DOI:10.13878/j.cnki.jnuist.2016.03.011

朱建[1]　陈丽娟[1]

# Halin 图的色数问题

**摘要**

Halin 图 $G=T\cup C$,其中 $T$ 为每一非悬挂点(内点)度数至少为 3 的平面树,$C$ 为连接 $T$ 的所有悬挂点的圈.文章分别讨论了 Halin 图的星色数、面色数及分数色数.

**关键词**

Halin 图;星色数;面色数;分数色数

**中图分类号** O517.6

**文献标志码** A

**收稿日期** 2015-09-09

**资助项目** 国家自然科学基金(11271197);江苏省普通高校研究生科研创新计划(CXLX13_502);南京信息工程大学科研基金(20110387,2012R101)

**作者简介**

朱建,女,博士生,讲师,主要研究微分方程与气候系统动力学模型.cljung@sohu.com

1 南京信息工程大学 数学与统计学院,南京,210044

## 0　引言

图染色理论是图论的重要内容,它在生产管理、军事、交通运输、计算机网络等许多领域有着重要的应用.图染色理论还是图论研究的热点问题,它起源于四色定理.许多学者研究了列表染色、均匀染色、强邻边染色,其中点可区别全染色、点可区别边染色或点可区别均匀边染色等[1-6]带有限制条件的染色,是一类较难研究的问题.1969 年,R.Halin 提出了作为极小 3-连通图的 Halin 图,它是一类特殊的平面图.由于 Halin 图自身的特殊结构,它的染色问题已成为图染色理论的热点问题.文献[7]讨论了 Halin 图的边面全着色数,文献[8]研究了 Halin 图的色数、边色数和全色数.本文探讨了 Halin 图的星色数、面色数及分数色数.文中未加说明的术语、记号参见文献[9].

**定义 1**　将阶数至少为 4,每一非悬挂点(内点)度数至少为 3 的平面树 $T$ 嵌入到平面内,再作一圈 $C$ 连接 $T$ 的所有悬挂点(叶点),称这样构成的平面图 $G$ 为 Halin 图,记作 $G=T\cup C$.对简单平面图 $G(V,E,F)$,用 $V(G)$,$E(G)$,$F(G)$分别表示 $G$ 的点边面集合.$\omega(G)$表示 $G$ 的最大团数,$d_G(v)$表示顶点 $v$ 的度数.令 $G$ 的面色数、色数分别为

$\chi_F(G)=\min\{k|G$ 的 $k$-正常面着色$\}$,

$\chi(G)=\min\{k|G$ 的 $k$-正常面着色$\}$.

**定义 2**　设正整数 $k,d$ 且 $k\geqslant 2d$,图 $G(V,E)$中,若存在映射 $c$:$V\to Z_k$ 使得对每条边 $uv\in E(G)$,有$|c(u)-c(v)|_k\geqslant d$,这里$|x|_k=\min\{|x|,k-|x|\}$,$Z_k=i=1,2,\cdots,k-1$,则称 $c$ 为 $G$ 的一个$(k,d)$-着色,且令 $G$ 的星色数$\chi^*(G)=\inf\{k/d|G$ 的$(k,d)$-着色$\}$.

**注 1**　$G$ 的一个$(k,d)$-着色即为 $G$ 的一个 $k$-着色,从而$\chi(G)=\min\{k|G$ 的$(k,1)$-正常着色$\}$,因此$\chi^*(G)\leqslant\chi(G)$.

**定义 3**　设 Halin 图 $G$,$x$ 为圈 $C$ 上的一个点,$a,b,c$ 为 $X$ 的 3 个邻点,其中 $a$ 为 $x$ 在 $T$ 中的邻点,则称图 $G'=G-x$ 是根为 $a$ 的简化的 Halin 图.

**定义 4**　设 $I$ 为 $G$ 中所有独立集的集合,若 $G$ 中存在映射 $c$:$I\to[0,1]$使得任取 $x\in V(G)$,都有 $\sum_{S\in I,x\in S}c(S)=1$,则称 $c$ 为 $G$ 的一个分数色数,且分数着色 $c$ 的值为 $\sum_{S\in I}c(S)$.令 $G$ 的分数色数$\chi_f(G)=\inf\{c\mid c=\sum_{S\in I}c(S)\}$.

**注 2**　对任何图 $G$,有$\chi_f(G)\leqslant\chi^*(G)$.事实上,如果$\chi^*(G)=k/d$,

设 $c$ 为 $G$ 的一个$(k,d)$-着色,则每一个 $S_i=\cup_{j=i}^{i+d-1}c^{-1}(j)$ 是 $G$ 的一个独立集(加法模 $k$),从而赋予每个权的映射就是 $G$ 的一个值为 $k/d$ 的分数色数,所以$\chi_f(G)\leqslant k/d$.

**注 3** 容易验证 $\omega(G)\leqslant\chi_f(G)$.

## 1 Halin 图的星色数

在圈 $C=v_1v_2\cdots v_{p-1}$内增加新顶点 $u$,连接 $uv_i$,$i=1,2,\cdots,p-1$,所得的图为轮图 $W_p$.

**引理 1** 若 $G$ 是 Halin 图,则$\chi^*(G)\geqslant 3$.

**证明** 因为 $K_3$ 是 $G$ 的一个真子图,所以引理成立.

**引理 2**[8] 若 $G$ 是 Halin 图,则

$$\chi(G)=\begin{cases}4, & G=W_p(p\equiv 0(\mathrm{mod}2)),\\ 3, & \text{其他}.\end{cases}$$

**引理 3**[10] 对 $p$ 阶轮图,有

$$\chi^*(W_p)=\begin{cases}3, & p\equiv 1(\mathrm{mod}2),\\ 4, & p\equiv 0(\mathrm{mod}2).\end{cases}$$

由引理 1,引理 2,引理 3 及注 1 可得:

**定理 1** 若 $G$ 是 Halin 图,则

$$\chi^*(G)=\begin{cases}4, & G=W_p(p\equiv 0(\mathrm{mod}2)),\\ 3, & \text{其他}.\end{cases}$$

## 2 Halin 图的面色数

**引理 4**[9] 设 $G'$是一个简化的 Halin 图,顶点数为 $n$,则 $G'$ 中有长为 $l$ 的圈存在,$3\leqslant l\leqslant n$,除可能不存在一个长为 $m$ 的偶圈外.而且,如果 $G'$不包含长为 $m$ 的圈,$3<m\leqslant n$,则 $G'$包含一个顶点数为 $2m-1$ 的简化的 Halin 图子图.

如果 $n\geqslant 2$,由引理 4,$m\neq n$;否则,$G'$包含一个顶点数为 $2n-1$ 的简化的 Halin 图子图 $G''$($G''$为 $G'$的子图),这与 $n\geqslant 2$ 矛盾!因此,Halin 图为 Hamilton 图.

**引理 5**[11] 每个 Hamilton 图都是 4 面可着色.

在 Halin 图 $G=T\cup C$ 中,令 $X=V(T)\setminus V(C)$,且 $|x|=t$.

**定理 2** 若 $G$ 是 Halin 图,则其面色数

$$\chi_F(G)=\begin{cases}3, & \forall x\in X, d_G(x)\equiv 0(\mathrm{mod}2),\\ 4, & \text{其他}.\end{cases}$$

**证明**

1)情形 1. $\forall x\in X$,$d_G(x)$ 为偶数,对数 $t$ 运用归纳法.

当 $t=1$ 时,$G=W_p$,$p$ 为奇数. 容易验证$\chi_F(W_p)=3$.

若 $|x|=t-1$ 时,结论成立.

考虑 $|x|=t(t\geqslant 2)$.设 $w,u\in X$,$d_G(w)=2s$,$w$ 与圈 $C$ 上的 $2s-1$ 个点相邻(由于 $G$ 不是轮图,这样的点 $w$ 是存在的).沿顺时针方向分别记这 $2s-1$ 个点为 $v_1,v_2,\cdots,v_{2s-1}$.令

$$G_1=(G-\{v_1,v_2,\cdots,v_{2s-1}\})\cup\{yw,zw\},$$

这里 $y,z$ 分别为 $v_{2s-1}$,$v_1$ 在圈 $C$ 上的另一邻点,显然 $C_1$ 仍为 Halin 图.根据归纳假设,$\chi_F(G_1)=3$.

另一方面 $G_1=T_1\cup C_1$ 为 Halin 图,在 $C_1$ 内的所有面都与 $G_1$ 的外部面相邻.于是内部面着 1,2 色,外部面着 3 色.$G_1$ 中与 $uw$ 相关联的两面着 1,2 色.在 $G$ 中,与 $uw$ 相关联的两面记为 $g_1$ 和 $g_2$,与边 $v_iv_{i+1}$相关联的内部面记为 $f_i$,$i=1,2,\cdots,2s-2$.

定义 $G$ 的一个面着色 $\sigma$ 如下:$\sigma(g_1)=1$,$\sigma(g_2)=2$,$\sigma(f_i)=1$($i$ 为奇数),$\sigma(f_i)=2$($i$ 为偶数),$\sigma(g)=3$($g$ 是 $G$ 的外部面),$\sigma(f)=\sigma_1(f)$(这里 $\sigma_1$ 是 $G$ 的一个正常 3-面着色,$f\in F(G_1)$).不难验证 $\sigma$ 是 $G$ 的一个正常 3-面着色.

2)情形 2. $\exists x\in X$,$d_G(x)=2s+1(s\geqslant 1)$.

所有与 $x$ 相关联的面记为$f_1,f_2,\cdots,f_{2s+1}$,其中 $f_i$ 与 $f_{i+1}(i=1,2,\cdots,2s)$相邻,$f_{2s+1}$与 $f_1$ 相邻.显然,在 $G$ 的任意一个面着色中,这 $2s+1$ 个面至少需要 3 种不同的颜色.又因为 $G$ 为 Halin 图,这 $2s+1$ 个面均与外部面相邻,从而外部面必须着第 4 种颜色,即 $\chi_F(G)\geqslant 4$.由引理 5,$\chi_F(G)=4$.因此,定理 2 成立.

## 3 Halin 图的分数色数

**引理 6**[9] 令 $\alpha(G)$是 $G$ 的独立数,如果 $G$ 是顶点传递图,则其分数色数$\chi_f(G)=|V_G/\alpha(G)|$.

**引理 7** $\chi_f(C_k)=\begin{cases}2, & k\equiv 0(\mathrm{mod}2),\\ 2+2/(k-1), & k\equiv 1(\mathrm{mod}2).\end{cases}$

这里 $C_k$ 为 $k$ 个顶点的圈.

**证明** 每一个圈都是顶点传递图,且

$$\alpha(C_k)=\begin{cases}k/2, & k\equiv 0(\mathrm{mod}2),\\ (k-1)/2, & k\equiv 1(\mathrm{mod}2),\end{cases}$$

所以由引理 6 得,引理 7 成立.

**引理 8**

$$\chi_f(W_p)=\chi_f(C_{p-1})+1=\begin{cases}3, & p\equiv 1(\mathrm{mod}2),\\ 3+2/(p-2), & p\equiv 0(\mathrm{mod}2).\end{cases}$$

**证明** 由圈 $C_{p-1}$添加一个新顶点 $u$,再连接 $u$ 与 $C_{p-1}$上所有的点,所得的图为 $W_p$.令 $I$ 为 $G$ 中所有独立集的集合,易得 $I(W_p)=I(C_{p-1})\cup I(\{u\})$.由定义 4,有 $c(u)=1$,因此引理 8 成立.

由引言部分的注 2 和注 3,有 $\omega(G)\leqslant\chi_f(G)\leqslant\chi^*(G)$,从而当 $G\neq W_p$ 时,$\omega(G)=3$,可以得出 $\chi_f(G)=3$.因此,下面结论成立:

**定理 3** 若 $G$ 是顶点数为 $p$ 的 Halin 图,则

$$\chi_f(G)=\begin{cases}3+2/(p-2), & G=W_p(p\equiv 0(\mathrm{mod}2)),\\ 3, & \text{其他}.\end{cases}$$

## 参考文献
References

[1] Liu X S, An M Q, Gao Y. An upper bound for the adjacent vertex-distinguishing acyclic edge chromatic number of a graph[J]. Acta Mathematica Applicatae Sinica English Series,2009,25(1):137-140

[2] 张忠辅,李敬文,赵传成,等.若干联图的点可区别均匀边色数[J].数学学报,2007,50(1):197-204
ZHANG Zhongfu,LI Jingwen,ZHAO Chuancheng,et.al. On the vertex-distinguishing-equitable edge chromatic number of some join-graphs[J]. Acta Mathematica Sinica,2007,50(1):197-204

[3] 陈祥恩,高毓平.合成图的点可区别正常边色数[J].吉林大学学报:理学版,2011,49(2):207-212
CHEN Xiangen, GAO Yuping. Vertex-distinguishing proper edge-coloring chromatic numbers of the composition of two graphs[J].Journal of Jilin University: Science Edition,2011,49(2):207-212

[4] Li D M.The star chromatic numbers of some graphs[J]. Advances in Mathematics,1999,28(3):259-265

[5] 马刚,马少仙,张忠辅.一些倍图的点可区别均匀边色数[J].经济数学,2008,25(4):437-440
MA Gang,MA Shaoxian,ZHANG Zhongfu.On the vertex-distinguishing-equitable edge chromatic number of some double-graphs[J]. Mathematics in Economics, 2008, 25(4):437-440

[6] Zhu X D.Planar graphs with circular chromatic numbers between 3 and 4[J].Journal of Combinatorial Theory Series B,1999,76(2):170-200

[7] 徐保根.关于 Halin 图的边面全着色数[J].华东交通大学学报,1995,12(3):73-77
XU Baogen. The edge-face total chromatic number of Halin graphs[J].Journal of East China Jiaotong University,1995,12(3):73-77

[8] 李鸿祥,张忠辅,张建勋.Halin 图的色性[J].上海铁道学院学报,1994,15(1):19-24
LI Hongxiang, ZHANG Zhongfu, ZHANG Jianxun. The chromatic number of Halin graphs[J]. Journal of Shanghai Institute of Railway Technology,1994,15(1):19-24

[9] Bondy J A, Lovász L. Lengths of cycles in Halingraphs[J].J Graph Theory,2006,9(3):397-410

[10] Zhu X D. Circular chromatic number: A survey[J]. Discrete Mathematics,2001,229(1/2/3):371-410

[11] Bondy J A, Murty USR. Graph theory with applications[M]. Amsterdam: Elsevier Science Ltd/North-Holland,1976

# On the chromatic number of halin graphs

ZHU Jian[1]　CHEN Lijuan[1]

1 School of Mathematics and Statistics,Nanjing University of Information Science and Technology,Nanjing　210044

**Abstract** A Halin graph is a plane graph $G=T\cup C$,where $T$ is a plane tree with no vertex of degree two and at least one vertex of degree three or more,$C$ is a cycle connecting the endvertices of $T$ in the cyclic order determined by the embedding of $T$.In this paper,we discuss the star chromatic number,the face chromatic number and the fractional chromatic number of Halin graphs.

**Key words** Halin graph;star chromatic number;face chromatic number;fractional chromatic number