



带有劳动收入的最优消费和投资问题研究进展

摘要

现代投资组合理论一直是金融工程中活跃的研究方向.首先阐述了消费-投资组合问题的研究现状,介绍了不同时期国内外学者的研究成果和方法,接着较为详细地论述了带有劳动收入的最优消费和投资组合问题并给出了所要研究的模型,即含有时变的投资机会和动态劳动收入的模型,最后给出所要研究模型在通胀环境和 Knight 不确定下的拓展框架.

关键词

投资组合;劳动收入;HJB 方程;通货膨胀;Knight 不确定

中图分类号 O211.63;F830.9

文献标志码 A

0 引言

现代投资组合理论,最早是由 1990 年度诺贝尔经济学奖获得者 Markowitz 在 1952 年提出的,他通过采用风险资产的预期收益率和方差(标准差)代表的风险来研究资产的选择问题.这被看作是现代资产投资组合理论的起点,开创了在不确定性条件下理性投资者进行资产投资组合投资的新领域.1965 年 Tobin 将静态的单期模型延伸到多期模型.基于 Markowitz 等工作,Sharpe 在 1964 年建立了众所周知的资本资产定价模型(CAMP),这是一个非常重要的价格模型.Lintner 在 1965 年研究了股票投资组合与预算约束下风险投资选择和风险资产评估问题并提出了重要的金融理论.此后消费和投资组合选择问题一直是国内外学者研究的热点之一.

在金融研究领域中,最优消费和投资组合问题一直以来都是国内外学者研究的一个最基本的问题.在 1969 年,投资组合问题的研究迈出了重要的一步.Merton^[1]利用动态规划方法研究了在连续时间里一个多期框架下的消费和投资决策问题,在 CRRA 效用函数和风险资产是对数正态分布的假设下得到了最优消费和投资的闭形式解.一些国外学者在 Merton^[1]的基础上探讨了投资机会在时变情形下的动态投资组合决策.Kim 等^[2]分析了动态非短视投资组合行为,利用 HARA 效用函数研究了终端财富期望效用最大化投资者的资产组合选择问题;Campbell 等^[3]探讨了预期收益在时变情形下的消费和投资组合决策问题;Campbell 等^[4]研究了在连续时间向量自回归模型下的资产分配策略,同时分析了一个风险资产的风险溢价在服从一个均值回复过程的跨期消费和投资组合决策问题;Barberis^[5]分析了在资产收益是可预测的情况下对长期投资者的最优投资组合选择的影响;Chacko 等^[6]分析了不完备市场下带有随机波动的动态消费和投资组合决策问题,表明在连续时间的递归效用框架下,相对风险厌恶系数对投资组合的影响较大,而跨期替代的弹性对投资策略影响较小;He 等^[7]利用鞅方法研究了在不完备市场的情况下带有卖空限制的动态消费和投资组合问题,其中考虑的是无限维情形;Wachter^[8]给出了完备市场下带有均值回复收益的消费和投资组合决策的一个精确解;Schroder 等^[9]分析了随机微分效用下的最优消费和投资决策问题;Pliska^[10]通过建立一个连续交易的随机分析模型,利用鞅方法找出了可容许交易策略,从而选择出最优投资组合策略.

收稿日期 2015-07-19

资助项目 国家自然科学基金(71171003,71571001)

作者简介

梁勇,男,博士生,讲师,研究方向为金融数学与金融工程.liangyong@ahpu.edu.cn

费为银(通信作者),男,博士,教授,博士生导师,研究方向为金融数学与金融工程.wyfei@ahpu.edu.cn

¹ 安徽工程大学 数理学院,芜湖,241000

还有其他学者针对股票收益、股权溢价等方面进行了研究。Campbell 等^[11]分析了一个基于消费模型下的各种各样的动态资产定价现象,包括股票价格的顺周期变化、超额股票收益的长期可预测性和股票市场波动的反周期变化,同时根据投资者的习惯,研究了消费增长和股票市场的相互关系,并得到了当消费下降(上升)时,预期收益、收益波动率、风险价格和价格/红利率下降(上升)的结论;Campbell 等^[12]发现了基于金融理论参数约束可以增强股票收益的样本外预测;Cochrane^[13]探讨了股票收益和红利增长之间的关系,分析了股票收益的可预测性和红利增长的可预测性对股票价格的影响,其中若在股票收益和红利增长都不能预测的情况下,红利价格率是常数;Fama 等^[14]研究了红利收益率和预期股票收益的问题,其中将红利收益率作为一个因子来分析它对预期收益的影响;Goyal 等^[15]通过线性回归分析方法来研究股权溢价的预测性;Pástor 等^[16]研究了股权溢价和结构突变的问题。

近年来,国内学者也对最优消费和投资问题展开了研究。费为银等^[17]研究了最优消费投资问题,推广了现有的模型,考虑了带预期的最优消费投资模型。他们利用鞅方法和对偶技术建立了最优策略的存在性,并就对数效用投资者,建立了明确的最优消费投资公式。杨招军^[18]研究了部分信息下极大化终止时刻期望效用的最优投资策略问题。刘海龙等^[19]在假设证券收益存在有界不确定干扰和考虑交易费用的情况下,基于微分对策理论,研究了最差情况下的最优消费和投资策略问题。

上述文献对消费和投资组合做了大量研究,但是基本上没考虑人力资本问题,即投资者带有劳动收入的问题。因此,以下探讨了带有劳动收入的最优消费和投资组合问题。

1 带有劳动收入的最优消费投资

在现实生活中,投资者一般都拥有劳动收入,即在财富中有劳动收入流。所以,研究带有劳动收入情况的最优消费和投资组合问题更具有现实意义。但是若投资者拥有随机的工资收入,消费投资问题就复杂化了,原因有两个方面:第一,在现实生活中,由于流动性约束,投资者不能提前消费未来的工资收入,也就是说,投资者必须始终保持他的财富大于零;第二,存在不可保险的工资风险,即利用证券市场的证券组合不能规避工资收入的风险。由于存在

流动性约束和不可规避的工资风险导致了解决消费投资问题的复杂。

Merton^[20]给出了当投资者拥有确定的收入流情况下的最优策略,他指出该情况下具有确定劳动收入投资者的最优效用等价于无收入但是将财富禀赋加上劳动收入流后按无风险利率贴现得到现值的投资者的效用。Bodie 等^[21]检验了在一个投资者的生命周期内,劳动-闲暇选择对投资者的消费和投资决策的影响,其中考虑的是允许投资者连续消费和在风险资产中连续交易的一个生命周期模型,并分别讨论了非随机工资情形和随机工资情形,强调了灵活的劳动供给的价值。对大多数人而言,劳动供给弹性会随着年龄的增长而下降,也就是有效的人力资本会随着年龄的增长而下降。对于年轻的上班族来说,他们的主要财产是未来的劳动收入,接近退休时,金融财富增加很多,但是人力资本财产几乎完全耗尽。因此年轻的投资者更愿意投资风险资产,承担更多的风险。Viceira^[22]分析了带有不可分散的劳动收入风险和外生的预期退休和寿命期限的长期投资者的最优投资组合选择问题,其中劳动收入是不可交易的,得到了当劳动收入风险和股票收益风险无关时,就业的投资者要比退休的投资者把更多的存款投入到股票市场的结论,同时也检验了增长的劳动收入风险对投资者的存款和投资组合的影响。Koo^[23]用一个连续时间方法研究了一个代理人带有流动性限制和不可保的收入风险时的消费和投资选择问题。Heaton 等^[24]研究了含有劳动收入和创业收入时的背景风险对投资组合选择的影响并指出了创业风险的重要性,说明了当一个人拥有高度的商业风险时应该持有较少的股票。Munk^[25]研究了在不可分散收入风险和流动性限制下的最优消费和投资策略问题,其中金融市场是不完备的并且收入是不可交易资产。Pliaka 等^[26]研究了投资者在不确定寿命下的最优寿险购买和消费投资问题,其中考虑的是一个寿命不确定并且以工资为生的投资者,利用动态规划方法对 CRRA 效用族获得显式解,得到最优保险和消费投资策略。Munk 等^[27]探讨了带有随机收入和随机利率的动态资产分配问题,通过建立、校正和求解一个带有随机收入和随机利率的模型,给出了长期投资者的最优策略,分析了不确定劳动对股票、债券、现金分配的影响。

从理论视角看,存在风险的劳动收入对资产选择会产生财富效应和替代效应。当投资者面对较大

劳动收入风险时,持有股票的比例较小,但这一替代效应很小,所以劳动收入产生的财富效应对最优资产配置起决定作用,但劳动收入的风险替代效应所起的作用较小.Schwartz 等^[28]将劳动收入看作不可交易资产劳动力的红利,其假设劳动力价值服从对数正态过程,而“红利率”为常数.在这样的模型设定下,通过对偶变换给出了对偶值函数的一个级数展开解.Moos^[29]研究了在时变的投资机会和动态的非金融收入(劳动收入)下的最优消费和投资问题,其中劳动收入增长和预期收益服从一个均值回复过程,在此基础上对投资者的退休和就业两个阶段进行分析,得出最优消费和投资策略.

还有其他学者在借贷限制、半鞅模型、生命周期理论、商业周期频率条件下研究随机收入问题.He 等^[30]利用一种对偶方法研究了存在随机劳动收入和借贷限制时的最优消费和投资组合策略的问题.Duffie 等^[31]探讨了值函数的性质和在随机劳动收入下的最优策略,其中是在不完备市场下考虑投资者带有一个不可复制的随机收入并带有 HARA 效用和借贷限制,通过解对应的 HJB 方程得到最优策略.Cvitanic 等^[32]分析了非完备半鞅市场中带随机收入的终端财富效用最优问题,通过建立的对偶问题和对偶域给出了最优解的存在性.Cocco 等^[33]研究了投资者生命周期内的消费和投资组合选择问题,通过在劳动收入的一个真实校准下,分析了不同劳动收入风险(如农业、公共设施等)对投资者在生命周期内最优消费和投资组合的影响.Benzoni 等^[34]探讨了对于一个带有 CRRA 效用并且有不可交易的劳动收入的投资者,当股票和劳动力市场具有协整关系时,投资者在其生命周期上的最优消费和投资组合问题.这样的一个协整关系使得风险厌恶充分大的投资者大大减少股票持有量.Dybvig 等^[35]研究了在退休时刻和带有借贷限制时投资者终生的消费和投资问题.通过构建生命周期的消费和投资模型,分析了在退休时刻和有无借贷限制情况下的最优消费和投资组合策略,其中借贷限制与劳动收入相关,即能否免费预支未来的劳动收入.Lynch 等^[36]分析了以商业周期频率的劳动收入对投资组合的影响,其中考虑了带有劳动收入过程的就业阶段和没有劳动收入的退休阶段的两种情形,紧接着利用 CRRA 效用函数得到投资者的消费和投资组合策略.

上述的文献研究指出,因为劳动收入的存在,投资者增加对股票的需求,特别是在年轻的时候,但就

资产组合配置的生命周期循环模式而言,随着投资者年龄的增长,其在股票上的投资下降.因为随着年龄的增长,劳动收入变得越来越不重要,投资者可以通过无风险资产的持有来代替对股票的投资,故而投资者在资产组合选择过程中越来越倾向于无风险资产的投资.

近来国外学者还研究了劳动收入对其他方面的影响,如 Campbell^[37]探讨了家庭在面临不同的风险时的理财行为,其中分析了劳动收入作为不可交易资产对家庭投资组合的影响;Santos 等^[38]研究了劳动收入和可预测的股票收益问题,通过建立一个简单的一般平衡模型来论证财富中包含劳动收入时对资产定价的影响,并得出劳动收入对消费的比率应该能预测股票收益.

国内也有学者研究了劳动收入对投资者的消费和投资的影响.丁传明等^[39]研究了在不完备金融市场上有红利支付和随机收入情况下的最优投资和消费问题;苏凯等^[40]研究了考虑股票派发红利的情形下,经济代理人通过不可逆退休时间选择来调整劳动时间框架下的最优消费和投资问题;费为银等^[41]探讨了在股票支付红利的情况下,考虑投资者遗产并结合保险,研究了3种不同借贷约束下的消费和投资问题,其中借贷约束条件与劳动收入有关;朱永王等^[42]研究了带有习惯形成、随机机会集、随机工资和劳动供给弹性的生命周期下的消费-投资和闲暇选择问题.

通过上述大量文献的论述,我们知道了劳动收入对投资者的消费和投资组合选择有重要的影响.然而在时变的投资机会和动态非金融收入(劳动收入)下的消费和投资组合问题还没有得到更多的关注,因此根据 Moos^[29]的文章给出下面模型.

代理人在时刻 t 时剩余寿命的消费效用条件期望为

$$E_t \left[\int_t^T e^{-\delta s} \frac{(c(s) - \bar{c})^{1-\gamma}}{1-\gamma} ds \right], \quad \gamma > 1,$$

其中 $\bar{c} > 0$ 是维持生计的消费水平, $\delta \geq 0$ 是时间折现率, $\tau = T - t$ 是固定的和确定的时间期限, $c(t)$ 是消费者在 t 时的消费率, γ 是风险厌恶率.

进一步假设风险资产(股票)的预期收益在一个状态变量上是仿射的并且有恒定的波动率,即股票价格满足:

$$dS_1(t) = S_1(t) [(\lambda_1 X(t) + r_0)dt + \sigma_s dW_s(t)],$$

其中 λ_1 是风险资产的预期收益率且 $\lambda_1 > 0$, σ_s 是风

险资产的扩散项系数且 $\sigma_s > 0$, r_0 是短期利率, 无风险资产价格满足 $dS_0(t) = S_0(t)r_0 dt$, 在这个框架下,

风险的市场价格为 $\theta(t) \equiv \frac{\lambda_1}{\sigma_s} X(t)$.

状态变量 $X(t)$ 的动力学方程由下式给定:

$$dX(t) = -\kappa_x(X(t) - \bar{X})dt + \sigma_x dW_x(t),$$

其中 κ_x 是状态变量的均值回复系数且 $\kappa_x \geq 0$, \bar{X} 是状态变量的长期均值且 $\bar{X} \geq 0$, σ_x 是状态变量的扩散项系数且 $\sigma_x \geq 0$.

$Y(t)$ 定义为风险劳动收入并满足下面方程:

$$dY(t) = Y(t) [(y_0 + y_1 X(t))dt + \sigma_y dW_y(t)],$$

其中 y_0 是劳动收入增长的常数部分, y_1 是劳动收入增长在状态变量上的敏感度, σ_y 是风险劳动收入的扩散项系数且 $\sigma_y \geq 0$.

在这个模型下假设投资者的生命分为两个阶段: 一个是就业阶段, 另一个是退休阶段. 在 0 到 T_r 这个时间段投资者拥有劳动收入, 在 $T_r \leq t \leq T$ 这个时间段, 投资者没有非金融收入, 必须从积累的财富中保证消费. 其中 T_r 表示投资者的退休时刻, T 表示投资者寿命终止时刻.

在退休阶段, 投资者的金融财富动力学方程为

$$dA(t) = (\pi(t)A(t)\lambda_1 X(t) + A(t)r_0 - c(t))dt + \pi(t)A(t)\sigma_s dW_s(t).$$

投资者的间接效用函数为

$$J(t, X, A) = \frac{1}{1-\gamma} e^{-\delta(T-t)} \left[\int_0^\tau e^{\frac{1}{\gamma}(c_0(s)+c_1(s)X+\frac{1}{2}c_2(s)X^2)} ds \right]^\gamma (A - R(\tau))^{1-\gamma},$$

其中 $\tau \equiv T - t$. 弥补维持生计消费的储备金为

$$R(\tau) = \frac{\bar{c}}{r_0} (1 - e^{-r_0 \tau}).$$

通过动态规划方法, 利用 HJB 方程求解得到最优投资和消费 (π_t^*, c_t^*) .

对于就业阶段, 由于劳动收入的存在, 所以金融财富的动力学方程为

$$dA(t) = (\pi(t)A(t)\lambda_1 X(t) + A(t)r_0 + Y(t) - c(t))dt + \pi(t)A(t)\sigma_s dW_s(t).$$

投资者的间接效用函数为

$$J(t, X, A) = \frac{1}{1-\gamma} e^{-\delta(T-t)} \left[\int_0^\tau e^{\frac{1}{\gamma}(c_0(s)+c_1(s)X+\frac{1}{2}c_2(s)X^2)} ds \right]^\gamma.$$

$$(A + k(\tau_r, X)Y - R(\tau))^{1-\gamma},$$

其中 $\tau \equiv T - t$, $\tau_r \equiv T_r - t$. $k(\tau_r, X)$ 是状态变量的函数并且直到退休时刻的时间期限, $R(\tau)$ 是直到计划投资期结束的时间期限的函数. 通过动态规划方法,

利用 HJB 方程求解得到最优投资和消费 (π_t^*, c_t^*) .

2 带有劳动收入的消费-投资组合模型的拓展

以下针对通胀情形和 Knight 不确定问题进行分析, 通过分析得出上述模型可以在这两个框架下进行拓展并给出相应的思路.

2.1 通胀情形下带有劳动收入的最优消费和投资组合

通货膨胀是一种背景风险, 意味着每个投资者都要面对的风险不仅仅是与风险资产收益有关的. 自 2008 年金融危机爆发以来, 由于进口原材料的上涨, 人力成本的增加等因素, 中国也面临着严峻的通货膨胀. 而这种变化着的通货膨胀也影响了中国证券市场, 影响投资者对风险资产的投资比率和投资组合, 因此越来越多的学者开始研究通货膨胀对最优消费和投资组合带来的影响. 例如, Campbell 等^[43] 主要是通过运用仿射模型把无风险利率和通货膨胀作为影响债券收益率的状态变量, 从而在离散时间下考察了长期投资者的最优资产配置; Brennan 等^[44] 采用连续时间模型方法研究了动态投资组合最优化问题, 其中投资期限是有限的, 短期利率是影响债券价格变化的唯一状态变量, 此后将通货膨胀引入状态变量集中, 认为多种因素共同影响和决定债券价格; Bensoussan 等^[45] 在消费篮子价格完全可观察下和部分可观察下的情况分别给出了带通胀的最优消费和投资策略; Munk 等^[46] 探讨了在通胀情形下, 基于幂效用函数的投资者可以投资于现金、名义债券和股票的最优资产配置, 并利用美国的股票、债券和通胀数据去校验资本市场; 丁传明等^[47] 利用随机分析方法, 给出了在考虑通货膨胀率影响下的最优消费和投资; 费为银等^[48] 研究了 Knight 不确定下带通胀的最优消费和投资模型, 其中区别含糊与含糊态度, 得出了三基金定理, 并在 CRRA 效用下得到了消费和投资的显式解, 并分析了通胀因素对最优消费和投资决策的影响; Fei^[49] 研究了基于马尔可夫转换和通胀情形下的最优消费和投资组合; 费为银等^[50] 研究了极端事件冲击下带通胀的最优投资组合选择问题; 梁勇等^[51] 探讨了 Knight 不确定及机制转换环境下带通胀的最优投资问题; 费为银等^[52] 研究了通胀服从均值回复过程的最优消费和投资决策问题; 费为银等^[53] 研究了跳扩散环境下带通胀的最优动态资产配置.

综合上述文献, 为了适应真实的市场环境, 我们

的理论研究应该考虑这种环境的变化,即在带有随机劳动收入的模型中考虑通胀因素带来的影响,使得模型更加贴近现实,符合目前通货膨胀情形下的中国经济环境.基于 Bensoussan 等^[45]及费为银等^[48]的工作,利用现代随机微分方程理论可得到带有劳动收入的最优消费和投资策略.

2.2 Knight 不确定下带有劳动收入的最优消费和投资组合

在现实世界中,我们经常面对两种不确定,即概率不确定和 Knight 不确定(模型不确定或者含糊).Knight 不确定是由于不完备的信息、不明确的数据、不精确的概率等引起的.Knight 不确定最早是由 Knight^[54]提出来的,一般被认为是不同于风险的一类主观不确定性.含糊厌恶在文献[55]中则被描述为“最大化最小期望效用”,他们建立了决策者带有先验集,并计算在先验集中的行为产生的最小期望折现效用的 MEU 模型.Chen 等^[56]通过连续时间多先验效用跨期形式的刻画,解释了“风险溢价”和独立“含糊溢价”现象.

基于 Knight 不确定下的最优消费和投资组合问题也有学者进行了研究.Fei^[57]在区别含糊和风险的情形下,采用递推多先验效用函数,研究带有预期和含糊的最优消费和投资问题;Fei^[58]运用 α -极大极小期望 CES 效用模型研究了一个无限寿命投资者的最优消费-闲暇、投资组合和退休选择问题,其中区别了含糊和含糊态度;费为银等^[59]研究了 Knight 不确定下考虑负效用的消费和投资问题;李娟等^[60]研究了奈特不确定下资产收益率发生紊乱的最优投资模型;刘宏建等^[61]研究了 Knight 不确定下考虑保险和退休的最优消费-投资和遗产问题;刘宏建等^[62]研究了股价波动率具有模型不确定的最优消费与投资问题.在奈特不确定下的最优消费投资问题在文献[63-66]中得到进一步研究.

然而,上述文献中不确定性是资产价格预期收益率具有奈特不确定性,而 G-Brown 环境下资产价格的波动率具有奈特不确定性如何研究是一个值得研究的课题.为此,Peng^[67]研究了非线性期望特别是次线性期望,得出了非线性期望空间下的大数定律和中心极限定理,提出了最大化分布和 G-标准正态分布以及 G-布朗运动,研究了 G-伊藤积分、G-鞅、Jensen 不等式以及相应的随机微分方程等.Fei 等^[68]在此基础上提出了 G-Brown 运动下的最大化原理和相应的 HJB 方程,他们指出在金融市场中,受到 G-

Brown 运动干扰的随机控制系统对于描述真实世界的随机性和模型不确定性是非常重要的,并建立了在模型不确定下连续时间的效用模型,提供了带有模型不确定的随机控制系统的框架,以及其在最优消费和投资组合方面的应用.费为银等^[69]研究了风险资产价格具有奈特不确定下对冲基金管理者最优投资策略问题,他们建立了基金管理者在风险资产和无风险资产上投资的模型,此时风险资产受 G-Brown 运动干扰,通过非线性期望下随机分析和随机动态规划方法推导出带有特定边界条件的值函数的 G-HJB 方程,得出相应的基金管理者最优投资组合策略.

因此,在含有劳动收入的模型中可以考虑 G-Brown 运动环境下资产价格的波动率具有奈特不确定性,进而更贴近现实,具有现实的经济意义.

3 总结

本文首先简单地阐述了现代投资理论的发展,进一步更加深入地阐述最优消费和投资组合问题的研究现状,分析了国内外学者在这方面的研究进展.接着结合先前学者的研究,提出了带有劳动收入的消费和投资组合问题,并较为详尽地阐述了国内外学者在这方面的研究现状.

其次,分析了带有劳动收入的消费-投资组合模型,并着重阐述了含有时变的投资机会和动态劳动收入的模型,将投资者的生命周期分为就业阶段和退休阶段,针对这两个阶段给出了最优消费和投资组合问题的基本分析过程.

最后从通货膨胀和 Knight 不确定两个方面对所研究的模型进行展望.首先综述了通胀下最优消费和投资的研究现状,并指出在此背景下考虑带劳动收入的最优消费和投资问题的解决是未来研究方向之一;其次,阐述了 Knight 不确定问题,给出了资产价格预期收益率具有奈特不确定性的相关文献,进而分析得出 G-Brown 运动环境下考虑带有劳动收入的最优消费和投资组合是值得研究的问题.

参考文献

References

- [1] Merton R C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous time case[J]. The Review of Economic and Statistics, 1969, 51(3): 247-257
- [2] Kim T S, Omberg E. Dynamic nonmyopic portfolio behavior[J]. The Review of Financial Studies, 1996, 9(1): 141-161

- [3] Campbell J Y, Viceira L M. Consumption and portfolio decisions when expected returns are time varying[J]. Quarterly Journal of Economics, 1999, 114(2):433-495
- [4] Campbell J Y, Chacko G, Rodriguez J, et al. Strategic asset allocation in a continuous time VAR model[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2004, 28(11):2195-2214
- [5] Barberis N. Investing for the long run when returns are predictable[J]. The Journal of Finance, 2000, 55(1):225-264
- [6] Chacko G, Viceira L M. Dynamic consumption and portfolio choice with stochastic volatility in incomplete markets[J]. The Review of Financial Studies, 2005, 18(4):1369-1402
- [7] He H, Pearson N D. Consumption and portfolio policies with incomplete markets and short-sale constraints: The infinite dimensional case [J]. Journal of Economic Theory, 1991, 54(2):259-304
- [8] Wachter J A. Portfolio and consumption decisions under mean-reverting returns: An exact solution for complete markets[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 2002, 37(1):63-91
- [9] Schroder M, Skiadas C. Optimal consumption and portfolio selection with stochastic differential utility[J]. Journal of Economic Theory, 1999, 89(1):68-126
- [10] Pliska S R. A stochastic calculus model of continuous trading: Optimal portfolios[J]. Mathematics of Operations Research, 1986, 11(2):371-382
- [11] Campbell J Y, Cochrane J H. By force of habit: A consumption-based explanation of aggregate stock market behavior[J]. The Journal of Political Economy, 1999, 107(2):205-251
- [12] Campbell J Y, Thompson S B. Predicting excess stock returns out of sample: Can anything beat the historical average? [J]. The Review of Financial Studies, 2008, 21(4):1509-1531
- [13] Cochrane J H. The dog that did not bark: A defense of return predictability[J]. The Review of Financial Studies, 2008, 21(4):1533-1575
- [14] Fama E F, French K R. Dividend yields and expected stock returns[J]. Journal of Financial Economics, 1988, 22(1):3-25
- [15] Goyal A, Welch I. A comprehensive look at the empirical performance of equity premium prediction [J]. The Review of Financial Studies, 2008, 21(4):1455-1508
- [16] Pástor L, Stambaugh R F. The equity premium and structural breaks[J]. The Journal of Finance, 2001, 56(4):1207-1239
- [17] 费为银, 吴让泉, 周少甫. 带预期的最优消费选择: 鞅方法[J]. 数学杂志, 2001, 21(2):137-144
FEI Weiyin, WU Rangquan, ZHOU Shaofu. Optimal consumption choices with anticipation: Methods of martingale [J]. Journal of Mathematics (PRC), 2001, 21(2):137-144
- [18] 杨招军. 部分信息下极大化终止时刻期望效用[J]. 控制理论和应用, 2005, 22(5):708-712
YANG Zhaojun. Maximizing the expected utility from terminal wealth under the case of partial information[J]. Control Theory & Applications, 2005, 22(5):708-712
- [19] 刘海龙, 吴冲锋. 基于最差情况的最优消费和投资策略[J]. 管理科学学报, 2001, 4(6):48-54
LIU Hailong, WU Chongfeng. Optimal consumption and investment strategy based on worst-case [J]. Journal of Management Sciences in China, 2001, 4(6):48-54
- [20] Merton R C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model[J]. Journal of Economic Theory, 1971, 3(4):373-413
- [21] Bodie Z, Merton R C, Samuelson W F. Labor supply flexibility and portfolio choice in a life cycle model [J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 1992, 16(3/4):427-449
- [22] Viceira L M. Optimal portfolio choice for long-horizon investors with nontradable labor income[J]. The Journal of Finance, 2001, 56(2):433-470
- [23] Koo H K. Consumption and portfolio selection with labor income: A continuous time approach [J]. Mathematical Finance, 1998, 8(1):49-65
- [24] Heaton J, Lucas D. Portfolio choice and asset prices: The importance of entrepreneurial risk[J]. The Journal of Finance, 2000, 55(3):1163-1198
- [25] Munk C. Optimal consumption/investment policies with undiversifiable income risk and liquidity constraints [J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2000, 24(9):1315-1343
- [26] Pliska S R, Ye J. Optimal life insurance purchase and consumption/investment under uncertain lifetime [J]. Journal of Banking & Finance, 2007, 31(5):1307-1319
- [27] Munk C, Sørensen C. Dynamic asset allocation with stochastic income and interest rates [J]. Journal of Financial Economics, 2010, 96(3):433-462
- [28] Schwartz E S, Tebaldi C. Illiquid assets and optimal portfolio choice [R]. Working Paper, NBER, 2006
- [29] Moos D. Portfolio and consumption decisions under mean-reverting returns and mean-reverting labor income growth [EB/OL]. [2015-06-18]. Preprint, <https://www.alexandria.unisg.ch/Publikationen/72495>
- [30] He H, Pagès H F. Labor income, borrowing constraints, and equilibrium asset prices [J]. Economic Theory, 1993, 3(4):663-696
- [31] Duffie D, Fleming W, Soner H M, Zariphopoulou T. Hedging in incomplete markets with HARA utility [J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 1997, 21(4/5):753-782
- [32] Cvitanic J, Pham H, Touzi N. A closed-form solution to the problem of super-replication under transaction costs [J]. Finance and Stochastics, 1999, 3(1):35-54
- [33] Cocco J F, Gomes F J, Maenhout P J. Consumption and portfolio choice over the life cycle [J]. The Review of Financial Studies, 2005, 18(2):491-533
- [34] Benzoni L, Collin-Dufresne P, Goldstein R S. Portfolio choice over the life-cycle when the stock and labor markets are cointegrated [J]. The Journal of Finance, 2007, 62(5):2123-2167
- [35] Dybvig P H, Liu H. Lifetime consumption and investment: Retirement and constrained borrowing [J]. Journal of Economic Theory, 2010, 145(3):885-907

- [36] Lynch A W, Tan S. Labor income dynamics at business cycle frequencies: Implications for portfolio choice [J]. *Journal of Financial Economics*, 2011, 101(2): 333-359
- [37] Campbell J Y. Household finance [J]. *The Journal of Finance*, 2006, 61(4): 1553-1604
- [38] Santos T, Veronesi P. Labor income and predictable stock returns [J]. *The Review of Financial Studies*, 2006, 19(1): 1-44.
- [39] 丁传明, 邹捷中. 考虑随机收入和红利支付的最优投资消费模型研究 [J]. *长沙铁道学院学报*, 2003, 21(4): 93-96
DING Chuanming, ZOU Jiezhong. Study on optimal investment and consumption model considering dividend payment and stochastic income in incomplete markets [J]. *Journal of Changsha Railway University*, 2003, 21(4): 93-96.
- [40] 苏凯, 费为银, 朱永王. 考虑红利支付与提前退休的最优投资组合研究 [J]. *应用数学与计算数学学报*, 2012, 26(1): 77-84
SU Kai, FEI Weiyin, ZHU Yongwang. Optimal portfolio model with dividend payments and early retirement [J]. *Communication on Applied Mathematics and Computation*, 2012, 26(1): 77-84
- [41] 费为银, 何丹丹, 朱永王, 等. 考虑红利和退休的最优消费-投资和遗产问题 [J]. *东华大学学报(自然科学版)*, 2013, 39(1): 124-129
FEI Weiyin, HE Dandan, ZHU Yongwang, et al. Optimal consumption-portfolio and bequest with dividends and retirement [J]. *Journal of Dong Hua University (Natural Science)*, 2013, 39(1): 124-129
- [42] 朱永王, 费为银, 苏凯. 带有习惯形成的最优消费-投资与闲暇选择问题研究 [J]. *南京信息工程大学学报(自然科学版)*, 2012, 4(5): 476-480
ZHU Yongwang, FEI Weiyin, SU Kai. Optimal consumption-portfolio and leisure problem with habit formation [J]. *Journal of Nanjing University of Information Science & Technology (Natural Science Edition)*, 2012, 4(5): 476-480
- [43] Campbell J Y, Viceira L M. Who should buy long-term bonds? [J]. *American Economic Review*, 2001, 91(1): 99-127
- [44] Brennan M J, Xia Y. Dynamic asset allocation under inflation [J]. *The Journal of Finance*, 2002, 57(3): 1201-1238
- [45] Bensoussan A, Keppo J, Sethi S P. Optimal consumption and portfolio decisions with partially observed real prices [J]. *Mathematical Finance*, 2009, 19(2): 215-236
- [46] Munk C, Sørensen C, Nygaard Vinther T. Dynamic asset allocation under mean-reverting returns, stochastic interest rates, and inflation uncertainty: Are popular recommendations consistent with rational behavior? [J]. *International Review of Economics & Finance*, 2004, 13(2): 141-166
- [47] 丁传明, 邹捷中. 考虑通货膨胀率影响的最优消费投资模型 [J]. *中南大学学报*, 2004, 35(1): 167-170
DING Chuanming, ZOU Jiezhong. Optimal consumption and investment model considering effect of currency inflation [J]. *Journal of Central South University (Natural Science)*, 2004, 35(1): 167-170
- [48] 费为银, 李淑娟. Knight 不确定下带通胀的最优消费和投资模型研究 [J]. *工程数学学报*, 2012, 29(6): 799-806
FEI Weiyin, LI Shujuan. Study on optimal consumption and portfolio with inflation under Knightian uncertainty [J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2012, 29(6): 799-806
- [49] Fei W Y. Optimal consumption and portfolio under inflation and Markovian switching [J]. *Stochastics*, 2013, 85(2): 272-285
- [50] 费为银, 夏登峰, 刘鹏. 极端事件冲击下带通胀的最优投资组合选择问题研究 [J]. *应用概率统计*, 2014, 30(3): 322-336
FEI Weiyin, XIA Dengfeng, LIU Peng. An investor's optimal portfolio with rare events and model uncertainty under inflation [J]. *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, 2014, 30(3): 322-336
- [51] 梁勇, 费为银, 唐仕冰, 等. Knight 不确定及机制转换环境下带通胀的最优投资问题研究 [J]. *数学杂志*, 2014, 34(2): 335-344
LIANG Yong, FEI Weiyin, TANG Shibing, et al. On study of optimal investment with inflation under Knight uncertainty and regime-switching [J]. *Journal of Mathematics (PRC)*, 2014, 34(2): 335-344
- [52] 费为银, 吕会影, 余敏秀. 通胀服从均值回复过程的最优消费和投资决策 [J]. *系统工程学报*, 2014, 29(6): 791-868
FEI Weiyin, LÜ Huiying, YU Minxiu. Decision making for optimal consumption and portfolio under inflation with mean-reverting process [J]. *Journal of Systems Engineering*, 2014, 29(6): 791-868
- [53] 费为银, 蔡振球, 夏登峰. 跳扩散环境下带通胀的最优动态资产配置 [J]. *管理科学学报*, 2015, 18(8): 83-94
FEI Weiyin, CAI Zhenqiu, XIA Dengfeng. Dynamic asset allocation with inflation under jump diffusion environment [J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2015, 18(8): 83-94
- [54] Knight F H. *Risk, uncertainty and profit* [M]. Boston: Houghton Mifflin, 1921
- [55] Gilboa I, Schmeidler D. Maxmin expected utility with a non-unique prior [J]. *Journal of Mathematical Economics*, 1989, 18(2): 141-153
- [56] Chen Z J, Epstein L G. Ambiguity, risk, and asset returns in continuous time [J]. *Econometrica*, 2002, 70(4): 1403-1443
- [57] Fei W Y. Optimal consumption and portfolio choice with ambiguity and anticipation [J]. *Information Sciences*, 2007, 117(23): 5178-5190
- [58] Fei W Y. Optimal consumption-leisure, portfolio and retirement selection based on α -maxmin expected CES utility with ambiguity [J]. *Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities: Series B*, 2012, 27(4): 435-454
- [59] 费为银, 陈超, 梁勇. Knight 不确定下考虑负效用的消费和投资问题研究 [J]. *应用概率统计*, 2013, 29(1): 53-63
FEI Weiyin, CHEN Chao, LIANG Yong. Optimal consumption-portfolio and retirement problem with disutility under Knightian uncertainty [J]. *Chinese Journal of Ap-*

- plied Probability and Statistics, 2013, 29(1):53-63
- [60] 李娟, 费为银, 石学芹, 等. 奈特不确定下资产收益率发生紊乱的最优投资策略[J]. 高校应用数学学报: (A辑), 2013, 28(1):13-22
LI Juan, FEI Weiyin, SHI Xueqin, et al. Optimal trading strategy under disordered asset return and Knightian uncertainty[J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities (Series A), 2013, 28(1):13-22
- [61] 刘宏建, 费为银, 朱永王, 等. Knight 不确定下考虑保险和退休的最优消费-投资和遗产问题研究[J]. 运筹学学报, 2014, 18(3):88-98
LIU Hongjian, FEI Weiyin, ZHU Yongwang, et al. Optimal consumption-portfolio and bequest with insurance and retirement under Knightian uncertainty[J]. Operations Research Transactions, 2014, 18(3):88-98
- [62] 刘宏建, 费为银, 祖纷, 等. 股价波动率具有模型不确定的最优消费与投资问题[J]. 工程数学学报, 2014, 31(1):35-43
LIU Hongjian, FEI Weiyin, ZU Fen, et al. On study of optimal consumption and portfolio with model uncertainty of stock price volatility[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2014, 31(1):35-43
- [63] 余敏秀, 费为银, 夏登峰. Markov 切换具有 Knight 不确定下最优消费和投资组合研究[J]. 应用概率统计, 2014, 30(4):353-371
YU Minxiu, FEI Weiyin, XIA Dengfeng. Optimal consumption and portfolio with ambiguity to Markovian switching[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2014, 30(4):353-371
- [64] 费为银, 李钰, 石学芹, 等. 奈特不确定和部分信息下的最优交易策略[J]. 应用数学学报, 2014, 37(2):193-205
FEI Weiyin, LI Yu, SHI Xueqin, et al. Optimal trading strategy under Knightian uncertainty and partial information[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2014, 37(2):193-205
- [65] 余敏秀, 费为银, 吕会影. 模型不确定环境下最优动态投资组合问题的研究[J]. 中国科学技术大学学报, 2014, 44(3):194-202
YU Minxiu, FEI Weiyin, LÜ Huiying. Optimization of dynamic portfolio under model uncertainty[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2014, 44(3):194-202
- [66] 费为银, 刘鹏, 夏登峰. 极端事件冲击下含糊厌恶投资者的最优投资组合选择问题研究[J]. 中国科学技术大学学报, 2014, 44(9):724-731
FEI Weiyin, LIU Peng, XIA Dengfeng. Ambiguity aversion investor's optimal portfolio with rare events[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2014, 44(9):724-731
- [67] Peng S G. Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty [EB/OL]. [2015-06-18]. Preprint, <http://arxiv.org/pdf/1002.4546.pdf>
- [68] Fei W Y, Fei C. Optimal stochastic control and optimal consumption and portfolio with G-Brownian motion [EB/OL]. [2015-06-18]. Preprint, <http://arxiv.org/pdf/1309.0209v1.pdf>
- [69] 费为银, 朱涛涛, 费晨. 奈特不确定下带高水印的对冲基金最优投资组合[J]. 工程数学学报, 2015, 32(6):823-834
FEI Weiyin, ZHU Taotao, FEI Chen. Optimal portfolio of hedge fund with high water mark under Knightian Uncertainty[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2015, 32(6):823-834

Research advances on optimal consumption and portfolio issue with labor income

LIANG Yong¹ FEI Weiyin¹ JIANG Kui¹

¹ School of Mathematics and Physics, Anhui Polytechnic University, Wuhu 241000

Abstract Modern portfolio theory has been the active research topic in financial engineering. In this paper, we explained the research situation of consumption-portfolio issue and introduced the main researchers and their study results as well as methods in different periods. Then we discuss the optimal consumption and portfolio problem with labor income in detail and give the model to be studied, namely the model including time varying investment opportunities and dynamic labor income. Finally, we give the expansion of the framework of the model under inflation and Knightian uncertainty.

Key words portfolio; labor income; HJB equation; inflation; Knightian uncertainty