DOI:10.13878/j.cnki.jnuist.2016.02.013

杨加顺[1]　胡军浩[1]

分数阶混合随机泛函微分方程的能控性

摘要

主要研究了分数阶混合随机泛函微分方程的能控性.在无限维空间下,假设所考虑方程线性部分生成半群不是紧的,使用非紧性测度技术和 Mönch 不动点定理,给出了方程能控性充分条件,并通过一个例子说明了结论的有效性.

关键词

分数阶微分方程;混合随机微分方程;能控性;非紧性测度;Mönch 不动点定理

中图分类号 O211.63

文献标志码 A

0　引言

近 30 年来,分数阶微分的出现给物理、化学、工程、生物、金融等领域带来了新的挑战.因为分数阶导数比整数阶导数更能准确地描述实际生活中的现象,分数阶微分方程的理论及应用现在已是非常热门的研究领域之一[1].同时,在许多确定性模型中,系统常常受到环境噪音的干扰、子系统的变化和参数的变化,马尔科夫链的随机性模型比确定性模型能更好地模拟实际系统[2].因此,有必要研究马尔科夫链的分数阶随机系统,即分数阶混合随机系统.

能控性是控制理论中的基本问题之一.系统的存在性是首先要解决的问题.Zhou 等[3]分析了分数阶中立发展系统温和解的存在性;Li 等[4]利用 Kuratowski 非紧性测度考虑半线性分数阶微分方程的存在性;Zang 等[5]在文献[3]基础上论证了脉冲分数阶中立型随机微分方程的非局部渐近能控性;Guendouzi 等[6]将文献[5]的结果推广至无穷时滞的分数阶中立型随机泛函积分微分包含的渐近能控性;Yan 等[7]利用算子性质和不动点定理研究非线性分数阶随机系统的渐近能控性;Balasubramanian 等[8]利用 Mainardi 函数和 Bohnenblust-Karlin 不动点定理分析分数阶中立型随机积分微分包含的渐近能控性.这些渐近能控性研究假设其对应的线性系统是渐近能控的,并且线性部分生成的是紧半群.在无限维空间下,如果线性部分生成的不是紧半群时,必须使用新的方法分析能控性[9].本文使用非紧性测度技术和 Mönch 不动点定理,分析分数阶混合随机泛函微分方程的能控性.

1　准备知识

令$(U,\langle\cdot,\cdot\rangle)$和$(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$是两个可分的 Hilbert 空间,$\mathscr{L}(U,H)$是从 U 到 H 上有界线性算子族.为了方便,U、H 和 $\mathscr{L}(U,H)$上的范数统一记为$\|\cdot\|$.$(\mathscr{L}_{HS}(H),\|\cdot\|_{HS})$表示从 H 到 H 上的 Hilbert-Schmidt 算子族.$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0},P)$是完备的概率空间.$\{W(t):t\geqslant 0\}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0},P)$上具有有限迹核协方差算子 $Q\geqslant 0$ 的维纳过程.令 $C([-\tau,0];H)$表示所有连续函数 $\zeta:[-\tau,0]\to H$,其范数为$\|\zeta\|=\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\|\zeta(\theta)\|$.$C^b_{\mathscr{F}_0}([-\tau,0];H)$表示所有有界,$\mathscr{F}_0$-可测,$C([-\tau,0];H)$-值随机变量.

令 $r(t)$,$t\geqslant 0$ 是在概率空间上右连续 Markov 链,且取值为有限的状态空间 $S=\{1,2,\cdots,N\}$.其生成元 $\Upsilon=(r_{ij})_{N\times N}$,从时间 t 的模态 i 到

收稿日期 2016-03-13

资助项目 国家自然科学基金(61374085);中央高校基本科研业务费专项基金(CZW15113)

作者简介

杨加顺,男,硕士生,研究方向为随机系统的镇定与控制.343937065@qq.com

胡军浩(通信作者),男,教授,研究方向为随机系统的镇定与控制.junhaohu74@163.com

1 中南民族大学 数学与统计学学院,武汉,430074

时间 $t+\Delta$ 的模态 j 的转移概率为

$$P\{r(t+\Delta)=j\mid r(t)=i\}=\begin{cases}\gamma_{ij}\Delta+o(\Delta), & i\neq j,\\ 1+\gamma_{ii}\Delta+o(\Delta), & i=j,\end{cases}$$

其中 $\Delta>0$ 并且 $\lim_{\Delta\to 0}o(\Delta)/\Delta=0$.而 $r_{ij}\geqslant 0$ 是从模态 i 到模态 j 的转移概率，当 $i\neq j$ 时，有

$$\gamma_{ii}=-\sum_{j\neq i}\gamma_{ij}.$$

假设 Markov 链 $r(\cdot)$ 与 Brownian 运动 $W(\cdot)$ 是相互独立的.$r(t)$ 几乎每个样本路径是在 $\mathbf{R}^+$ 上任意有限区间上取有限简单跳跃的右连续阶梯函数.

考虑以下分数阶混合随机泛函微分方程：

$$^{c}D_t^{\alpha}x(t)=Ax(t)+Bu(t)+f(t,x_t,r(t))+ g(t,x_t,r(t))\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t},\quad t\in J:=[0,b],\tag{1}$$

其初值 $x_0=\xi(t)\in C^b_{\mathscr{F}_0}([-\tau,0],H)$，$r(0)=r_0$，$-\tau\leqslant t\leqslant 0$. 这里 $^{c}D_t^{\alpha}$ 表示 $\frac{1}{2}<\alpha<1$ 的 Caputo 分数导数. $A:D(A)\subset H\to H$ 是 H 上有界线性算子 $\{T(t),t\geqslant 0\}$ 的强连续半群的无穷小生成元.$B\in\mathscr{L}(U,H)$，$u(\cdot)$ 是取值于 $L^2(J,u)$ 的容许控制函数.$f:J\times C([-\tau,0];H)\times S\to H$，$g:J\times C([-\tau,0];H)\times S\to\mathscr{L}_{HS}(H)$ 是 Borel 可测映射.

定义 1　函数 h 的 α 阶积分定义为

$$I^{\alpha}h(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{h(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\mathrm{d}s,\quad t>0,\quad \alpha>0,\tag{2}$$

其中，$\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数.

定义 2　函数 h 的 α 阶 Caputo 导数定义为

$$^{c}D_t^{\alpha}h(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t\frac{h^n(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}}\mathrm{d}s= I^{n-\alpha}h^n(t),\quad t>0,\quad n-1<\alpha<n.\tag{3}$$

定义 3　$\mathscr{F}_t$ 适定的随机过程 $\{x(t):t\in J\}$ 称为方程(1) 的温和解，若满足：对任意的 $t\in[0,b]$，有 $P\left\{\omega:\int_0^t\|x(s)\|^2\mathrm{d}s<\infty\right\}=1$，以及

$$\begin{aligned}x(t)={}&\eta(t)\xi(0)+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\beta(t-s)Bu(s)\mathrm{d}s+\\&\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\beta(t-s)f(s,x_s,r(s))\mathrm{d}s+\\&\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\beta(t-s)g(s,x_s,r(s))\mathrm{d}W(s),\\&\text{a.s.}\quad t\in J,\end{aligned}\tag{4}$$

其中，

$$\eta(t)=\int_0^{\infty}\rho(\theta)T(t^{\alpha}\theta)\mathrm{d}\theta,$$

$$\beta(t)=\alpha\int_0^{\infty}\theta\rho(\theta)T(t^{\alpha}\theta)\mathrm{d}\theta,$$

$$\rho(\theta)=\frac{1}{\alpha}\theta^{-1-\frac{1}{\alpha}}\tilde{\omega}(\theta^{-\frac{1}{\alpha}})\geqslant 0,$$

$$\tilde{\omega}(\theta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\theta^{-n\alpha-1}\frac{\Gamma(n\alpha+1)}{n!}\sin(n\pi\alpha),$$

$$\theta\in(0,\infty),$$

这里 ρ 是 $(0,\infty)$ 上的概率密度函数.

定义 4　称系统(1) 在 J 上是能控的，若满足：对任意的初值 $\xi(t)$，任意的 $\bar{x}\in H$，存在控制函数 $u\in L^2(J,U)$，使得系统(1) 的温和解 $x(b)=\bar{x}$.

引理 1[3]　算子 η,β 满足以下性质：

(i) 对任意的 $t\geqslant 0$，算子 $\eta(t)$，$\beta(t)$ 是有界的，即存在常数 $L>0$，对任意的 $x\in H$，都有

$$\|\eta(t)x\|\leqslant L\|x\|,\quad \|\beta(t)x\|\leqslant\frac{\alpha L}{\Gamma(1+\alpha)}\|x\|;$$

(ii) 算子 $\eta(t)$，$\beta(t)$ 是强连续的，即对任意的 $x\in H$，$0\leqslant t'\leqslant t''$，当 $t'\to t''$ 都有

$$\|\eta(t'')x-\eta(t')x\|\to 0,\quad \|\beta(t'')x-\beta(t')x\|\to 0.$$

注 1　这里没有假设算子 T 是紧的，因此 η,β 有可能不是紧的.

定义 5　令 (A,e) 是偏序集，D 是 H 中有界子集，函数 $\mu:H\to A$ 满足：

$$\mu(D)=\inf\left\{\epsilon>0:D\subset\bigcup_{i=1}^{m}D_i,\operatorname{diam}(D_i)\leqslant\epsilon\right\},$$

称 μ 为 H 上 Kuratowski 非紧性测度.

引理 2[10]

(1) 令 $V=\{f_n\}\subset L^1(J,H)$. 如果存在 $h\in L^1(J,\mathbf{R}^+)$，使得对 $t\in J$，a.a.，都有 $\|f_n(t)\|\leqslant h(t)$，那么一定有

$$\mu(V(t))\in L^1(J,\mathbf{R}^+)，且\ \mu\left(\left\{\int_0^t f_n(s)\mathrm{d}s:n\in\mathbf{N}\right\}\right)\leqslant 2\int_0^t\mu(V(s))\mathrm{d}s,\quad t\in J.$$

(2) 如果 $V\in C(J,H)$ 是有界且等度连续的，那么 $\mu(V(t))\in C(J,\mathbf{R}^+)$ 且

$$\mu(V)=\sup\{\mu(V(t)):t\in J\},\ \mu\left(\int_0^t V(s)\mathrm{d}s\right)\leqslant\int_0^t\mu(V(s))\mathrm{d}s,\quad t\in J.$$

这里 $V(t)=\{x(t):x\in V\}\subseteq H$.

引理 3[11]　令 H 是 Hilbert 空间，D 是 H 中闭凸子集，$0\in D$.算子 $F:D\to H$ 是连续的，且满足：对任意可数集合 $M\subseteq D$，$M\subseteq\overline{\operatorname{conv}}(\{0\}\cup F(M))$，那么 M 是相对紧的，则算子 F 在 D 中有不动点.

2　主要结果

为了研究系统(1) 的能控性，给出下列假设：

(H1)函数 f 满足以下条件:

(1)对于任意的 $x\in C([-\tau,0];H)$, $i\in S$, 函数 $t\to f(t,x,i)$ 是强可测的;对于任意的 $t\in J$ a.a., $i\in S$, 函数 $x\to f(t,x,i)$ 是连续的;

(2)存在有界函数 $p(t):J\to\mathbf{R}^+$, 连续非降函数 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 使得

$$\|f(t,x,r(t))\|^2\leqslant p(t)\varphi(\|x\|^2),\quad \liminf_{n\to\infty}\frac{\varphi(n)}{n}=0;$$

(3)存在可积函数 $K_f\in L^1(J;\mathbf{R}^+)$, 对任意的有界集 $D\subset C(J;H)$, 都有

$$\mu(f(t,D_t,r(t)))\leqslant K_f(t)\mu(D_t),$$

其中, $D_t:=\{x_t:x\in D\}\subseteq C([-\tau,0];H)$.

(H2)函数 g 满足以下条件:

(1)对于任意的 $x\in C([-\tau,0];H)$, $i\in S$, 函数 $t\to g(t,x,i)$ 是强可测的;对于任意的 $t\in J$ a.a., $i\in S$, 函数 $x\to g(t,x,i)$ 是连续的;

(2)存在函数 $\psi_n\in L^1(J;\mathbf{R}^+)$, 使得

$$\sup_{\|x\|\leqslant n}\|g(t,x,r(t))\|^2\leqslant\psi_n(t),$$

且

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\int_0^b(b-s)^{2\alpha-2}\psi_n(s)\,\mathrm{d}s}{n}=0;$$

(3)存在可积函数 $K_g\in L^1(J,\mathbf{R}^+)$, 对任意的有界集 $D\subset C(J;H)$, 都有

$$\mu(g(t,D_t,r(t)))\leqslant K_g(t)\mu(D_t),$$

其中, $D_t:=\{x_t:x\in D\}\subseteq C([-\tau,0];H)$.

(H3) $B:U\to H$ 是有界线性算子, $\Theta:L^2(J,U)\to H$ 是线性算子,满足

$$\Theta u=\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)Bu(s)\,\mathrm{d}s,$$

且

(1)算子 Θ 有取值于 $L^2(J,U)\backslash Ker\Theta$ 伪逆算子 Θ^{-1}(见[12,13]),且存在正常数 L_B,L_Θ 使得 $\|B\|\leqslant L_B$, $\|\Theta^{-1}\|\leqslant L_\Theta$;

(2)存在可积函数 $K_\Theta(t)\in L^1(J,\mathbf{R}^+)$, $K_B\geqslant 0$, 对任意有界集 $D_1\subset H$, $D_2\subset U$,

$$\mu((\Theta^{-1}D_1)(t))\leqslant K_\Theta(t)\mu(D_1(t)),$$

$$\mu(B(D_2))\leqslant K_B\mu_U(D_2);$$

(H4)下列不等式成立:

$$l=\left(1+\frac{LK_B\|K_\Theta\|_{L^1}b^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\left(\frac{2Lb^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\|K_f\|_{L^1}+\frac{\alpha Lb^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\alpha-1}\,\Gamma(1+\alpha)}\|K_g\|_{L^1}\right)<1.$$

定理1 若假设(H1)-(H4)成立,则系统(1)在 J 上是能控的.

证明 由假设(H2)(1),对任意的 $x\in H$, 定义控制函数

$$u_x(t)=\Theta^{-1}\Big[\bar{x}-\eta(b)\xi(0)-\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)f(s,x_s,r(s))\mathrm{d}s-\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)g(s,x_s,r(s))\mathrm{d}W(s)\Big](t).$$

使用控制函数 $u_x(t)$, 定义算子 F:

$$(Fx)(t)=\begin{cases}\xi(t), & t\in[-\tau,0],\\ \eta(t)\xi(0)+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\beta(t-s)Bu_x(s)\mathrm{d}s+\\ \quad\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\beta(t-s)f(s,x_s,r(s))\mathrm{d}s+\\ \quad\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\beta(t-s)g(s,x_s,r(s))\mathrm{d}W(s), & \text{a.s.}\ t\in J.\end{cases}$$

下面将证明算子 F 有不动点,这个不动点就是系统(1)的温和解.显然有 $x(b)=(Fx)(b)=\bar{x}$, 即系统(1)是能控的.

对任意的 $\xi(t)\in C^b_{\mathscr{F}_0}([-\tau,0],H)$, 令

$$\hat{\xi}(t)=\begin{cases}\xi(t), & t\in[-\tau,0],\\ \eta(t)\xi(0), & \text{a.s.}\ t\in J,\end{cases}$$

以及 $x(t)=y(t)+\hat{\xi}(t)$. 再定义算子 $G:\{y(t):J\to H, y_0=0\}\to\{y(t):J\to H, y_0=0\}$ 满足

$$(Gy)(t)=\begin{cases}0, & t\in[-\tau,0],\\ \int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\beta(t-s)Bu_y(s)\mathrm{d}s+\\ \quad\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\beta(t-s)f(s,y_s+\hat{\xi},r(s))\mathrm{d}s+\\ \quad\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\beta(t-s)g(s,y_s+\hat{\xi},r(s))\mathrm{d}W(s), & \text{a.s.}\ t\in J,\end{cases}$$

其中

$$u_y(t)=\Theta^{-1}\Big[\bar{x}-\eta(b)\xi(0)-\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)f(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s))\mathrm{d}s-\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)g(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s))\mathrm{d}W(s)\Big](t).$$

容易看出:算子 F 有不动点等价于算子 G 有不动点.

第一步.首先使用反证法证明:存在正数 $n_0\geqslant 1$, 使得 $G(B_{n_0})\subseteq B_{n_0}$, 其中 $B_{n_0}=\{y\in H,\|y\|\leqslant n_0\}$.

若上述结论不成立,对任意的 $n\geqslant 1$, 存在函数 $y^*(\cdot)\in B_n$, 使得 $Gy^*\notin B_n$.

由假设(H1),(H2),计算:

$$n^2 \leqslant E\|Gy^*(t)\|^2 \leqslant$$
$$3E\left\|\int_0^b (b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)Bu_{y^*}(s)\mathrm{d}s\right\|^2 +$$
$$3E\left\|\int_0^b (b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)f(s,y_s^*+\hat{\xi}_s,r(s))\mathrm{d}s\right\|^2 +$$
$$3E\left\|\int_0^b (b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)g(s,y_s^*+\hat{\xi}_s,r(s))\mathrm{d}W(s)\right\|^2, \quad (5)$$

利用 Hölder 不等式,鞅等距性质,以及引理 1(i),计算

$$E\|u_{y^*}\|^2 = 4L_\Theta^2\Big[\|\bar{x}\|^2 + L^2\|\xi\|^2 + \sup_{t\in J}p(t)\frac{b^{2\alpha+1}}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha L}{\Gamma(1+\alpha)}\right)^2\varphi(n'^2) + \left(\frac{\alpha L}{\Gamma(1+\alpha)}\right)^2\int_0^b (b-s)^{2\alpha-2}\psi_{n'}(s)\mathrm{d}s\Big]. \quad (6)$$

其中,$n' = n + (L+1)\|\xi\|$.

把式(6)代入式(5)中,可知:

$$n^2 \leqslant 12L_\Theta^2L_B^2\frac{b^{2\alpha+1}}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha L}{\Gamma(1+\alpha)}\right)^2[\|\bar{x}\|^2 + L^2\|\xi\|^2] + \Big[12L_\Theta^2L_B^2\frac{b^{4\alpha+2}}{\alpha^4}\left(\frac{\alpha L}{\Gamma(1+\alpha)}\right)^4 + 3\frac{b^{2\alpha+1}}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha L}{\Gamma(1+\alpha)}\right)^2\Big]\sup_{t\in J}p(t)\varphi(n'^2) + \Big[12L_\Theta^2L_B^2\frac{b^{2\alpha+1}}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha L}{\Gamma(1+\alpha)}\right)^4 + 3\left(\frac{\alpha L}{\Gamma(1+\alpha)}\right)^2\Big]\int_0^b (b-s)^{2\alpha-2}\psi_{n'}(s)\mathrm{d}s, \quad (7)$$

再对式(7)计算:

$$1 \leqslant 12L_\Theta^2L_B^2\frac{b^{2\alpha+1}}{n^2\alpha^2}\left(\frac{\alpha L}{\Gamma(1+\alpha)}\right)^2[\|\bar{x}\|^2 + L^2\|\xi\|^2] + \Big[12L_\Theta^2L_B^2\frac{b^{4\alpha+2}}{\alpha^4}\left(\frac{\alpha L}{\Gamma(1+\alpha)}\right)^4 + 3\frac{b^{2\alpha+1}}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha L}{\Gamma(1+\alpha)}\right)^2\Big]\sup_{t\in J}p(t)\frac{\phi(n'^2)}{n'^2}\frac{n'^2}{n^2} + \Big[12L_\Theta^2L_B^2\frac{b^{2\alpha+1}}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha L}{\Gamma(1+\alpha)}\right)^4 + 3\left(\frac{\alpha L}{\Gamma(1+\alpha)}\right)^2\Big]\frac{1}{n^2}\int_0^b (b-s)^{2\alpha-2}\psi_{n'}(s)\mathrm{d}s,$$

当 $n\to\infty$ 取极限,由假设(H1)(2)和(H2)(2),产生矛盾. 故存在正数 $n_0 \geqslant 1$,使得 $G(B_{n_0}) \subseteq B_{n_0}$,其中 $B_{n_0} = \{y \in H, \|y\| \leqslant n_0\}$.

第二步. 算子 $G:B_{n_0} \to B_{n_0}$ 连续性. 令 $\{y^{(m)}(t)\}_{m=1}^\infty \subseteq B_{n_0}$,且 $y^{(m)} \to y \in B_{n_0}$.

利用 Hölder 不等式,鞅等距性质,以及假设(H3)(1),计算:

$$E\|(Gy^{(m)}(t) - (Gy)(t)\|^2 \leqslant$$
$$3\int_0^t |(t-s)^{\alpha-1}\beta(t-s)|^2\mathrm{d}sE\int_0^t \|Bu_{y^{(m)}}(s) - Bu_y(s)\|^2\mathrm{d}s +$$
$$3\int_0^t |(t-s)^{\alpha-1}\beta(t-s)|^2\mathrm{d}sE\int_0^t \|f(s,y_s^{(m)} + \hat{\xi}_s,r(s)) - f(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s))\|^2\mathrm{d}s +$$
$$3E\int_0^t \|(t-s)^{\alpha-1}\beta(t-s)(g(s,y_s^{(m)} + \hat{\xi}_s,r(s)) - g(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s)))\|^2\mathrm{d}s \leqslant$$
$$\frac{3L_B^2b^\alpha L^2}{(\Gamma(1+\alpha))^2}E\int_0^t \|u_{y^{(m)}}(s) - u_y(s)\|^2\mathrm{d}s +$$
$$\frac{3b^\alpha L^2}{(\Gamma(1+\alpha))^2}E\int_0^t \|f(s,y_s^{(m)} + \hat{\xi}_s,r(s)) - f(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s))\|^2\mathrm{d}s +$$
$$3E\int_0^t \|(t-s)^{\alpha-1}\beta(t-s)(g(s,y_s^{(m)} + \hat{\xi}_s,r(s)) - g(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s)))\|^2\mathrm{d}s. \quad (8)$$

对于控制函数,由假设(H3)(1)有:

$$E\|u_{y^{(m)}} - u_y\|^2 \leqslant$$
$$2L_\Theta^2\int_0^b |(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)|^2\mathrm{d}sE\int_0^b \|f(s,y_s^{(m)} + \hat{\xi}_s,r(s)) - f(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s))\|^2\mathrm{d}s +$$
$$2L_\Theta^2 E\int_0^b \|(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)(g(s,y_s^{(m)} + \hat{\xi}_s,r(s)) - g(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s)))\|^2\mathrm{d}s \leqslant$$
$$\frac{2L_\Theta^2b^\alpha L^2}{(\Gamma(1+\alpha))^2}E\int_0^b \|f(s,y_s^{(m)} + \hat{\xi}_s,r(s)) - f(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s))\|^2\mathrm{d}s +$$
$$2L^2E\int_0^b \|(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)(g(s,y_s^{(m)} + \hat{\xi}_s,r(s)) - g(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s))\|^2\mathrm{d}s. \quad (9)$$

把式(9)代入式(8)中,由 Lebesgue 控制收敛定理及假设(H1)(1)和假设(H2)(1),当 $y^{(m)}\to y$ 时,$E\|Gy^{(m)} - Gy\|^2 \to 0$.

第三步. 算子 G 是等度连续. 对任意的 $0<t_1<t_2\leqslant b$,$y\in B_{n_0}$,

$$E\|(Gy)(t_2) - (Gy)(t_1)\|^2 \leqslant$$
$$9E\left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}[\beta(t_2-s) - \beta(t_1-s)]Bu_y(s)\mathrm{d}s\right\|^2 +$$
$$9E\left\|\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}]\beta(t_2-s)Bu_y(s)\mathrm{d}s\right\|^2 +$$
$$9E\left\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}\beta(t_2-s)Bu_y(s)\mathrm{d}s\right\|^2 +$$
$$9E\left\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}[\beta(t_2-s) - \beta(t_1-s)]\cdot\right.$$

$f(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s))\mathrm{d}s\Big\|^2+$

$9E\Big\|\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}]\cdot$

$\beta(t_2-s)f(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s))\mathrm{d}s\Big\|^2+$

$9E\Big\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}\beta(t_2-s)f(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s))\mathrm{d}s\Big\|^2+$

$9E\Big\|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}[\beta(t_2-s)-\beta(t_1-s)]\cdot$

$g(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s))\mathrm{d}W(s)\Big\|^2+$

$9E\Big\|\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}]\cdot$

$\beta(t_2-s)g(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s))\mathrm{d}W(s)\Big\|^2+$

$9E\Big\|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}\beta(t_2-s)g(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s))\mathrm{d}W(s)\Big\|^2$

利用 Hölder 不等式,鞅等距性质,计算:

$E\|(Gy)(t_2)-(Gy)(t_1)\|^2\leqslant$

$9\Big|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}[\beta(t_2-s)-\beta(t_1-s)]\Big|^2\mathrm{d}s\cdot$

$E\int_0^b\|Bu_y(s)\|^2\mathrm{d}s+$

$9\Big|\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}]\beta(t_2-s)\Big|^2\mathrm{d}s\cdot$

$E\int_0^b\|Bu_y(s)\|^2\mathrm{d}s+$

$9\Big|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}\beta(t_2-s)\Big|^2\mathrm{d}sE\int_{t_1}^{t_2}\|Bu_y(s)\|^2\mathrm{d}s+$

$9\Big|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}[\beta(t_2-s)-\beta(t_1-s)]\Big|^2\mathrm{d}s\cdot$

$E\int_0^b\|f(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s))\|^2\mathrm{d}s+$

$9\Big|\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}]\beta(t_2-s)\Big|^2\mathrm{d}s\cdot$

$E\int_0^b\|f(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s))\|^2\mathrm{d}s+$

$9\Big|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}\beta(t_2-s)\Big|^2 dsE\int_{t_1}^{t_2}\|f(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s))\|^2 ds+$

$9E\int_0^{t_1}\|(t_1-s)^{\alpha-1}[\beta(t_2-s)-\beta(t_1-s)]g(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s))\|^2\mathrm{d}s+$

$9E\int_0^{t_1}\|[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}]\cdot$

$\beta(t_2-s)g(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s))\|^2\mathrm{d}s+$

$9E\int_{t_1}^{t_2}\|(t_2-s)^{\alpha-1}\beta(t_2-s)g(s,y_s+\hat{\xi}_s,r(s))\|^2\mathrm{d}s.$

由于 $\|y\|\leqslant n$,使用 Lebesgue 控制收敛定理,当 $t_2\to t_1$,上式与 y 无关趋向于 0.如果 $t_2<t_1$,当 $t_2\to t_1$,上式也与 y 无关趋向于 0.因此,算子 $G(B_{n_0})$ 在 J 上是等度连续的.

第四步.Mönch 条件成立.假设对任意可数集合 $M\subseteq B_{n_0}$,$M\subseteq\overline{\mathrm{conv}}\left(\{0\}\cup G(M)\right)$,下证:集合 M 是相对紧的.实际上只需证集合 M 的非紧性测度为 0,即 $\mu(M)=0$.

不妨假设 $M=\{y^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$,因算子 $G(B_{n_0})$ 在 J 上是等度连续的,所以,$G(M)$ 在 J 上是等度连续的.

由非紧性测度性质及假设(H3)(2),计算

$$\mu_U(\{u_{y^{(m)}}(t)\}_{m=1}^{\infty})=\mu\left(\left\{\Theta^{-1}\left[\bar{x}-\eta(b)\xi(0)-\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)f(s,y_s^{(m)}+\hat{\xi}_s,r(s))\mathrm{d}s-\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)g(s,y_s^{(m)}+\hat{\xi}_s,r(s))\mathrm{d}W(s)\right](t)\right]\right\}_{m=1}^{\infty}\right)\leqslant$$
$$K_\Theta(t)\mu\left(\left\{\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)f(s,y_s^{(m)}+\hat{\xi}_s,r(s))\mathrm{d}s\right\}_{m=1}^{\infty}\right)+K_\Theta(t)\mu\left(\left\{\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)g(s,y_s^{(m)}+\hat{\xi}_s,r(s))\mathrm{d}W(s)\right\}_{m=1}^{\infty}\right).\tag{10}$$

由引理 1、引理 2 以及假设(H1)(3)可知:

$$\mu\left(\left\{\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)f(s,y_s^{(m)}+\hat{\xi}_s,r(s))\mathrm{d}s\right\}_{m=1}^{\infty}\right)\leqslant$$
$$2\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)\mu(\{f(s,y_s^{(m)}+\hat{\xi}_s,r(s))\}_{m=1}^{\infty})\mathrm{d}s\leqslant$$
$$2\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)K_f(s)\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant0}\mu(\{y^{(m)}(s+\theta)+\hat{\xi}(s+\theta)\}_{m=1}^{\infty})\mathrm{d}s\leqslant$$
$$2\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)K_f(s)\sup_{0\leqslant\theta\leqslant s}\mu(\{y^{(m)}(s)+\hat{\xi}(s)\}_{m=1}^{\infty})\mathrm{d}s\leqslant$$
$$2\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)K_f(s)\sup_{0\leqslant\theta\leqslant s}\mu(\{y^{(m)}(s)\}_{m=1}^{\infty})\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\frac{2Lb^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\|K_f\|_{L^1}\mu(\{y^{(m)}(s)\}_{m=1}^{\infty}).\tag{11}$$

对任意的 $y',y''\in B_{n_0}$,由鞅等距性质有:

$$E\left\|\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)[g(s,y_s'+\hat{\xi}_s,r(s))-g(s,y_s''+\hat{\xi}_s,r(s))]\mathrm{d}W(s)\right\|^2\leqslant$$
$$E\int_0^b(b-s)^{2\alpha-2}\beta^2(b-s)\|g(s,y_s'+\hat{\xi}_s,r(s))-g(s,y_s''+\hat{\xi}_s,r(s))\|\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\frac{\alpha^2L^2b^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)\Gamma(1+\alpha)^2}\sup_{0\leqslant s\leqslant b}E\|g(s,y_s'+\hat{\xi}_s,r(s))-g(s,y_s''+\hat{\xi}_s,r(s))\|^2$$

由随机微分方程的非紧性测度[14],以及假设

(H2)(3),可知:

$$\mu\left(\left\{\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)g(s,y_s^{(m)}+\hat{\xi},r(s))\mathrm{d}W(s)\right\}_{m=1}^{\infty}\right)\leqslant$$

$$\frac{\alpha Lb^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(2\alpha-1)}\Gamma(1+\alpha)}\|K_g\|_{L^1}\mu(\{y^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}).\quad(12)$$

把式(11)和式(12)代入式(10)中,有

$$\mu_U(\{u_{y^{(m)}}\}_{m=1}^{\infty})=\sup_{t\in J}\mu_U(\{u_{y^{(m)}}(t)\}_{m=1}^{\infty})\leqslant$$

$$\left(\frac{2Lb^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\|K_f\|_{L^1}+\frac{\alpha Lb^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(2\alpha-1)}\Gamma(1+\alpha)}\|K_g\|_{L^1}\right)\mu(\{y^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}),\quad(13)$$

再利用非紧性测度性质,计算

$$\mu(\{Gy^{(m)}(t)\}_{m=1}^{\infty})\leqslant$$

$$\mu\left(\left\{\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\beta(t-s)Bu_{y^{(m)}}(s)\mathrm{d}s\right\}_{m=1}^{\infty}\right)+$$

$$\mu\left(\left\{\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\beta(t-s)f(s,y_s^{(m)}+\hat{\xi}_s,r(s))\mathrm{d}s\right\}_{m=1}^{\infty}\right)+$$

$$\mu\left(\left\{\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\beta(t-s)g(s,y_s^{(m)}+\hat{\xi}_s,r(s))\mathrm{d}W(s)\right\}_{m=1}^{\infty}\right).$$

由 $G(M)$ 等度连续,式(13)及引理 2(2),可知:

$$\mu(\{Gy^{(m)}\}_{m=1}^{\infty})=\sup_{t\in J}\mu(\{Gy^{(m)}(t)\}_{m=1}^{\infty})\leqslant$$

$$\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)K_B\mu_U(\{u_{y^{(m)}}(s)\}_{m=1}^{\infty})\mathrm{d}s+$$

$$\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)K_f(s)\mu(\{f(s,y_s^{(m)}+\hat{\xi},r(s))\}_{m=1}^{\infty})\mathrm{d}s+$$

$$\mu\left(\left\{\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}\beta(b-s)g(s,y_s^{(m)}+\hat{\xi},r(s))\mathrm{d}W(s)\right\}_{m=1}^{\infty}\right)\leqslant$$

$$\left(1+\frac{LK_B\|K_\Theta\|_{L^1}b^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\left(\frac{2Lb^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\|K_f\|_{L^1}+\frac{\alpha Lb^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(2\alpha-1)}\Gamma(1+\alpha)}\|K_g\|_{L^1}\right)\mu(\{y^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}).$$

由 Mönch 条件:

$$\mu(M)\leqslant\mu\left(\overline{\mathrm{conv}}\left(\{0\}\cup G(M)\right)\right)=\mu(G(M))\leqslant l\mu(M),$$

因为 $l<1$,集合 M 的非紧性测度为 0,M 是相对紧的,故算子 G 在 B_{n_0} 上有不动点 y.那么 $x=y+\hat{\xi}$ 是算子 F 的不动点,即系统(1)在 J 上是能控的.

3 例子

作为应用,考虑分数阶混合随机泛函微分方程:

$$^cD_t^{\alpha}x(t,z)=\frac{\partial}{\partial z}x(t,z)+m(z)u(t,z)+f(t,x(t-\tau,z),r(t))+g(t,x(t-\tau,z),r(t))\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t},$$

$$t\in J:=[0,b],\quad(14)$$

其初值 $x_0=\xi(t)\in C_{\mathscr{F}_0}^b([-\tau,0];H)$,$r(0)=r_0$,$-\tau\leqslant t\leqslant 0$.

令 $U=H=L^2([0,\pi])$,算子 $A:H\to H$ 定义为 $Ax=x'$,其定义域为 $D(A)=\{x\in H:x$ 是绝对连续且 $x'\in H,x(0)=0\}$.A 是半群 $T(t)$ 的无穷小生成元.对任意的 $x\in H$,$T(t)x(s)=x(t+s)$,$T(t)$ 在 H 不是紧半群[15].对任意的有界集合 D,$\mu(T(t)D)\leqslant\mu(D)$.

令 $r(t)$,$t\geqslant 0$ 是在概率空间上右连续 Markov 链,且取值为有限的状态空间 $S=\{1,2\}$,其生成元 $\Upsilon=(r_{ij})_{N\times N}$,

$$\Upsilon=\begin{pmatrix}-2&2\\1&-1\end{pmatrix}.$$

有界线性控制算子 $B:H\to H$ 定义为:$(Bu)(z)=m(z)u(t,z)$,$z\in[0,\pi]$ a.e.满足假设(H3).

函数 $f:J\times C([-\tau,0];H)\times S\to H$ 是连续函数,$f(t,x(t-\tau),1)=\sin(x(t-\tau))$,$f(t,x(t-\tau),2)=\cos(x(t-\tau))$.满足假设(H1).

函数 $g:J\times C([-\tau,0];H)\times S\to\mathscr{L}_{HS}(H)$ 是连续函数,$g(t,x(t-\tau),1)=\dfrac{x(t-\tau)}{1+x(t-\tau)}$,$g(t,x(t-\tau),2)=\log(1+x(t-\tau))$.满足假设(H2).由定理 1 可知系统(11)在 J 上是能控的.

参考文献
References

[1] Podlubny I.Fractional differential equations[M].San Diego:Academic Press,1999

[2] Mao X, Yuan C. Stochastic differential equations with Markovian switching [M]. London: Imperial College Press,2006

[3] Zhou Y, Jiao F. Existence of mild solution for fractional neutral evolution equations [J]. Computers & Mathematics Applications,2010,59(3):1063-1077

[4] Li K X, Peng J G, Gao J H. Existence results for semilinear fractional differential equationsvia Kuratowski measure of noncompactness[J]. Fractional Calculus & Applied Analysis,2012,15(4):591-610

[5] Zang Y C, Li J P. Approximate controllability of fractional impulsive neutral stochastic differential equations with nonlocal conditions[J].Boundary Value Problems,2013,2013(1):1-13

[6] Guendouzi T, Bousmaha L. Approximate controllability of fractional neutral stochastic functional integro-differential inclusions with infinite delay[J]. Qualitative Theory of Dynamical Systems,2014,13(1):89-119

[7] Yan Z M, Lu F X. On approximate controllability of frac-

tional stochastic neutral integro-differential inclusions with infinite delay [J]. Applicable Analysis, 2015, 94 (6): 1235-1258

[8] Balasubramaniam P, Tamilalagan P. Approximate controllability of a class of fractional neutral stochastic integro-differential inclusions with infinite delay by using Manardi's function[J]. Applied Mathematics & Computation, 2015, 256(1): 232-246

[9] Li K X, Peng J G. Controllability of fractional neutral stochastic functional differential systems [J]. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 2014, 65 (5): 941-959

[10] Heinz H P. On the behavior of measures of noncompactness with respect to differentiation and integration of vector-valued functions [J]. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 1983, 7(12): 1351-1371

[11] Mönch H. Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces [J]. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, 1980, 4(5): 985-999

[12] Triggiani R. A note on the lack of exact controllability for mild solutions in Banach spaces [J]. SIAM Journal on Control & Optimization, 1977, 15(3): 407-411

[13] Quinn M D, Carmichael N. An approach to nonlinear control problems using fixedpoint methods, degree theory and pseudo-inverses [J]. Numerical Functional Analysis & Optimization, 2007, 7(2): 197-219

[14] Dehici A, Redjel N. Measure of noncompactness and application to stochastic differential equations[J]. Advances in Difference Equations, 2016, 2016(1): 1-17

[15] Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations [M]. New York: Springer Verlag, 1983

Controllability of fractional hybrid stochastic functional differential equations

YANG Jiashun[1] HU Junhao[1]

1 School of Mathematics and Statistics, South-Central University for Nationalities, Wuhan 430074

Abstract This paper considers the controllability of a class of fractional hybrid stochastic functional differential equations. In infinite dimension space, by using measure of noncompact and Mönch fixed point theorem, the sufficient conditions of controllability of the equations are obtained under the assumption that the semigroup generated by the linear part of the equations is not compact. Finally, an example is given to illustrate the effectiveness of the result.

Key words fractional differential equations; hybrid stochastic differential equations; controllability; measure of noncompact; Mönch fixed point theorem