DOI:10.13878/j.cnki.jnuist.2016.05.006

陈求新[1]　时正华[1]

基于 Markovian 切换的时滞回归神经网络 Lagrange 全局均方指数稳定

摘要

对一类激励函数是 Lurie 型(包括有界和无界激励函数)的具有 Markovian 切换的时滞回归神经网络的 Lagrange 全局均方指数稳定性进行了研究,得到了回归神经网络在 Markovian 切换状态下的 Lagrange 全局均方指数稳定的充分判据,并通过数值例子验证了所得结论的正确性和有效性.

关键词

Markovian 切换;时滞回归神经网络;均方指数稳定;Lagrange 一致稳定;全局指数吸引

中图分类号 TP273

文献标志码 A

收稿日期 2016-01-14

资助项目 中央高校基本科研业务费青年教师科研创新能力培育项目(2015B19814)

作者简介

陈求新,男,硕究生,主要从事随机神经网络稳定性研究.1538084067@qq.com

1 河海大学 理学院,南京,211100

0 引言

近年来,回归神经网络已经在许多领域得到了广泛的应用,比如,控制、信号处理等方面,因此,回归神经网络稳定性理论分析也越来越被许多学者所关注[1-5].从动力系统的角度来说,神经网络稳定性分为单稳定性和多稳定性,而多稳定性更普遍,更能反映神经网络的本质特征.众所周知,有界性、吸引性和完全收敛性是多稳神经网络的3个基本性质,而 Lagrange 稳定研究的就是解的有界性和全局吸引集的存在性.因此,在廖晓昕等[6]首次提出回归神经网络的 Lagrange 稳定性概念之后,许多研究者都对确定性的神经网络的 Lagrange 稳定进行了研究[7-12].但是,现实的应用中,神经网络会不可避免地出现随机性的故障,或者由于其他外部因素导致参数配置(联接权值或阈值)突然改变,从一组参数切换到另一组参数,此类现象可以通过 Markovian 切换来模拟.具有 Markovian 切换的时滞回归神经网络模型由下面的非线性微分方程组描述:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=&-\boldsymbol{D}(r(t))\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}(r(t))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))+\\&\boldsymbol{B}(r(t))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))+\boldsymbol{U}(r(t)),\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}}$ 表示神经元在时刻 t 的状态变量,n 表示神经网络中神经元的个数,$\tau(t)>0$ 表示有界时滞函数,$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}\{d_1(l),d_2(l),\cdots,d_n(l)\}$,$d_i(l)>0$,$\boldsymbol{A}(l)=(a_{ij}(l))_{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}(l)=(b_{ij}(l))_{n\times n}$ 表示联接权值矩阵,$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^{\mathrm{T}}$ 表示激励函数,$\boldsymbol{U}(l)=(u_1(l),u_2(l),\cdots,u_n(l))^{\mathrm{T}}$ 表示外部常输入,$r(t)(t\geqslant 0)$ 是完备概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}\}_{t\geqslant 0},P)$上取值有限的右连续的马尔可夫(Markovian)链.

虽然,具有 Markovian 切换的时滞回归神经网络的单稳定性也已被人们广泛研究[3-15],但是,对于其多稳定性的研究甚少.因此,在文献[6]的基础上,本文定义具有马尔可夫链的回归神经网络的 Lagrange 稳定的概念,给出一个 Lagrange 均方全局指数稳定的充分判据,推广了 Lagrange 稳定的概念,并且拓展了文献[6]中定理 4.1 的结果.

1 预备知识

本文考虑一类满足如下条件的激励函数(Lurie 型):

$F=\{\boldsymbol{f}(\cdot)\mid \exists \mathscr{k}_i>0, 0\leqslant x_if_i\leqslant \mathscr{k}_i x_i^2, \forall x_i\in\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n\}$. 记 $\boldsymbol{K}=\mathrm{diag}\{\mathscr{k}_1,\mathscr{k}_2,\cdots,\mathscr{k}_n\}$, $\lambda_{\min}\{\boldsymbol{A}\}$, $\lambda_{\max}\{\boldsymbol{A}\}$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小和最大特征值.矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的算子范数定义为 $\|\boldsymbol{A}\|=\sup\{|\boldsymbol{Ax}|:|\boldsymbol{x}|=1\}$,向量 $\boldsymbol{x}$ 的范数为 Euclid 范数,表示为 $|\boldsymbol{x}|$.记 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\overline{a}_{ij})_{n\times n}$,其中 $\overline{a}_{ij}=a_{ij}(i\neq j)$, $\overline{a}_{ii}=\max\{a_{ii},0\}$, $i=1,\cdots,n$.时滞函数 $\tau(t)$ 的的最大值为 $\tau_{\max}$. C 表示连续函数空间 $\boldsymbol{\varphi}:[-\tau_{\max},0]\to\mathbf{R}^n$,定义 C 中的范数 $\|\boldsymbol{\varphi}\|=\sup_{s\in[-\tau_{\max},0]}|\boldsymbol{\varphi}(s)|$,其子集 $C_H=\{\boldsymbol{\varphi}\in C;\|\boldsymbol{\varphi}\|\leqslant H\}$, H 是给定的正数.集 Φ 表示所有非负连续泛函 $\mathscr{K}:C\to[0,\infty)$ 的全体. $D^+f(s)$ 表示函数 f 的右上狄尼导数.马尔可夫链 $r(t)(t\geqslant 0)$ 在有限状态 $\mathscr{M}=\{1,2,\cdots,N\}$ 上取值,其生成矩阵 $\mathscr{R}=(\gamma_{ij})_N\times N$ 满足:

$$P\{r(t+\Delta)=j\mid r(t)=i\}=\begin{cases}\gamma_{ij}\Delta+o(\Delta), & i\neq j,\\ 1+\gamma_{ij}\Delta+o(\Delta), & i=j,\end{cases}$$

其中 $\Delta>0$,当 $i\neq j$ 时, $\gamma_{ii}=-\sum_{i\neq j}\gamma_{ij}<0$.

定义 1 系统(1)是在均方意义下 Lagrange 一致稳定的(一致有界的),如果对任意的 $H>0$,存在一个常数 $\mathscr{K}=\mathscr{K}(H)>0$,使得对任意的 $\boldsymbol{\varphi}\in C_H$,有 $E|\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\varphi})|^2<\mathscr{K}, t\geqslant 0$. $E(\cdot)$ 表示期望.

定义 2 如果存在一个径向无界正定函数 $V(\boldsymbol{x},l)$, $l\in\mathscr{M}$,一个连续泛函 $\mathscr{K}\in\Phi$,和正常数 β,ξ,使得系统(1)的任意解 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{\varphi})$, $t\geqslant 0$,有

$$EV(\boldsymbol{x}(t),l)-\beta\leqslant\mathscr{K}(\boldsymbol{\varphi})\exp\{-\xi t\},$$

则系统(1)是关于 V 在均方意义下全局指数稳定的.闭集 $\boldsymbol{\Theta}:=\cup_{l\in\mathscr{M}}\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid V(\boldsymbol{x},l)\leqslant\beta\}$ 称为全局指数吸引集,简称 GEA 集.

定义 3 称系统(1)在 Lagrange 意义下是全局均方指数稳定的,如果它既是在均方意义下 Lagrange 一致稳定的,又是全局指数吸引的.

注 1 当 $\mathscr{M}=\{1\}$,系统(1)退化成确定性系统,关于系统(1)的 Lagrange 稳定的定义 1,定义 2 和定义 3 分别变成文献[6]中的定义 2.1,定 义 2.3 和定义 2.5.因此,以上 3 个定义是对传统的确定性系统 Lagrange 稳定概念的推广.

引理 1 设 $\boldsymbol{x}(t)\in([-\tau_{\max},\infty),\mathbf{R}^n)$ 是 $\mathscr{F}_t$ 可测函数,如果存在 $V\in C(\mathbf{R}^n\times\mathscr{M},\mathscr{R}^+)$, $\alpha_1>\alpha_2>0$, $\beta\geqslant 0$,使得 $\forall t\geqslant 0$,满足下面的不等式:

$$D^+EV(\boldsymbol{x}(t),r(t))\leqslant\alpha_1EV(\boldsymbol{x}(t),r(t))+\alpha_2\sup_{-\tau_{\max}\leqslant\theta\leqslant 0}EV(\boldsymbol{x}(t+\theta),r(t+\theta))+\beta,\tag{2}$$

则 $\forall t\geqslant 0$ 有

$$EV(\boldsymbol{x}(t),r(t))\leqslant EV(\boldsymbol{x}(0),r(0))\exp\{-\xi t\}+\beta(\alpha_1-\alpha_2)^{-1},\quad t\geqslant 0,\tag{3}$$

其中 $\xi=\min_{1\leqslant l\leqslant N}\sup\{\xi(l)>0,\alpha_1-\alpha_2\exp\{\xi(l)\tau_{\max}-\xi(l)>0\}$.

证明 反证法.令 $W(t)=EV(x(t),r(t))-\beta(\alpha_1-\alpha_2)^{-1}$, $H(t)=EV(\boldsymbol{x}(0),r(0))\exp\{-\xi t\}$.假设式(3)不成立,则存在 $t^*\in[0,\infty)$, $t^*=\sup\{t\mid W(t)\leqslant H(t)\}$ 使得

$$\begin{cases}W(t^*)=H(t^*), & (4)\\ D^+W(t^*)\geqslant D^+H(t^*), & (5)\end{cases}$$

则对任意的 $\bar{\xi}\in(0,\xi)$,我们有

$$D^+W(t^*)=D^+EV(x(t^*),r(t^*))\leqslant$$
$$-\alpha_1EV(\boldsymbol{x}(t^*),r(t^*))+\alpha_2\sup_{-\tau_{\max}\leqslant\theta\leqslant 0}EV(\boldsymbol{x}(t^*+\theta))+\beta\leqslant$$
$$EV(\boldsymbol{x}(0),r(0))\Big(-\alpha_1(\exp\{-\bar{\xi}t^*\}+\beta(\alpha_1-\alpha_2)^{-1})+$$
$$\alpha_2(\exp\{-\bar{\xi}(t^*-\tau_{\max})\}+\beta(\alpha_1-\alpha_2)^{-1})\Big)+\beta=$$
$$(-\alpha_1+\alpha_2\exp\{\bar{\xi}\tau_{\max}\})EV(\boldsymbol{x}(0),r(0))\exp\{-\bar{\xi}t^*\}<$$
$$-\bar{\xi}EV(\boldsymbol{x}(0),r(0))\exp\{-\bar{\xi}t^*\}=D^+H(t^*).$$

这与式(5)矛盾,所以假设不成立.令 $\bar{\xi}\to\xi$ 则引理得证.

2 Lagrange 稳定性判据

下面将运用引理 1 给出系统(1)的 Lagrange 稳定性判据.

定理 1 设 $f(\cdot)\in F$.对任意的 $l\in\mathscr{M}$,如果存在正定矩阵 $\boldsymbol{P}(l)$ 和正定对角阵 $\boldsymbol{Q}(l)=\mathrm{diag}\{q_1(l),\cdots,q_n(l)\}$,使得

$$\boldsymbol{G}(l)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{G}_{11}(l) & \boldsymbol{G}_{12}(l)\\ \boldsymbol{G}_{12}^{\mathrm{T}}(l) & \boldsymbol{G}_{22}(l)\end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

是正定矩阵,则系统(1)在 Lagrange 意义下全局均方指数稳定,且 $\boldsymbol{\Theta}=\cup_{l\in\mathscr{M}}\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\,\middle|\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(l)\boldsymbol{x}+2\sum_{i=1}^{n}q_i(l)\int_0^{x_i}f_i(y)\mathrm{d}y\leqslant\beta(\alpha_1-\alpha_2)^{-1}\right\}$ 是系统(1)的 GEA 集,其中

$$\boldsymbol{G}_{11}(l)=\boldsymbol{P}(l)\boldsymbol{D}(l)+\boldsymbol{D}(l)\boldsymbol{P}(l)-\sum_{k=1}^{N}\gamma_{lk}\boldsymbol{P}(k)-\sum_{k=1}^{N}\bar{\gamma}_{lk}\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{K},$$
$$\boldsymbol{G}_{12}(l)=-\boldsymbol{P}(l)(\boldsymbol{A}(l)+\boldsymbol{B}(l)),$$
$$\boldsymbol{G}_{22}(l)=\boldsymbol{Q}(l)(\boldsymbol{D}(l)\boldsymbol{K}^{-1}-\boldsymbol{A}(l)-\boldsymbol{B}(l))+(\boldsymbol{D}(l)\boldsymbol{K}^{-1}-\boldsymbol{A}(l)-\boldsymbol{B}(l))\boldsymbol{Q}(l),$$

$$\bar{\gamma}_{lk}=\begin{cases}\gamma_{lk}, l\neq k,\\ \gamma_{ll}, l=k, & \boldsymbol{Q}(k)\text{ 独立于 }k,\\ 0, \ l=k, & \boldsymbol{Q}(k)\text{ 依赖于 }k.\end{cases}$$

$$\delta=2^{-1}\min_{1\leqslant l\leqslant N}\lambda_{\min}\left\{\begin{pmatrix}\boldsymbol{G}_{11}(l)-\varepsilon_1(l)\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{G}_{12}(l)\\ \boldsymbol{G}_{12}^{\mathrm{T}}(l) & \boldsymbol{G}_{22}(l)-\varepsilon_2(l)\boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}_{2n\times 2n}\right\},$$

$\alpha_1=\delta c_2^{-1}$, $\alpha_2=\delta^{-1}\eta\tau_{\max}^2 c_1^{-1}$,
$c_1=\min_{1\leqslant l\leqslant N}\lambda_{\min}\{\boldsymbol{P}(l)\}$, $c_2=\max_{1\leqslant l\leqslant N}(\|\boldsymbol{P}(l)\|+\|\boldsymbol{Q}(l)\|\ \|\boldsymbol{K}\|)$,

$$\eta=(1+\mu)\left(\max_{1\leqslant l\leqslant N}\|\boldsymbol{D}(l)\|+\max_{1\leqslant l\leqslant N}(\|\boldsymbol{A}(l)\|\ \|\boldsymbol{K}\|)+\max_{1\leqslant l\leqslant N}(\|\boldsymbol{B}(l)\|\ \|\boldsymbol{K}\|)\right)^2\cdot\max_{1\leqslant l\leqslant N}\left(\|\boldsymbol{P}(l)\boldsymbol{B}(l)\|^2+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{Q}(l)\boldsymbol{B}(l)\|^2\right),$$

$$\beta=\max_{1\leqslant l\leqslant N}(\varepsilon_1^{-1}(l)\|\boldsymbol{P}(l)\|^2+\varepsilon_2^{-1}(l)\|\boldsymbol{Q}(l)\|^2+(1+\mu)\mu^{-1}\tau_{\max}^2)\max_{1\leqslant l\leqslant N}|\boldsymbol{U}(l)|^2,$$

$\boldsymbol{E}_n$ 为 n 阶单位阵,$\varepsilon_1(l)$,$\varepsilon_2(l)$,μ 是使得 $\alpha_1>\alpha_2>0$ 的任意正常数.

证明 因对任意 $l\in\mathscr{M}$,$\boldsymbol{G}(l)$ 是正定矩阵,由矩阵对其变元的连续依赖性,则存在 $\varepsilon_1(l)$,$\varepsilon_2(l)>0$,使得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{G}_{11}(l)-\varepsilon_1(l)\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{G}_{12}(l)\\ \boldsymbol{G}_{12}^{\mathrm{T}}(l) & \boldsymbol{G}_{22}(l)-\varepsilon_2(l)\boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}_{2n\times 2n}>0,$$

故 $2\delta>0$.考虑李雅普诺夫函数 $V(\boldsymbol{x}(t),l)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(l)\boldsymbol{x}+2\sum_{i=1}^{n}q_i(l)\int_0^{x_i}f_i(y)\mathrm{d}y$,由 Itô 公式[16] 得

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}V(\boldsymbol{x}(t),l)=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(l)(-\boldsymbol{D}(l)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}(l)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{B}(l)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))+\boldsymbol{U}(l))+\\
&2\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{Q}(l)(-\boldsymbol{D}(l)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}(l)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{B}(l)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))+\boldsymbol{U}(l)+\sum_{k=1}^{N}\gamma_{lk}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(l)x(t)+\\
&2\sum_{k=1}^{N}\gamma_{lk}\sum_{i=1}^{n}q_i(k)\int_0^{x_i(t)}f(y)\mathrm{d}y\leqslant\\
&2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(l)(-\boldsymbol{D}(l)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}(l)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{B}(l)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{U}(l))+2\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{Q}(l)(-\boldsymbol{D}(l)\boldsymbol{x}(t)+\\
&\boldsymbol{A}(l)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{B}(l)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{U}(l))+\\
&\sum_{k=1}^{N}\gamma_{lk}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(l)x(t)+2\sum_{k=1}^{N}\gamma_{lk}\sum_{i=1}^{n}q_i(k)\int_0^{x_i(t)}f_i(y)\mathrm{d}y+\\
&2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(l)\boldsymbol{B}(l)(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)))+\\
&2\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{Q}(l)\boldsymbol{B}(l)(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)))\leqslant\\
&2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(l)(-\boldsymbol{D}(l)\boldsymbol{x}(t)+(\boldsymbol{A}(l)+\boldsymbol{B}(l))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)))+\\
&2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(l)\boldsymbol{U}(l)+2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(l)(-\boldsymbol{D}(l)\boldsymbol{K}^{-1}+\\
&\boldsymbol{A}(l)+\boldsymbol{B}(l))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))+2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(l)\boldsymbol{U}(l)+\\
&2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(l)\boldsymbol{B}(l)(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)))+\\
&2\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(l)\boldsymbol{B}(l)(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)))+\\
&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\sum_{k=1}^{N}\bar{\gamma}_{lk}\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)+\sum_{k=1}^{N}\gamma_{lk}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(l)\boldsymbol{x}(t)\leqslant\\
&-2\delta|\boldsymbol{x}(t)|^2+\delta^{-1}\|\boldsymbol{P}(l)\boldsymbol{B}(l)\|^2|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))-\\
&\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))|^2+\delta|\boldsymbol{x}(t)|^2+2\delta|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))|^2+\\
&\frac{1}{2}\delta^{-1}\|\boldsymbol{Q}(l)\boldsymbol{B}(l)\|^2|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))|+\\
&\varepsilon_1^{-1}(l)\|\boldsymbol{P}(l)\|^2|\boldsymbol{U}(l)|^2+\varepsilon_2^{-1}(l)\|\boldsymbol{Q}(l)\|^2|\boldsymbol{U}(l)|^2\leqslant\\
&-\delta|\boldsymbol{x}(t)|^2+\delta^{-1}(\|\boldsymbol{P}(l)\boldsymbol{B}(l)\|^2+\\
&\frac{1}{2}\|\boldsymbol{Q}(l)\boldsymbol{B}(l)\|^2)\|\boldsymbol{K}\|^2+|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-\tau(t))|^2+\\
&\varepsilon_1^{-1}(l)\|\boldsymbol{P}(l)\|^2|\boldsymbol{U}(l)|^2+\varepsilon_2^{-1}(l)\|\boldsymbol{Q}(l)\|^2|\boldsymbol{U}(l)|^2.
\end{aligned}\tag{6}$$

由系统(1)和 Hölder 不等式,对任意的 $\mu>0$,ν_1,ν_2,$\nu_3>0$,有

$$\begin{aligned}
&E|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-\tau(t))|^2=\\
&E\left|\int_{t-\tau(t)}^{t}-\boldsymbol{D}(r(s))\boldsymbol{x}(s)+\boldsymbol{A}(r(s))\boldsymbol{f}(x(s))+\boldsymbol{B}(r(s))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(s-\tau(s)))+\boldsymbol{U}(r(s))\mathrm{d}s\right|^2\leqslant\\
&(1+\mu)E\left(\left|\int_{t-\tau(t)}^{t}-\boldsymbol{D}(r(s))\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right|+\left|\int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{A}(r(s))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s\right|+\left|\int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{B}(r(s))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau(s)))\mathrm{d}s\right|\right)^2+\\
&(1+\mu)\mu^{-1}\left|\int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{U}(r(s))\mathrm{d}s\right|^2\leqslant\\
&(1+\mu)\left(\sum_{i=1}^{3}\nu_i\right)\left(\nu_1^{-1}E\left|\int_{t-\tau(t)}^{t}-\boldsymbol{D}(r(s))\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right|^2+\nu_2^{-1}E\left|\int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{A}(r(s))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s\right|^2+\right.\\
&\left.\nu_3^{-1}E\left|\int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{B}(r(s))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau(s)))\mathrm{d}s\right|^2\right)+(1+\mu)\mu^{-1}\tau_{\max}^2\max_{1\leqslant l\leqslant N}|\boldsymbol{U}(l)|^2\leqslant\\
&(1+\mu)(\nu_1+\nu_2+\nu_3)\left(\nu_1^{-1}\tau_{\max}^2\max_{1\leqslant l\leqslant N}\|\boldsymbol{D}(l))\|^2\cdot\sup_{-\tau_{\max}\leqslant\theta\leqslant 0}E|\boldsymbol{x}(t+\theta)|^2+\right.\\
&\nu_2^{-1}\tau_{\max}^2\max_{1\leqslant l\leqslant N}\|\boldsymbol{A}(l))\|^2\|\boldsymbol{K}\|^2\sup_{-\tau_{\max}\leqslant\theta\leqslant 0}E|\boldsymbol{x}(t+\theta)|^2+\\
&\left.\nu_3^{-1}\tau_{\max}^2\max_{1\leqslant l\leqslant N}\|\boldsymbol{B}(l))\|^2\|\boldsymbol{K}\|^2\sup_{-2\tau_{\max}\leqslant\theta\leqslant 0}E|\boldsymbol{x}(t+\theta)|^2\right)+\\
&(1+\mu)\mu^{-1}\tau_{\max}^2\max_{1\leqslant l\leqslant N}|U(l)|^2.
\end{aligned}\tag{7}$$

不妨取 $\nu_1=\tau_{\max}\max_{1\leqslant l\leqslant N}\|\boldsymbol{D}(l)\|$,

$\nu_2=\tau_{\max}\max_{1\leqslant l\leqslant N}\|\boldsymbol{A}(l)\|\ \|\boldsymbol{K}\|$,

$\nu_3=\tau_{\max}\max_{1\leqslant l\leqslant N}\|\boldsymbol{B}(l)\|\ \|\boldsymbol{K}\|$,

当 $t\in[-2\tau_{\max},-\tau_{\max}]$时,令 $\boldsymbol{x}(t)=x_0$,将 ν_1,ν_2,ν_3代入式(7)得

$$\begin{aligned}
&E|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-\tau(t))|^2\leqslant\\
&(1+\mu)\tau_{\max}^2\left(\max_{1\leqslant l\leqslant N}\|\boldsymbol{D}(l)\|+\max_{1\leqslant l\leqslant N}(\|\boldsymbol{A}(l)\|\ \|\boldsymbol{K}\|)+\max_{1\leqslant l\leqslant N}(\|\boldsymbol{B}(l)\|\ \|\boldsymbol{K}\|)\right)^2\times\sup_{-2\tau_{\max}\leqslant\theta\leqslant 0}E|\boldsymbol{x}(t+\theta)|^2+
\end{aligned}$$

$(1+\mu)\mu^{-1}\tau_{\max}^2\max_{1\le l\le N}|\boldsymbol{U}(l)|^2.$ (8)

令 $c_1=\min_{1\le l\le N}\lambda_{\min}\{\boldsymbol{P}(l)\}$, $c_2=\max_{1\le l\le N}(\|\boldsymbol{P}(l)\|+\|\boldsymbol{Q}(l)\|\|\boldsymbol{K}\|)$,易知 $c_1|\boldsymbol{x}|^2\le V(\boldsymbol{x},l)\le c_2|\boldsymbol{x}|^2$.将式(8)代入式(6),得到

$$\begin{aligned}E\mathscr{L}V(\boldsymbol{x}(t),l)\le&-\delta c_2^{-1}E\left(\max_{1\le l\le N}V(\boldsymbol{x}(t),l)\right)+\\&\delta^{-1}\eta\tau_{\max}^2c_1^{-1}\sup_{-2\tau_{\max}\le\theta\le 0}E\left(\min_{1\le l\le N}V(\boldsymbol{x}(t+\theta),l)\right)+\\&(\varepsilon_1^{-1}\|\boldsymbol{P}(l)\|^2+\varepsilon_2^{-1}\|\boldsymbol{Q}(l)\|^2+\\&(1+\mu)\mu^{-1}\tau_{\max}^2\max_{1\le l\le N}|\boldsymbol{U}(l)|^2.\end{aligned}\tag{9}$$

因此

$$\begin{aligned}\max_{1\le l\le N}E\mathscr{L}V(\boldsymbol{x}(t),l)\le&-\delta c_2^{-1}E\left(\max_{1\le l\le N}V(\boldsymbol{x}(t),l)\right)+\\&\delta^{-1}\eta\tau_{\max}{}^2c_1^{-1}\sup_{-2\tau_{\max}\le\theta\le 0}E\left(\min_{1\le l\le N}V(\boldsymbol{x}(t+\theta),l)\right)+\\&(\varepsilon_1^{-1}\|\boldsymbol{P}(l)\|^2+\varepsilon_2^{-1}\|\boldsymbol{Q}(l)\|^2+\\&(1+\mu)\mu^{-1}\tau_{\max}^2)\max_{1\le l\le N}|\boldsymbol{U}(l)|^2.\end{aligned}\tag{10}$$

所以,根据广义 Itô 公式[16]

$$\begin{aligned}D^+EV(\boldsymbol{x}(t),l)\le&-\alpha_1EV(\boldsymbol{x}(t),r(t))+\\&\alpha_2\sup_{-2\tau_{\max}\le\theta\le 0}EV(\boldsymbol{x}(t+\theta),r(t+\theta))+\beta.\end{aligned}$$

应用引理 1,有

$$\begin{aligned}EV(\boldsymbol{x}(t),r(t))\le&(EV(\boldsymbol{x}(0),r(0)))\exp\{-\xi t\}+\\&\beta(\alpha_1-\alpha_2)^{-1},\end{aligned}\tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned}\xi=\min_{1\le l\le N}\sup\{\xi(l)>0,\\\alpha_1-\alpha_2\exp\{\xi(l)\tau_{\max}\}-\xi(l)>0\}.\end{aligned}$$

这表明(1) 的解是均方意义下一致有界的.令

$$\mathscr{K}(\boldsymbol{\varphi})=$$

$$E(\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{P}(r(0))\boldsymbol{\varphi}(0)+2\sum_{i=1}^{n}q_i(r(0))\int_0^{\varphi_i(0)}f_i(y)\mathrm{d}y),$$

则 $\mathscr{K}\in\boldsymbol{\Phi}$,由式(11) 可知:

$$EV(\boldsymbol{x}(t),r(t))-\beta(\alpha_1-\alpha_2)^{-1}\le\mathscr{K}(\boldsymbol{\varphi})\exp\{-\xi t\}.$$

因此,由定义 3,系统(1) Lagrange 全局均方指数稳定,且 θ 是系统(1)的一个 GEA 集.

注 2 定理 1 中,当 $\beta=0$ 且系统(1)只有一个平衡点时,则定理 1 变成文献[14]中定理 2 的均方指数稳定性判据.因此,定理 1 可以看成是文献[14]中定理 2 的推广.

注 3 定理 1 中,如果 $\boldsymbol{P}(l)$ 和 $\boldsymbol{Q}(l)$ 独立于 l,那么, $\sum_{k=1}^{N}\gamma_{lk}\boldsymbol{P}(k)=0$, $\sum_{k=1}^{N}\bar{\gamma}_{lk}\boldsymbol{Q}(k)\boldsymbol{K}=0$.因此, $\boldsymbol{G}(l)$ 正定等价于 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{D}(l)\boldsymbol{K}^{-1}-\boldsymbol{A}(l)-\boldsymbol{B}(l))+(\boldsymbol{D}(l)\boldsymbol{K}^{-1}-\boldsymbol{A}(l)-\boldsymbol{B}(l))\boldsymbol{Q}$ 正定,即 $\boldsymbol{D}(l)\boldsymbol{K}^{-1}-\boldsymbol{A}(l)-\boldsymbol{B}(l)$ 是李雅普诺夫对角稳定的.特别地,当 $\mathscr{M}=\{1\}$ 时,系统退化成确定性系统, $\boldsymbol{G}(l)$ 正定等价于 $\boldsymbol{DK}^{-1}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 是李雅普诺夫对角稳定的.

注 4 由于马尔可夫链的存在,使得现有的方法[6]并不容易从确定性系统推广到具有切换的时滞系统.现有的文献[6-7,11]对时滞的要求或者是常时滞或者时滞的导函数不超过 1,但是,本文定理 1 对时滞并无此限制,因此,可以处理现有文献不能处理的系统.同时,相对现有的文献,本判据可对时滞上界进行估计.

3 数值例子

例 1 考虑如下带切换的二维的时滞回归神经网络:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=&-\boldsymbol{D}(r(t))\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}(r(t))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))+\\&\boldsymbol{B}(r(t))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))+\boldsymbol{U}(r(t)),\end{aligned}\tag{12}$$

其生成矩阵及其他参数为

$$\mathscr{R}=\begin{pmatrix}-1&1\\0.5&-0.5\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{D}(1)=\begin{pmatrix}1.06&0\\0&3\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}(2)=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{U}(1)=\begin{pmatrix}0.1\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{U}(2)=\begin{pmatrix}0\\0.1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}(1)=\begin{pmatrix}0&-0.5\\0.5&0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{A}(2)=\begin{pmatrix}0&0.5\\-0.5&0.25\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}(1)=\begin{pmatrix}0&-0.5\\0.5&0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{B}(2)=\begin{pmatrix}-0.5&-0.25\\0.25&-0.25\end{pmatrix},$$

令 $V(\boldsymbol{x},l)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(l)\boldsymbol{x}+2\sum_{i=1}^{2}q_i(l)\int_0^{x_i}f_i(x_i(y))\mathrm{d}y$,取

$$\boldsymbol{P}(1)=\begin{pmatrix}6.56&0\\0&5.5\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{P}(2)=\begin{pmatrix}5.5&0\\0&5.5\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}(1)=\begin{pmatrix}6.4&0\\0&6.4\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{Q}(2)=\begin{pmatrix}1.7&0\\0&1.7\end{pmatrix},$$

不妨设 $x_if_i(x_i)\le x_i^2$,即 $\mathscr{k}_i=1$, $i=1,2$,则易知 $\boldsymbol{G}(l)$ 正定,根据定理 1,式(12) 是 Lagrange 全局均方指数稳定的.取 $\varepsilon_1(1)=3$, $\varepsilon_2(1)=3$, $\varepsilon_1(2)=6$, $\varepsilon_2(2)=2$, $\mu=0.01$. 易计算 $c_1=\min_{1\le l\le 2}\lambda_{\min}\{\boldsymbol{P}(l)\}=5.5$, $c_2=\max_{1\le l\le 2}(\|\boldsymbol{P}(l)\|+\|\boldsymbol{Q}(l)\|\|\boldsymbol{K}\|=12.96$, $2\delta=8.658$, $\eta=282.8158$, $\alpha_1=\delta c_2{}^{-1}=0.334$.此时可以算得时滞上界 $\tau^*=0.168$,当取 $\tau_{\max}=0.12$ 时, $\alpha_2=\delta^{-1}\eta\tau_{\max}^2c_1^{-1}=0.171$, $\beta=0.28156$.全局吸引集 $\boldsymbol{\Theta}=\cup_{l=1,2}\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2|\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(l)\boldsymbol{x}+2\sum_{i=1}^{2}q_i(l)\int_0^{x_i}f_i(x_i(y))\mathrm{d}y\le\beta/(\alpha_1-\alpha_2)=1.7274\}$.

特别地,当取二维有界激励函数 $\boldsymbol{f}(x)=\tanh(10\boldsymbol{x})$ 和无界激励函数 $\boldsymbol{f}(x)=(x+\tanh(\boldsymbol{x}))/2$, $\tau(t)=$

0.12·|sin(t)|时,仿真结果分别如图1a,1b所示.

注5 考虑系统(12)如下的确定性的子系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=-\boldsymbol{D}(1)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}(1)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{B}(1)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))+\boldsymbol{U}(1). \qquad (13)$$

在例1的数值条件下,可以算得 $\alpha_1=\delta c_2^{-1}=0.3518$, $\alpha_2=\delta^{-1}\eta\tau_{\max}^2c_1^{-1}=0.1473$, $\beta=0.28156$. 根据定理1及注3知,系统(13)是Lagrange全局指数稳定的,且吸引集 $\Theta=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2 \mid \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+2\sum_{i=1}^{2}q_i\int_0^{x_i}f_i(x_i(y))\mathrm{d}y\leqslant\beta/(\alpha_1-\alpha_2)=1.3771\}$. 仿真结果分别如图1c,1d所示.

令矩阵

$$\boldsymbol{Q}^{(1)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_{11}^{(1)} & \boldsymbol{Q}_{12}^{(1)}\\ (\boldsymbol{Q}_{12}^{(1)})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Q}_{22}^{(1)}\end{pmatrix}_{4\times4},\quad \boldsymbol{Q}^{(2)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_{11}^{(2)} & \boldsymbol{Q}_{12}^{(2)}\\ (\boldsymbol{Q}_{12}^{(2)})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Q}_{22}^{(2)}\end{pmatrix}_{4\times4},$$

其中 $\boldsymbol{Q}_{11}^{(1)}=(\bar{\boldsymbol{A}}(1)+\bar{\boldsymbol{A}}(1)^{\mathrm{T}})/2+\boldsymbol{E}_{2\times2}-\mathrm{diag}\{d_1(1)/k_1, d_2(1)/k_2\}$, $\boldsymbol{Q}_{12}^{(1)}=\boldsymbol{Q}_{12}^{(2)}=\boldsymbol{B}(1)/2$, $\boldsymbol{Q}_{22}^{(1)}=\boldsymbol{Q}_{22}^{(2)}=-\boldsymbol{E}_{2\times2}$, $\boldsymbol{Q}_{11}^{(2)}=(\bar{\boldsymbol{A}}(1)+\bar{\boldsymbol{A}}(1)^{\mathrm{T}})/2+\boldsymbol{E}_{2\times2}$, 则 $\lambda_{\min}\{\boldsymbol{Q}^{(1)}\}=-2.0590<0$, $\lambda_{\max}\{\boldsymbol{Q}^{(1)}\}=0.0024>0$, $\lambda_{\min}\{\boldsymbol{Q}^{(2)}\}=-1.0590<0$, $\lambda_{\max}\{\boldsymbol{Q}^{(2)}\}=0.0590>0$, 因此,矩阵 $\boldsymbol{Q}^{(1)}$, $\boldsymbol{Q}^{(2)}$ 不是负定阵或半负定阵,这不满足文献[6]定理4.1,4.2的条件,所以不能用其判定系统(13)是否Lagrange全局指数稳定.

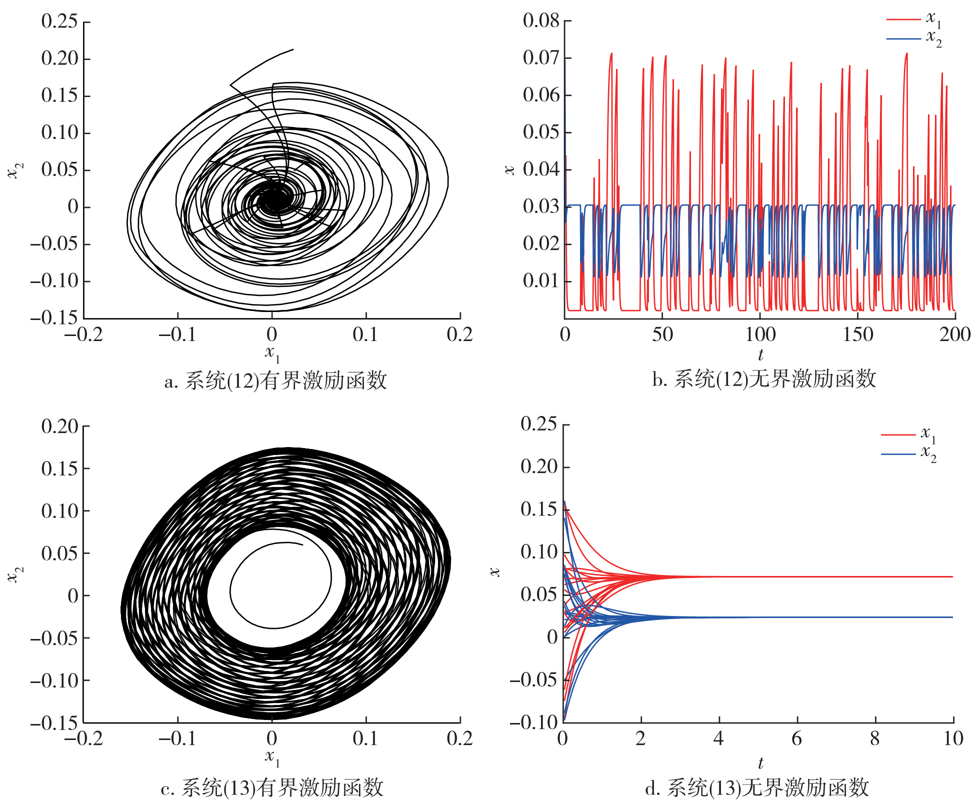

图1 系统(12),(13)在不同激励函数下 x_1, x_2 的瞬时性态

Fig. 1 Transient behaviors of x_1, x_2 of systems(12),(13) with different activation functions

参考文献
References

[1] Liao X X, Wang J. Global dissipativity of continuous-time recurrent neural networks with time delay[J]. Physical Review E, 2003, 68(1/2), DOI: 10.1103/PhysRevE.68.016118

[2] Sun Y H, Cao J D. pth moment exponential stability of stochastic recurrent neural networks with time-varying delays[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2007, 8(4): 1171-1185

[3] Huang C X, He Y G, Wang H N. Mean square exponential stability of stochastic recurrent neural networks with time-varying delays[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2008, 56(7): 1773-1778

[4] Zhu S, Shen Y. Two algebraic criteria for input-to-state stability of recurrent neural networks with time-varying delays[J]. Neural Computing & Applications, 2013, 22(6): 1163-1169

[5] Yang Z C, Zhou W S, Huang T W. Exponential input-to-state stability of recurrent neural networks with multiple time-varying delays[J]. Circuits & Systems II Express

Briefs IEEE Transactions, 2014, 8(1): 47-54

[6] Liao X X, Luo Q, Zeng Z G, et al. Global exponential stability in Lagrange sense for recurrent neural networks with time delays[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2008, 9(4): 1535-1557

[7] Wang X H, Jiang M H, Fang S L. Stability analysis in Lagrange sense for a non-autonomous Cohen-Grossberg neural network with mixed delays [J]. Nonlinear Analysis, 2009, 70(12): 4294-4306

[8] Tu Z W, Jian J G, Wang K. Global exponential stability in Lagrange sense for recurrent neural networks with both time-varying delays and general activation functions via LMI approach[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2011, 12(4): 2174-2182

[9] Luo Q, Zeng Z G, Liao X X. Global exponential stability in Lagrange sense for neutral type recurrent neural networks[J]. Neurocomputing, 2011, 74(4): 638-645

[10] Zhang G D, Shen Y, Xu C J. Global exponential stability in a Lagrange sense for memristive recurrent neural networks with time-varying delays [J]. Neurocomputing, 2015, 149: 1330-1336

[11] Wang B X, Jian J G, Jiang M H. Stability in Lagrange sense for Cohen-Grossberg neural networks with time-varying delays and finite distributed delays [J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2014, 4(1): 65-78

[12] Wu A L, Zeng Z G. Lagrange stability of neural networks with memristive synapses and multiple delays [J]. Information Sciences, 2014, 280: 135-151

[13] Wang Z D, Liu Y R, Yu L, et al. Exponential stability of delayed recurrent neural networks with Markovian jumping parameters[J]. Physics Letters A, 2006, 356(4/5): 346-352

[14] Shen Y, Wang J. Almost sure exponential stability of recurrent neural networks with Markovian switching [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2009, 20(5): 840-855

[15] Tong D B, Zhou W N, Zhou X H, et al. Exponential synchronization for stochastic neural networks with multi-delayed and Markovian switching via adaptive feedback control[J]. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2015, 29(1/2/3): 359-371

[16] Mao X R, Yuan C G. Stochastic differential equations with Markovian switching [M]. London: Imperial College Press, 2006: 275

Mean-square global exponential stability in Lagrange sense for delayed recurrent neural networks with Markovian switching

CHEN Qiuxin[1] SHI Zhenghua[1]

1 College of Science, Hohai University, Nanjing 211100

Abstract In this paper, the mean-square global exponential stability in Lagrange sense for delayed recurrent neural networks with Markovian switching is studied. We consider the Lurie-type activation functions, which include both bounded and unbounded activation functions. A sufficiency criterion for mean-square exponential stability of recurrent neural networks with Markovian switching is obtained. Finally, a numerical simulation example is provided to examine the correctness and effectiveness of our result.

Key words Markovian switching; delayed recurrent neural networks; mean-square exponentially stable; Lagrange stability; global exponential attractive