DOI:10.13878/j.cnki.jnuist.2016.05.012

昝立博[1]

唯一强 Clean 群环

摘要

环称为唯一强 clean 是指每一个元素都可唯一的表示为可交换的幂等元与单位元的和.主要讨论唯一强 clean 群环的结构,证明了如果群 G 是局部有限群,则群环 RG 是唯一强 clean 环当且仅当环 R 是唯一强 clean 环,群 G 是 2-群.

关键词

群环;clean 环;强 clean 环;唯一强 clean 环;唯一 clean 环

中图分类号 O153

文献标志码 A

收稿日期 2015-04-21

资助项目 江苏省自然科学青年基金(BK20130983)

作者简介

昝立博,女,博士,讲师,主要研究方向为代数学.zanlibo@ nuist.edu.cn

1 南京信息工程大学 数学与统计学院,南京,210044

0 引言

本文中 R 表示具有非零单位元的环,且其子环与 R 具有相同的单位元.本文用 C_n 表示 n 阶循环群,Z 表示整环,Z_n 表示模 n 的剩余类环.记 $J(R)$ 为 R 的雅各布森根,$T_n(R)$ 代表 R 的上三角矩阵组成的集合.群 G 中元素 g 的阶记为 $o(g)$,RG 表示系数环是 R 的群环,群环的性质参见文献[1].称群 G 为挠群指的是 G 中每个元素都是有限阶的.设 p 为素数,称群 G 中元素 g 为 p-挠元是指 $o(g)=p^k(k\geqslant 0)$,如果群 G 中每个元素都是 p-挠元,则称 G 为 p-群[2].

称环 R 为 clean 环,如果 R 中每一个元都可写为幂等元与单位元的和.称环 R 为强 clean 环,如果 R 中每一个元都可写为可交换的幂等元与单位元的和.称环 R 为唯一 clean 环,如果 R 中每一个元都可唯一写为幂等元与单位元的和.对于环的唯一 clean 性,文献[3]讨论了交换情形,文献[4-5]研究了非交换情形.文献[6]讨论了一类介于强 clean 环与唯一 clean 环之间的重要的环:唯一强 clean 环.如果环 R 中每一个元都可唯一写为可交换的幂等元与单位元的和,称 R 为唯一强 clean 环.

由唯一强 clean 环的定义,可直接得下面的引理.

引理 1[6] 设 R 和 R_i 是环,则下列结论成立:1) 直积 ΠR_i 是唯一强 clean 环当且仅当每一个 R_i 是唯一强 clean 环;2) 对任意 $n>1$,$n\times n$ 矩阵环不是唯一强 clean 环;3) R 是唯一 clean 环当且仅当 R 是唯一强 clean 环,且 R 的幂等元都是中心元;4) 设 R 是交换环且 $n\geqslant 1$,则 $T_n(R)$是唯一强 clean 环当且仅当 R 是唯一强 clean 环;5) R 是局部的唯一强 clean 环当且仅当 R 是唯一 clean 环当且仅当$\dfrac{R}{J(R)}\cong Z_2$.

利用引理 1,下面的结论显然成立:唯一 clean 环⇒唯一强 clean 环⇒强 clean 环⇒clean 环,反之不正确,对任意素数 p,$M_2(Z(p))$是 clean 环但不是强 clean 环,$M_2(Z_p)$是强 clean 环但不是唯一强 clean 环(由引理 1 结论 2)),$T_2(Z_2)$是唯一强 clean 环(由引理 1 结论 3))但不是唯一 clean 环(因为幂等元不是中心元).

引理 2(文献[6]定理 17) 下列对环 R 的叙述等价:1) R 是唯一强 clean 环;2) $R/J(R)$是布尔环,且若 $a^2-a\in J(R)$则存在唯一幂等元 $e\in R$ 使得 $ae=ea$,$a-e\in J(R)$;3) 对任意 $a\in R$,则存在唯一幂等元 $e\in R$ 使得 $ae=ea$,$a-e\in J(R)$.

1 主要结果

本文主要讨论唯一强 clean 群环的性质.

例 1 如果 $n\geqslant 3$ 是奇数,则 Z_2C_n 是强 clean 环但不是唯一强 clean 环.

证明 由 文献[7]命题 24,Z_2C_n 是 clean 环.因为它是交换的,所以它是强 clean 环.于是 Z_2C_n 不是唯一强 clean 环,否则,由 Z_2C_n 是交换的知它是唯一 clean 环,这与文献[4]例 3 矛盾.

易证如果环 S 是唯一强 clean 环,则 S 的子环 R 也是唯一强 clean 环.

集合 X 的一族子集$\{X_i\mid i\in I\}$称为 X 的直覆盖,如果对任意 $i,j\in I$,$X=\cup_{i\in I}X_i$,且存在 $k\in I$ 使得$X_i\cup X_j=X_k$.如果群(环)的每个有限生成子群(子环)是有限的,称群(环)为局部有限的,如有限群(有限环).显然局部有限群(局部有限环)可由它的有限群(有限环)直覆盖.

引理 3 设 R 是环,G 是群. 若 $R=\cup_{i\in I}R_i$ 和 $G=\cup_{i\in I}G_i$ 分别由子环和子群直覆盖,且对任意 i,j,R_iG_j 是强 clean 环(唯一强 clean 环),则 RG 是强 clean 环(唯一强 clean 环).

证明 设 $r\in RG$,则对某 i,j,有 $r\in R_iG_j$,于是 r 是 R_iG_j 中的强 clean 元,因此也是 RG 中的强 clean 元.假设 $r=e+u=f+v$,其中 $eu=ue$,$fv=vf$,$e^2=e$,$f^2=f$,u,v 是 RG 中的单位,那么 r,e,f,u,u^{-1},v,v^{-1}都在某个 R_kG_s 中,由 R_kG_s 是唯一强 clean 环得 $e=f$,$u=v$.

定理 1 如果群环 RG 是唯一强 clean 环,则环 R 是唯一强 clean 环且群 G 是 2-群.

证明 由引理 1 结论 1),R 是唯一强 clean 环,于是 $R/J(R)$是布尔环,那么 Z_2 是 R 的像,因此 Z_2G 是唯一强 clean 环.由引理 3 知 Z_2G 是唯一 clean 环,所以利用文献[4]定理 5 得 G 是 2-群.

推论 1 设 D 是除环,G 是局部有限群,则 DG 是唯一强 clean 环当且仅当 $D\cong Z_2$,G 是 2-群.

证明 设 DG 是唯一强 clean 环,则 D 也是唯一强 clean 环,G 是 2-群,又 D 是局部环,于是由引理 2 知 $D\cong Z_2$.反过来,由文献[4]推论 8 知 DG 是唯一 clean 环,因此为唯一强 clean 环.

引理 4(文献[4]引理 10) 设 $\dfrac{R}{J(R)}$是布尔环,G 是局部有限 2-群,且 $\omega:RG\to R$ 是增广同态,那么 $J(RG)=\{x\in RG\mid \omega(x)\in J(R)\}$.

定理 2 设 G 是局部有限群,则 RG 是唯一强 clean 环当且仅当 R 是唯一强 clean 环,G 是 2-群.

证明 设 RG 是唯一强 clean 环,由定理 1 可得结论.反过来,令 $\omega:RG\to R$ 是增广同态,对每个 $x\in RG$,由 $\omega(x)\in R$ 及 R 是唯一强 clean 环知,存在唯一 $e^2=e\in R$ 使得 $\omega(x)-e\in J(R)$,其中 $xe=ex$.因此 $\omega(x-e)=\omega(x)-e\in J(R)$,$\omega(x)e=\omega(xe)=\omega(ex)=e\omega(x)$.因为 G 是局部有限的,由引理 4 知 $x-e\in J(RG)$,故 RG 是唯一强 clean 环.

参考文献
References

[1] Conell I G.On the group ring[J].Canadian Journal of Mathematics,1963,15:650-658
[2] Kegel O H,Wehrfritz B A F.Locally finite groups[M].Amsterdam:North Holland Publishing Co.,1973
[3] Anderson D D,Camillo V P.Commutative rings whose elements are a sum of a unit and a idempotent[J].Communications in Algebra,2002(30):3327-3336
[4] Nichoson W K,Zhou Y Q.Rings in which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit[J].Glasgow Mathematical Journal,2004,46(2):215-223
[5] Nicholson W K,Zhou Y Q.Clean general rings[J].Journal of Algebra,2005,291(1):297-311
[6] Chen J L,Wang Z,Zhou Y Q.Rings in which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit that commute[J].Journal of Pure and Applied Algebra,2009,213(2):215-223
[7] Chen J L,Nicholson W K,Zhou Y Q.Group rings in which every element is uniquely the sum of a unit and an idempotent[J].Journal of Algebra,2006,306(2):453-460

Uniquely strongly clean group rings

ZAN Libo[1]
1 School of Mathematics & Statistics,Nanjing University of Information Science & Technology,Nanjing 210044

Abstract A ring is called uniquely strongly clean if every element is uniquely the sum of an idempotent and a unit that commute.The structure of uniquely strongly clean group rings is studied in this paper.It is proved that if G is a locally finite group,then group ring RG is uniquely strongly clean if and only if R is uniquely strongly clean and G is a 2-group.
Key words group ring;clean ring;strongly clean ring;uniquely strongly clean ring;uniquely clean ring