用模型.通过加权评估的方法来构造模糊财富背景下的期望效用,从而利用加权期望效用模型来解决传统的效用优化问题.为了研究最优投资组合的存在性,本文提出了在模糊意义下的无套利的概念,并证明了市场存在最优投资组合当且仅当市场无套利并给出了最优投资组合的一些性质,如可通过最优投资组合推导出基本资产的当前价格等.

本文对希望效用优化问题得出了确切的结论,这一结论可进一步用于研究基于效用最大化的具有模糊收益的资产定价问题.

参考文献
References

[1] Buckley J. The fuzzy mathematics of finance[J]. Fuzzy Sets & Systems, 1987, 21(3): 257-273
[2] Wu H C. Pricing European options based on the fuzzy pattern of Black-Scholes formula[J]. Computers & Operations Research, 2004, 31(7): 1069-1081
[3] Wu H C. Using fuzzy sets theory and Black-Scholes formula to generate pricing boundaries of European options[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 185(1): 136-146
[4] Zhang L H, Zhang W G, Xu W L, et al. The double exponential jump diffusion model for pricing European options under fuzzy environments[J]. Economic Modelling, 2012, 29(3): 780-786
[5] Guerra M, Sorini L, Stefanini L. Option price sensitivities through fuzzy numbers[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2011, 61(3): 515-526
[6] Thavaneswaran A, Appadoo S, Frank J. Binary option pricing using fuzzy numbers[J]. Applied Mathematics Letters, 2013, 26(1): 65-72
[7] Nowak P, Romaniuk M. Application of Levy processes and Esscher transformed martingale measures for option pricing in fuzzy framework[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014, 263(1): 129-151
[8] Huang X. A new perspective for optimal portfolio selection with random fuzzy returns[J]. Information Sciences, 2007, 177(23): 5404-5414
[9] He C L, Xu Q. Portfolio choice under the mean-variance model with parameter uncertainty[J]. Journal of Donghua University, 2015, 32(3): 498-503
[10] Zhang W G, Liu Y J, Xu W J. A new fuzzy programming approach for multi-period portfolio optimization with return demand and risk control[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2014, 246(1): 107-126
[11] Muzzioli S, Torricelli C. A multiperiod binomial model for pricing options in a vague world[J]. Journal of Economic Dynamics & Control, 2004, 28(5): 861-887
[12] Yoshida Y, Yasuda M, Nakagami J, et al. A new evaluation of mean value for fuzzy numbers and its application to American put option under uncertainty[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(19): 2614-2626
[13] Yoshida Y. The valuation of European options in uncertain environment[J]. European Journal of Operational Research, 2003, 145(1): 221-229
[14] Xu W D, Wu C F, Xu W J, et al. A jump-diffusion model for option pricing under fuzzy environments[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2009, 44(3): 337-344
[15] Chen J Y, Li Z, Zhang J H. Risk assessment mode of sale-leaseback: Based on fuzzy analytic hierarchy process[J]. Journal of Donghua University, 2013, 30(4): 343-348
[16] Yalcin N, Bayrakdaroglu A, Kahraman C. Application of fuzzy multi-criteria decision making methods for financial performance evaluation of Turkish manufacturing industries[J]. Expert Systems with Applications, 2012, 39(1): 350-364
[17] Kaur G, Dhar J, Guha R K. A hybrid approach to forecast stock market index[J]. International Journal of Artificial Intelligence and Soft Computing, 2015, 5(2): 165-176
[18] Yang C C, Leu Y, Lee C P. A dynamic weighted distance-based fuzzy time series neural network with bootstrap model for option price forecasting[J]. Romanian Journal for Economic Forecasting, 2014, 17(2): 115-129
[19] Dash R, Dash P K, Bisoi R. A differential harmony search based hybrid interval type2 fuzzy EGARCH model for stock market volatility prediction[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2015, 59(C): 81-104
[20] Zhu Q X, Wang J X. Stabilization of CSTR with self-tuning sliding mode controller using TS fuzzy linearization[J]. Journal of Donghua University, 2013, 30(4): 287-292
[21] Follmer H, Schied A. Stochastic finance: An introduction in discrete time[M]. Berlin: Walter de Gruyter, 2011
[22] Karatzas K, Kou S G. On the pricing of contingent claims under constraints[J]. Annals of Applied Probability, 1996, 6(2): 321-369
[23] Carmona R. Indifference pricing: Theory and applications[M]. Princeton: Princeton University Press, 2009
[24] You S R, Lei Q. Analysis of expected utility toward fuzzy wealth and applications in portfolio selection[J]. Pro-

ceedings of Eighth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery,2011:791-795
[25] Wang X Z,Kerre E E.Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I, II) [J]. Fuzzy Sets and Systems,2001,18(3):375-405
[26] Carter M. Foundations of mathematical economics [M]. Cambridge:MIT Press,2001

Analysis of expected utility maximization on securities with fuzzy valued payoffs

YOU Surong[1] XU Jing[1]
1 College of Science,Donghua University,Shanghai 201620

Abstract The problem of maximizing the expected utility is analyzed in a market,where assets are modeled by their fuzzy valued payoffs.The weighted expected utility model is used for analysis and discussion.A concept of arbitrage in fuzzy sense is proposed.It is proved that the optimal portfolio exists if and only if the market has no arbitrage in fuzzy sense.Properties on the optimal portfolio are discussed,among which current prices of assets can be expressed by the optimal portfolio.
Key words utility maximization;weighted expected utility;fuzzy number