DOI:10.13878/j.cnki.jnuist.2016.01.002

李炜[1]　黄金花[2,3]

区间系统与区间优化模型——理论与应用

摘要

区间系统与区间优化模型是一种应用广泛的描述不确定性问题的数学模型.本文综述区间系统与区间优化模型在理论与应用方面的研究进展.特别地,本文将介绍区间线性系统的解和可解性问题、区间线性优化模型的最优解和最优性问题以及区间二次优化模型的最优解和最优性问题,最后简单概述它们的各种应用实例.

关键词

区间系统;区间线性优化;区间二次优化;弱解;强解

中图分类号 O221;TP13

文献标志码 A

收稿日期 2015-12-20

资助项目 国家自然科学基金(71471051);浙江省自然科学基金(LY14A010028);国家自然科学基金委员会和浙江省人民政府联合基金重点资助项目(U1509217)

作者简介

李炜(通信作者),男,博士,教授,研究方向为运筹与控制.weili@ hdu.edu.cn

黄金花(通信作者),女,博士,教授,主要从事电气控制、智能控制、算法优化等方面的研究工作.Angela0412@ 126.com

1 杭州电子科技大学 运筹与控制研究所,杭州,310018

2 华南理工大学 自动化科学与工程学院,广州,510641

3 武汉船舶职业技术学院 电气与电子工程学院,武汉,430050

0 引言

科学实践中的许多问题往往具有不确定性的特征,描述这一类问题的数学模型是一个不确定系统.关于不确定系统的优化问题,比较成熟的模型有随机优化模型与模糊优化模型[1-3].在随机优化问题中,要求系统参数的分布函数已知,类似地,模糊优化问题要求系统参数的隶属度函数已知.而在实际问题中,分布函数与隶属度函数并不总是容易得到.在大多数情况下,我们只知道有关系统的系数在某个区间内变化,这时区间优化的模型更加实用而且易于处理.

区间概念及其应用的萌芽可以追溯到 2 000 多年以前,如阿基米德利用单位圆的内、外接正多边形来估计圆周率 π 就是一个典型的例子.然而,区间分析特别是区间优化研究的兴起却是近数十年的事情.关于区间分析的第一本专著为 Moore 所写的《Interval Analysis》[4],该文的素材取自于他的博士论文[5].自此以后,区间数学的研究引起了广泛的兴趣并取得了丰富的理论与应用成果.本文拟对区间数学的有关问题做一个简单的综述,特别是其中的区间系统求解问题与区间优化问题,文中将分类列举一些重要的结论和文献并进行相关分析、评价.当然,一篇短文不可能是包罗万象式的,所述问题难免受到笔者研究兴趣的影响.

区间数学中最基本的概念是区间数、区间向量和区间矩阵,下面对本文中所用到的有关定义和符号做简要的说明[6-7].

记实数集合为 $\mathbf{R}$,全体 $m\times n$ 维实矩阵的集合记为 $\mathbf{R}^{m\times n}$.定义区间数为 $\mathbf{a}=[\underline{a},\overline{a}]$,其中实数$\underline{a},\overline{a}\in\mathbf{R}$,且$\underline{a}\leqslant\overline{a}$,则 $\mathbf{a}=[\underline{a},\overline{a}]=\{x\in\mathbf{R}\mid \underline{a}\leqslant x\leqslant\overline{a}\}$. 当$\underline{a}=\overline{a}=a$ 时,称 $\mathbf{a}$ 为退化区间数,即为实数 a.

设$\underline{A},\overline{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$,$\underline{A}\leqslant\overline{A}$(即$\underline{A}$的每个元素小于等于$\overline{A}$中对应的元素),区间矩阵 $\mathbf{A}$ 是一个实矩阵的集合,其定义为

$$\mathbf{A}=[\underline{A},\overline{A}]=\{A\in\mathbf{R}^{m\times n}\mid \underline{A}\leqslant A\leqslant\overline{A}\}.$$

全体 $m\times n$ 维区间矩阵的集合记为 $\mathbf{IR}^{m\times n}$.n 维区间向量可以理解为一行 n 列的区间矩阵,记 n 维区间向量的集合为 $\mathbf{IR}^{n}$.

下面的两个矩阵

$$A_c=\frac{1}{2}(\underline{A}+\overline{A}),\quad A_\Delta=\frac{1}{2}(\underline{A}-\overline{A})$$

分别称为区间矩阵 $\mathbf{A}$ 的中点矩阵和半径矩阵,于是区间矩阵 $\mathbf{A}=[A_c-$

$A_\Delta, A_c+A_\Delta]$.类似可知区间向量 $\mathbf{b}=[b_c-b_\Delta, b_c+b_\Delta]$.

记 $\{\pm1\}^m$ 为各分量都是 $\{-1,1\}$ 的 m-维向量的全体,令 $e=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是各分量都为 1 的 m 维向量,一个矩阵 $A=(a_{ij})$ 的绝对值是指 $|A|=(|a_{ij}|)$,故有

$$\{\pm1\}^m=\{y\in\mathbf{R}^m \mid |y|=e\}.$$

对于一个给定的向量 $y\in\{\pm1\}^m$,记

$$T_y=\mathrm{diag}(y_1,y_2,\cdots,y_m)$$

为相应的对角矩阵.特别地,当 $z=e$ 时 $T_z=T_e$ 为单位矩阵.

对于任意向量 $x\in\mathbf{R}^n$,其符号向量 $\mathrm{sgn}\ x$ 定义为

$$(\mathrm{sgn}\ x)_i=\begin{cases}1, & x_i\geqslant 0,\\ -1, & x_i<0,\end{cases}$$

这里 $i=1,2,\cdots,n$.若令 $z=\mathrm{sgn}\ x\in\{\pm1\}^n$,易知 $|x|=T_z x$.

给定一个区间矩阵 $\mathbf{A}=[A_c-A_\Delta, A_c+A_\Delta]$,对于任意向量 $y\in\{\pm1\}^m$ 和 $z\in\{\pm1\}^n$,定义矩阵

$$A_{yz}=A_c-T_yA_\Delta T_z,$$

亦即

$$(A_{yz})_{ij}=(A_c)_{ij}-y_i(A_\Delta)_{ij}z_j=\begin{cases}\overline{a}_{ij}, & y_iz_j=-1,\\ \underline{a}_{ij}, & y_iz_j=1,\end{cases}$$

这里 $i=1,2,\cdots,m$, $j=1,\cdots,n$.特别地,当 $y=e$ 时,$A_{ez}=A_c-A_\Delta T_z$;当 $y=-e$ 时,$A_{-ez}=A_c+A_\Delta T_z$.类似地,对于一个区间向量 $\mathbf{b}=[b_c-b_\Delta, b_c+b_\Delta]$ 以及任意的向量 $y\in\{\pm1\}^m$,定义向量

$$b_y=b_c+T_yb_\Delta,$$

即

$$(b_y)_i=(b_c)_i+y_i(b_\Delta)_i=\begin{cases}\overline{b}_i, & y_i=1,\\ \underline{b}_i, & y_i=-1,\end{cases}$$

这里 $i=1,2,\cdots,m$.

1 区间线性系统

区间系统就是系数为区间数的系统,亦即由区间数等式与不等式构成的组合.区间系统又可以分为区间线性系统和区间非线性系统.到目前为止,区间非线性系统的研究很少,远没有形成体系,而区间线性系统的研究则有一些较为深入的理论结果.这里主要介绍区间线性系统的有关结论.

1.1 区间线性系统的解

令 $\mathbf{A}\in\mathbf{IR}^{m\times n}$, $\mathbf{b}\in\mathbf{IR}^m$.定义区间线性方程组

$$\mathbf{A}x=\mathbf{b} \tag{1}$$

为下面实线性系统的集合

$$Ax=b, \tag{2}$$

其中 A 和 b 满足:

$$A\in\mathbf{A}, b\in\mathbf{b}. \tag{3}$$

由定义可知,区间线性系统的解实际上是一族确定型的线性系统(称为子系统)的解,因此解的定义也多种多样,其中研究得较早也较为深入的为弱解和强解.

弱解与弱可解 若向量 x^* 满足:存在 $A\in\mathbf{A}$, $b\in\mathbf{b}$ 使得

$$Ax^*=b, \tag{4}$$

则称 x^* 为区间系统(1)的一个弱解,如果存在 $A\in\mathbf{A}$, $b\in\mathbf{b}$ 使得式(2)有解,则称系统(1)弱可解.显然,区间线性系统(1)的弱可解性与它弱解的存在性是等价的.

强解与强可解 若对任意的 $A\in\mathbf{A}$, $b\in\mathbf{b}$,式(4)都成立,则称 x^* 为区间系统(1)的一个强解.若对任意的 $A\in\mathbf{A}$, $b\in\mathbf{b}$,式(2)都可解,则称区间系统(1)是强可解的.强可解性与强解的存在性一般不是等价的[7].

类似地可以定义区间不等式组 $\mathbf{A}x\leqslant\mathbf{b}$ 以及一般区间混合系统

$$\mathbf{A}x+\mathbf{B}y=\mathbf{b},\quad \mathbf{C}x+\mathbf{D}y\leqslant\mathbf{d},\quad x\geqslant 0 \tag{5}$$

的相关概念.

1964 年,Oettli 和 Prager 讨论了系统(1)的弱解特征,建立了具有深远意义的 O-P 不等式,该不等式给出了区间线性方程组弱可解的充要条件,有如下结论:

定理 1(Oettli-Prager 不等式)[8] 向量 x 为系统 $\mathbf{A}x=\mathbf{b}$ 的弱解当且仅当 x 满足:

$$|A_cx-b_c|\leqslant A_\Delta|x|+b_\Delta.$$

定理 1 的妙处在于仅用一个非线性不等式就描述了整个弱解的集合.

1981 年,Gerlach 将 O-P 不等式推广到区间线性不等式组,给出了区间线性不等式组弱可解的充要条件,即 Gerlach 不等式.

定理 2(Gerlach 不等式)[9] 向量 x 为系统 $\mathbf{A}x\leqslant\mathbf{b}$ 的弱解当且仅当 x 满足 $A_cx-A_\Delta|x|\leqslant\overline{b}$.

实线性系统中,若系统有一个解,则称该系统是可解的,若其有一个非负解,则称该系统是可行的.而区间线性系统中,由于解的类型的多样性,相应的可解性与可行性亦具有多样性.如果存在 A, b 满足条件(3)并且使得系统(2)是可解的(或可行的),那么就称区间系统(1)是弱可解的(或弱可行的).如果

对任意满足条件(3)的 A,b 都能够使得系统(2)是可解的(或可行的),那么就称区间系统(1)是强可解的(或强可行的).以下 8 个定理刻画了区间线性方程组和区间线性不等式组可解性与可行性的特征[7,10-11].

定理 3 系统 $\mathbf{A}x=\mathbf{b}$ 是强可解的当且仅当任意 $z\in\{\pm1\}^n$,系统

$$\begin{cases} lA_{ze}x^1-A_{-ze}x^2=b_z, \\ x^1\geqslant 0, \quad x^2\geqslant 0 \end{cases}$$

可解.

定理 4 系统的 $\mathbf{A}x=\mathbf{b}$ 是强可行的当且仅当任意 $z\in\{\pm1\}^n$,系统

$$\begin{cases} A_{ze}x=b_z, \\ x\geqslant 0 \end{cases}$$

可行.

定理 5 系统 $\mathbf{A}x=\mathbf{b}$ 是弱可解的当且仅当存在 $z\in\{\pm1\}^n$ 使得系统

$$\begin{cases} A_{ez}x\leqslant\bar{b}, \\ -A_{-ez}x\leqslant-\underline{b} \end{cases}$$

可解.

定理 6 系统 $\mathbf{A}x=\mathbf{b}$ 是弱可行的当且仅当系统

$$\begin{cases} \underline{A}x\leqslant\bar{b}, \\ -\bar{A}x\leqslant-\underline{b} \end{cases}$$

可行.

定理 7 系统 $\mathbf{A}x\leqslant\mathbf{b}$ 是弱可行的当且仅当系统 $\underline{A}x\leqslant\bar{b}$可行.

定理 8 系统 $\mathbf{A}x\leqslant\mathbf{b}$ 是弱可解的当且仅当存在 $z\in\{\pm1\}^n$ 使得系统 $A_{ez}x\leqslant\bar{b}$可解.

定理 9 系统 $\mathbf{A}x\leqslant\mathbf{b}$ 是强可行的当且仅当系统 $\bar{A}x\leqslant\underline{b}$可行.

定理 10 系统 $\mathbf{A}x\leqslant\mathbf{b}$ 是强可解的当且仅当系统$\bar{A}x_1-\underline{A}x_2\leqslant\underline{b}$可行.

以上 8 个结论讨论的是区间方程组与区间不等式组的可解性与可行性的条件,它们彼此独立,互不包含.

基于不同的应用背景,学者们研究了区间线性系统的各种不同的解.俄罗斯数学家 Shary 在这个方面做了大量出色的工作.从研究控制系统的角度出发,1995 年 Shary[12] 提出了容许解的概念:若向量 $x\in\mathbf{R}^n$满足对任意的 $A\in\mathbf{A}$ 都存在 $b\in\mathbf{b}$ 使得式(1)成立,则称 x 为容许解.1997 年 Shary[13] 又提出并研究了控制解:若对任意的 $b\in\mathbf{b}$ 都存在 $A\in\mathbf{A}$ 使得式(1)成立,则向量 x 叫做控制解.

用同样的方法可以定义区间线性不等式组 $\mathbf{A}x\leqslant\mathbf{b}$ 以及区间混合系统的弱解、强解、容许解和控制解.2002 年,Shary[14] 提出了区间线性方程组 AE 解的概念,这里的区间系数是用量词“任意”和“存在”来刻画的,其定义为:将区间矩阵分解成形如$\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\forall}+\mathbf{A}^{\exists}$,这里 $\mathbf{A}^{\forall}$是由前置“任意”量词系数组成的区间矩阵,$\mathbf{A}^{\exists}$表示前置“存在”量词系数部分的区间矩阵.类似地,可以将区间向量分解成 $\mathbf{b}=\mathbf{b}^{\forall}+\mathbf{b}^{\exists}$.若一个向量 $x\in\mathbf{R}^n$ 满足,对任意的

$$A^{\forall}\in\mathbf{A}^{\forall},b^{\forall}\in\mathbf{b}^{\forall}$$

都存在

$$A^{\exists}\in\mathbf{A}^{\exists},b^{\exists}\in\mathbf{b}^{\exists},$$

使得

$$(A^{\forall}+A^{\exists})x=b^{\forall}+b^{\exists},$$

则 x 称为区间系统(1)的 AE 解.区间线性系统 AE 解的概念内涵非常丰富,它几乎包含了前人提出的各种解的概念,如弱解、强解、控制解、容许解等都是 AE 解的特例.值得指出的是,2013 年,Li W 等[15] 从集合分类的角度提出并研究了区间线性系统的局部解,局部解的概念不能被 AE 解所包含.文献[15]中建立了局部解的充要条件并给出了应用实例.随后,局部解的思想被 Worrawate 等[16] 推广到极大可分区间线性系统.

在实系统中,不等式系统与等式系统、有非负性约束和无非负性约束等往往可以方便的互相转换.而区间系统由于其特有的相依性问题,使得类似的转换十分困难.所谓相依性,是指两个同样大小的区间在同时参加运算时,参数的选取却是彼此独立的.例如,在实系统中,$2x=1$ 与 $2x_1-2x_2=1,x_1,x_2\geqslant 0$ 是等价的.但是,求区间系统$[1,2]x=1$ 的弱解显然不等价于求区间系统$[1,2]x_1-[1,2]x_2=1,x_1,x_2\geqslant 0$ 的弱解,如 $x_1-2x_2=1,x_1,x_2\geqslant 0$ 之解属于后一区间系统的弱解之一,但不是前一区间系统的弱解.正因为如此,区间系统的问题一般要逐一研究.为克服这个困难,2013 年 Hladík[17] 提出了一般区间线性系统的弱可解和强可解问题,这种系统是由同时含有自由变量和有符号限制的变量的等式和不等式混合组成的,他将 Oettli-Prager(对于等式而言)和 Gerlach(对于不等式而言)提出的著名的弱可解的特征推广到了一个统一的模式,并且给出了一般区间线性系统的弱、强可解的特征.

定理 11[17] 设 $\mathbf{A}\in\mathbf{IR}^{k\times m},\mathbf{B}\in\mathbf{IR}^{k\times n},\mathbf{C}\in\mathbf{IR}^{l\times m}$,

$\mathbf{D}\in\mathbf{IR}^{l\times n}$,$\mathbf{b}\in\mathbf{IR}^{k}$ 以及 $\mathbf{d}\in\mathbf{IR}^{l}$,则一般区间系统

$$\mathbf{A}x+\mathbf{B}y=\mathbf{b},\quad \mathbf{C}x+\mathbf{D}y\leqslant\mathbf{d},\quad x\geqslant 0$$

是弱可解的当且仅当存在 $s\in\{\pm 1\}^k$,系统

$$\begin{aligned}&\underline{A}x+(B_c-B_\Delta T_s)y\leqslant\overline{b},\\&-\overline{A}x-(B_c+B_\Delta T_s)y\leqslant-\underline{b},\\&\underline{C}x+(D_c-D_\Delta T_s)y\leqslant\overline{d},\\&x\geqslant 0\end{aligned}$$

可解.

定理 12[17] 设 $\mathbf{A}\in\mathbf{IR}^{k\times m}$,$\mathbf{B}\in\mathbf{IR}^{k\times n}$,$\mathbf{C}\in\mathbf{IR}^{l\times m}$,$\mathbf{D}\in\mathbf{IR}^{l\times n}$,$\mathbf{b}\in\mathbf{IR}^{k}$ 以及 $\mathbf{d}\in\mathbf{IR}^{l}$,则一般区间系统

$$\mathbf{A}x+\mathbf{B}y=\mathbf{b},\quad \mathbf{C}x+\mathbf{D}y\leqslant\mathbf{d},\quad x\geqslant 0$$

是强可解的当且仅当对任意的 $s\in\{\pm 1\}^k$,系统

$$\begin{aligned}&A_{-se}x+B_{-se}y^1-B_{se}y^2=b_{-s},\\&\overline{C}x+\overline{D}y^1-\underline{D}y^2\leqslant\underline{d},\\&x,y^1,y^2\geqslant 0\end{aligned}$$

可解.

2014 年,Li H 等进一步拓展了解的概念,将可解性与可行性统一起来,提出了基于逻辑符的一般可解性[18].如称区间线性方程组 $\mathbf{A}x=\mathbf{b}$ 是($\emptyset$)-强可解的若对某个 $A\in\mathbf{A}$,$b\in\mathbf{b}$ $Ax=b$ 是可解的.称 $\mathbf{A}x=\mathbf{b}$ 是($\mathbf{A}$)-强可解的若对每个 $A\in\mathbf{A}$,存在 $b\in\mathbf{b}$,$Ax=b$ 是可解的.类似理解其他概念.文献[18]中给出了在此框架下的 16 种可解性的问题,包括定理 2.3—2.10 为其特例.2015 年,Li W 等[19]利用同一思想方法提出了基于逻辑符的区间线性优化问题并给出了最优解的特征.关于区间系统的研究,还可以参考文献[20-22].

1.2 区间系统的 Farkas 型定理

1902 年,Farkas[23]建立了著名的关于实线性系统可解性的 Farkas 引理.

引理 1(Farkas 引理) 系统 $Ax=b$ 是可行的当且仅当对任意向量 p,若满足 $A^{\mathrm{T}}p\geqslant 0$,则有 $b^{\mathrm{T}}p\geqslant 0$.

该引理在诸多数学分支中有着广泛的应用.1989 年,Rohn[24]首次将 Farkas 定理推广到区间的形式,给出了区间线性方程组弱可行的 Farkas 型定理. 2011 年,Karademir 等[25]建立了区间线性方程组强可行的 Farkas 型定理. 2014 年,Rohn[26]给出了区间线性不等式组的 Farkas 型定理.2015 年,Xia M 等[27]以一种统一的方式建立了区间方程与区间不等式的所有 8 种情形的 Farkas 型定理,从而将这 8 种系统的弱、强可解性的 Farkas 型充要条件完整的表示出来. 如下结论来自文献[24-27].

定理 13 系统 $\mathbf{A}x=\mathbf{b}$ 是弱可行的当且仅当

$$(\forall p)(A^{\mathrm{T}}p\geqslant 0\quad \forall A\in\mathbf{A}\Rightarrow b^{\mathrm{T}}\geqslant 0\quad \exists b\in\mathbf{b}).\tag{6}$$

定理 14 系统 $\mathbf{A}x=\mathbf{b}$ 是弱可解的当且仅当

$$(\exists z\in\{\pm 1\}^n)(\forall p)((A_cT_z-T_{\mathrm{sgn}\,p}A_\Delta)^{\mathrm{T}}p\geqslant 0\Rightarrow b^{\mathrm{T}}p\geqslant 0\ \exists b\in\mathbf{b}).\tag{7}$$

定理 15 系统 $\mathbf{A}x\leqslant\mathbf{b}$ 是弱可行的当且仅当

$$(\forall p\geqslant 0)(A^{\mathrm{T}}p\geqslant 0\ \ \forall A\in\mathbf{A}\Rightarrow b^{\mathrm{T}}p\geqslant 0\quad \exists b\in\mathbf{b}).\tag{8}$$

定理 16 系统 $\mathbf{A}x\leqslant\mathbf{b}$ 是弱可解的当且仅当

$$(\exists z\in\{\pm 1\}^n)(\forall p\geqslant 0)((A_{ez})^{\mathrm{T}}p=0\Rightarrow b^{\mathrm{T}}p\geqslant 0\ \ \exists b\in\mathbf{b}).\tag{9}$$

定理 17 系统 $\mathbf{A}x=\mathbf{b}$ 是强可行的当且仅当

$$(\forall p)(A^{\mathrm{T}}p\geqslant 0\quad \exists A\in\mathbf{A}\Rightarrow b^{\mathrm{T}}p\geqslant 0\quad \forall b\in\mathbf{b}).\tag{10}$$

定理 18 系统 $\mathbf{A}x=\mathbf{b}$ 是强可解的当且仅当

$$(\forall p)(A^{\mathrm{T}}p=0\quad \exists A\in\mathbf{A}\Rightarrow b^{\mathrm{T}}p=0\quad \forall\ b\in\mathbf{b}).\tag{11}$$

定理 19 系统 $\mathbf{A}x\leqslant\mathbf{b}$ 是强可行的当且仅当

$$(\forall p\geqslant 0)(A^{\mathrm{T}}p\geqslant 0\quad \exists A\in\mathbf{A}\Rightarrow b^{\mathrm{T}}p\geqslant 0\quad \forall b\in\mathbf{b}).\tag{12}$$

定理 20 系统 $\mathbf{A}x\leqslant\mathbf{b}$ 是强可解的当且仅当

$$(\forall p\geqslant 0)(A^{\mathrm{T}}p=0\quad \exists A\in\mathbf{A}\Rightarrow b^{\mathrm{T}}p\geqslant 0\quad \forall b\in\mathbf{b}).\tag{13}$$

区间线性系统的 Farkas 型定理在研究区间系统的解集特征以及区间优化问题中有重要的应用[7].利用这些 Farkas 型定理特别是利用来自文献[27]的最新结论作为工具去研究区间系统各类解的存在性问题,有望取得一些有意义的成果.此外,经典的 Farkas 型定理是研究确定型优化问题最优性条件的有力工具,而区间系统的 Farkas 型定理必将在研究区间优化问题的最优性条件中扮演重要角色.

2 区间线性优化问题

在生产、管理、交通运输、经营活动等各个领域中,线性规划模型具有广泛的应用背景.它为如何合理地利用有限的人力、物力、财力等资源提供一种有效的方法,以便获取更大的效益.传统的确定型线性规划无法处理规划过程中的不确定因素,并且无法应对未来环境的变化,缺乏灵活性、适应性等因素.由于客观事物的复杂性和不确定性以及人类思维的模糊性和局限性,人们往往不能给出准确的信息,从而描述这一类问题的线性规划模型的系数也将是一个不确定的数值.然而,这些数值虽然不固定,但它们一般都在某个区间内波动.把线性规划中的系数用区间数代替,就得到了区间线性优化问题,亦称为区间线性规划问题.

2.1 区间线性优化问题的最优解

关于区间线性规划的最优解在很多文献中都有

研究.部分学者沿用随机优化与模糊优化的方法来研究区间线性优化问题.1990 年,Ishibuchi 等[28]通过引入区间数的偏序将区间优化问题中的区间约束条件转化为确定性约束,同时将区间目标函数转化为多个确定性的目标函数,将区间线性规划问题转化为确定型的多目标规划问题求解. 为比较区间量的大小,在区间数的集合中不同的学者引入了不同的偏序关系[29-39],因此可以导致不同意义下的最优解的概念.基于这些偏序关系,人们提出了求解区间线性规划问题的各种方法[29,31-34].这些方法的共同特点是利用所定义的偏序关系,将区间线性优化问题转化为一个确定型的线性优化问题来求解.然而,尽管这些偏序看起来形式上有所不同,但是实际上其中若干个偏序是等价的[40].这一类方法的好处是简单易行,但由于最优解的定义依赖于有关偏序的定义和阈值的选取,有较大的主观性.

另一类研究区间优化问题的方法是从整体的角度去把握最优解与最优值的特征.文献[41-42]研究了区间线性规划问题的最好最优解和最劣最优解,给出了区间目标函数取值的上界和下界.2007 年,Soleimani 等[43]讨论了区间线性规划问题的弱最优解和强最优解.Hladik[44]则给出了计算区间线性规划最优值变化范围的方法.2014 年,Li W 等[45]讨论了带区间右端的线性规划问题,并给出了一个检验给定向量为弱最优解的充要条件.

设 $\mathbf{A}\in\mathbf{IR}^{m\times n}$,$\mathbf{b}\in\mathbf{IR}^{m}$,$\mathbf{c}\in\mathbf{IR}^{n}$,区间线性优化问题可记为

$$\min\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}x \quad \text{s.t.}\quad x\in M(\mathbf{A},\mathbf{b}),$$

其中 $M(\mathbf{A},\mathbf{b})$ 是由一个区间线性系统决定的可行域.根据区间系统中各种类型解的定义,可以类似定义区间线性优化问题各种类型的最优解,如弱最优解、强最优解、控制最优解、容许最优解、AE 最优解.在区间线性规划理论中,约束条件的形式主要有 3 种:

约束条件 1:$M(\mathbf{A},\mathbf{b})=\{x\in\mathbf{R}^n:\mathbf{A}x=\mathbf{b},x\geqslant0\}$.

约束条件 2:$M(\mathbf{A},\mathbf{b})=\{x\in\mathbf{R}^n:\mathbf{A}x\leqslant b\}$.

约束条件 3:$M(\mathbf{A},\mathbf{b})=\{x\in\mathbf{R}^n:\mathbf{A}x\leqslant\mathbf{b},x\geqslant0\}$.

2014 年,Li W 等[46]与 Luo J 等[47]用统一的框架描述了 8 种区间线性优化问题的最优解及最优性,并在该定义下基于切锥理论分别完整刻画了 3 种约束条件下($\mathbf{A},\mathbf{b}$)-强最优解、($\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{c}$)-强最优解的特征.以约束条件 2 为例,得到了如下结果:

设 $\mathbf{A}\in\mathbf{IR}^{m\times n}$,$\mathbf{b}\in\mathbf{IR}^{m}$,$\mathbf{c}\in\mathbf{IR}^{n}$.考虑区间线性优化问题

$$\min\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}x \quad \text{s.t.}\quad \mathbf{A}x\leqslant\mathbf{b}. \tag{14}$$

定理 21 设 $\bar{x}\in\mathbf{R}^n$,$h=\operatorname{sign}(\bar{x})$. 记

$$G=\{r_i\mid i=1,\cdots,q,(A_{eh})_{r_i},\bar{x}=\bar{b}_{r_i}\},$$

则 $\bar{x}$ 是式(14)的一个 ($\mathbf{A},\mathbf{b}$)-强 最优解当且仅当 $\bar{x}$ 是问题(14)的一个强可行解,并且对每个 $A\in\mathbf{A}$ 下列线性系统

$$\begin{cases}A_{r_i}(x^1-x^2)\leqslant0, & i=1,\cdots,q,\\ \bar{c}^{\mathrm{T}}x^1-\underline{c}^{\mathrm{T}}x^2\leqslant-1,\\ x^1,x^2\geqslant0\end{cases} \tag{15}$$

无解.

定理 22 设 $\bar{x}\in\mathbf{R}^n$,$h=\operatorname{sign}(\bar{x})$.记

$$G=\{r_i\mid i=1,\cdots,q,(A_{eh})_{r_i},\bar{x}=\bar{b}_{r_i}\},$$

则 $\bar{x}$ 是问题(14)的一个($\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{c}$)-强最优解当且仅当 $\bar{x}$ 是问题(14)的一个强可行解,并且对每个 $A\in\mathbf{A}$,$c\in\mathbf{c}$,下列线性系统

$$\begin{cases}A_{r_i}y\leqslant0, & i=1,\cdots,q,\\ c^{\mathrm{T}}y\leqslant-1\end{cases} \tag{16}$$

无解.

关于约束条件 1 与约束条件 3 的相关结论详见文献[47-48].2015 年,Li W 等[19]首次基于逻辑量词给出了一类区间线性优化的最优解定义,并基于凸分析中的切锥理论建立了最优解的特征.

一般区间线性优化问题形如:

$$\min\ \mathbf{c}^1x^1+\mathbf{c}^2x^2, \tag{17a}$$

$$\begin{cases}\text{s.t.}\quad \mathbf{A}x^1+\mathbf{B}x^2=\mathbf{b},\\ \qquad\ \ \mathbf{C}x^1+\mathbf{D}x^2\leqslant\mathbf{d},\\ \qquad\ \ x^1\geqslant0.\end{cases} \tag{17b}$$

上述问题理解为如下实区间线性优化问题的集合:

$$\min\ c^1x^1+c^2x^2, \tag{18a}$$

$$\begin{cases}\text{s.t.}\quad Ax^1+Bx^2=b,\\ \qquad\ \ Cx^1+Dx^2\leqslant d,\\ \qquad\ \ x^1\geqslant0,\end{cases} \tag{18b}$$

其中各系数满足 $A\in\mathbf{A}$,$B\in\mathbf{B}$,$C\in\mathbf{C}$,$D\in\mathbf{D}$,$b\in\mathbf{b}$,$d\in\mathbf{d}$,$c^1\in\mathbf{c}^1$ 及 $c^2\in\mathbf{c}^2$,这里 $\mathbf{A}\in\mathbf{IR}^{m_1\times n_1}$,$\mathbf{B}\in\mathbf{IR}^{m_1\times n_2}$,$\mathbf{C}\in\mathbf{IR}^{m_2\times n_1}$,$\mathbf{D}\in\mathbf{IR}^{m_2\times n_2}$,$\mathbf{b}\in\mathbf{IR}^{m_1}$,$\mathbf{d}\in\mathbf{IR}^{m_2}$,$\mathbf{c}^1\in\mathbf{IR}^{n_1}$,$\mathbf{c}^2\in\mathbf{IR}^{n_2}$,$\mathbf{c}^1$,$\mathbf{c}^2$ 为行向量,且满足 $m_1+m_2=m$,$n_1+n_2=n$,

最近,Li H[49]基于逻辑量词和八元组的形式给出问题(17)最优解的统一定义,并利用 KKT 条件给出最优解的充要条件.

关于定理 21、定理 22 以及文献[47-48]所讨论

的区间优化问题,有的学者认为这是系统的一种新鲁棒性.这种说法有一定的道理,但并不完全准确.如果一个不确定系统具有结构化不确定性(或称参数化不确定性),其鲁棒性则难以用区间优化的模型刻画,这是因为区间数学中特有的相依性问题还未解决[7,50].当然,在实际工程设计中,非结构化不确定性模型更加重要.这一类不确定系统的鲁棒稳定性则可视作区间系统的某种强最优性.简言之,区间优化(以及区间系统的可解性)与控制论中的鲁棒性既有联系,又有区别,它们之间的关系还有待于人们的深入探讨.

2.2 区间线性优化问题的最优性

对于区间线性规划问题,一个需要研究的问题是所谓最优性问题.一个区间线性规划的模型中含有无限多个确定型的线性规划问题,这些线性规划是否都有最优解?或者只有某些线性规划存在最优解?这是值得我们研究的.对于这个问题,早在1981年,Rohn[51]就讨论了区间线性规划的强最优性,即对任意给定区间系数中的某个值,对应的线性规划问题都有最优解的问题,并利用对偶理论建立了区间线性规划具有强最优性的充要条件.自这以后就很少有人对最优性进行研究.直到2011年,Hladík[52]清晰地提出了区间优化问题的强最优性和弱最优性概念:若区间优化问题的所有子问题都有最优解,则称该区间优化问题具有强最优性;若区间优化问题的某个子问题有最优解,则称这个区间优化问题具有弱最优性.

关于弱最优性,还没有一个有效的检验方法,但Hladík给出了两个充分条件:若一个区间线性规划是强可行的,同时它的对偶区间线性规划是弱可行的,则这个区间线性规划具有弱最优性;若一个区间线性规划是弱可行的,同时它的对偶区间线性规划是强可行的,则这个区间线性规划具有弱最优性.

对于约束条件为1,2,3的三类区间线性优化问题的强最优性有如下结论[52-53].

定理23 区间线性优化问题

$$\min \mathbf{c}^{\mathrm{T}}x \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}x=\mathbf{b}, \quad x\geqslant 0 \tag{19}$$

是强最优的,当且仅当对于任意的$z\in Y_m$,系统

$$A_{ze}x=b_z \tag{20}$$

有非负解,且系统

$$\overline{A}^{\mathrm{T}}y^1-\underline{A}^{\mathrm{T}}y^2\leqslant \underline{c}, \quad y^1,y^2\geqslant 0 \tag{21}$$

是可解的.

定理24 区间线性优化问题

$$\min \mathbf{c}^{\mathrm{T}}x \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}x\leqslant \mathbf{b} \tag{22}$$

是强最优的,当且仅当对于任意的$z\in Y_m$,系统

$$A_{ze}^{\mathrm{T}}x=-c_z \tag{23}$$

有非负解,且系统

$$\overline{A}x^1-\underline{A}x^2\leqslant \underline{b}, \quad x^1,x^2\geqslant 0 \tag{24}$$

是可解的.

定理25 区间线性优化问题

$$\min \mathbf{c}^{\mathrm{T}}x \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}x\leqslant b, x\geqslant 0 \tag{25}$$

是强最优的,当且仅当系统

$$\overline{A}x\leqslant \underline{b}, \quad x\geqslant 0, \tag{26}$$

$$\underline{A}^{\mathrm{T}}y\leqslant \underline{c}, \quad y\leqslant 0 \tag{27}$$

是可解的.

区间线性优化问题的最优性和最优解是两个既有区别又相互联系的概念,在某些情况下我们可以证明它们是等价的.如容易看出,区间线性优化问题是弱最优的和区间线性优化问题有弱最优解是等价的.但一个区间优化问题的强最优性却弱于其有强最优解.在一般型区间线性优化问题中,最优解和最优性之间的关系相当复杂,彻底弄清楚它们之间的联系与区别还有赖于对区间优化系统的性质作进一步深入的探讨.关于区间线性优化的问题还可以参见文献[54-59].

3 区间二次优化问题

到目前为止,关于一般区间非线性优化问题的研究成果甚少,甚至其中最简单的区间二次优化问题的研究也才刚刚开始,只有为数不多的一些结果,主要是讨论区间二次规划问题最优值的上界与下界的计算方法.2007年,Liu S等[60]研究了仅约束带有区间量,而目标函数中的系数为实向量的一类特殊的区间二次规划问题,给出了求该问题最优值的上界与下界的方法.2008年,Li W等[61]将文献[60]的结果推广到了更加一般的区间二次优化问题:

$$\min \mathbf{c}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}x, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}x\leqslant \mathbf{b}, \quad x\geqslant 0, \tag{28}$$

这里$\mathbf{Q}=(\mathbf{q}_{ij})_{n\times n}$为区间对称矩阵,任意的$Q\in\mathbf{Q}$为半正定.基于Dorn对偶理论,文献[61]给出了求解问题(28)的一般算法,该算法比文献[60]中的算法简单、有效.文献[62-63]中进一步拓展了[61]的结果,讨论了带有区间等式约束的区间二次优化问题的最优值的上、下界的计算方法.

3.1 一般区间二次优化问题最优值上、下界的计算

以上所述前期工作的研究对象都是较为特殊的

区间二次优化问题,近年来,Hladík[61]、Li W 等[65]研究如下一般形式的区间二次优化问题:

$$\min\left\{\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}x+\mathbf{c}^{\mathrm{T}}x \mid \mathbf{A}x\leqslant\mathbf{b},\mathbf{B}x=\mathbf{d},x\geqslant 0\right\}, \quad (29)$$

其中,$\mathbf{A}\in\mathbf{IR}^{m\times n}$,$\mathbf{B}\in\mathbf{IR}^{k\times n}$,$\mathbf{b}\in\mathbf{IR}^{m}$,$\mathbf{c}\in\mathbf{IR}^{n}$,$\mathbf{d}\in\mathbf{IR}^{k}$以及$\mathbf{Q}\in\mathbf{IR}^{n\times n}$.任意的$Q\in\mathbf{Q}$为半正定.最优值范围的上下界相应的被定义为

$$\underline{f}(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{Q})=\inf\{f(A,B,b,c,d,Q)\mid A\in\mathbf{A}, B\in\mathbf{B},b\in\mathbf{b},c\in\mathbf{c},d\in\mathbf{d},Q\in\mathbf{Q}\},$$

$$\overline{f}(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{Q})=\sup\{f(A,B,b,c,d,Q)\mid A\in\mathbf{A}, B\in\mathbf{B},b\in\mathbf{b},c\in\mathbf{c},d\in\mathbf{d},Q\in\mathbf{Q}\}.$$

对给定的$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{Q}$,定义$\underline{f}=\underline{f}(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{Q})$,$\overline{f}=\overline{f}(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{Q})$.对于一般区间二次规划而言,求最优值范围的下界是多项式可解的,而计算最优值范围的上界是一个 NP 难的问题.这里介绍文献[65]建立的一个新的计算最优值范围的上界的有效方法.

定理 26[65]

$$\underline{f}=\inf\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\underline{Q}x+\underline{c}^{\mathrm{T}}x \quad \text{s.t.} \quad \underline{A}x\leqslant\overline{b},\underline{B}x\leqslant\overline{d},\overline{B}x\geqslant\underline{d},x\geqslant 0.$$

下述定理来自文献[17],它刻画了一般型区间线性系统强可解性的特点.

定理 27 设$\mathbf{A}\in\mathbf{IR}^{k\times m}$,$\mathbf{B}\in\mathbf{IR}^{k\times n}$,$\mathbf{C}\in\mathbf{IR}^{l\times m}$,$\mathbf{D}\in\mathbf{IR}^{l\times n}$,$\mathbf{b}\in\mathbf{IR}^{k}$以及$\mathbf{d}\in\mathbf{IR}^{l}$,则一般型区间系统

$$\mathbf{A}x+\mathbf{B}y=\mathbf{b},\mathbf{C}x+\mathbf{D}y\leqslant d,x\geqslant 0$$

是强可解的当且仅当对任意的$s\in\{\pm 1\}^{k}$,系统

$$A_{-se}x+B_{-se}y^{1}-B_{se}y^{2}=b_{-s},$$
$$\overline{C}x+\overline{D}y^{1}-\underline{D}y^{2}\leqslant\underline{d},$$
$$x,y^{1},y^{2}\geqslant 0$$

可解.

利用定理 26、定理 27,我们证明了如下结论:

定理 28[65] 我们有

$$\underline{f}(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{Q})=\inf\left\{\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\underline{Q}x+\underline{c}^{\mathrm{T}}x\mid\underline{A}x\leqslant\overline{b}, \overline{B}x\geqslant\underline{d},\underline{B}x\leqslant\overline{d},x\geqslant 0\right\}, \quad (30)$$

$$\overline{f}(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{Q})=\sup_{y\in\{\pm 1\}^{k}}f(\overline{A},B_{ye},\underline{b},\overline{c},d_{y},\overline{Q}). \quad (31)$$

文献[64]中求上界的方法是先求解一个 Dorn 对偶问题:

$$\psi=\sup\left\{-\frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}\overline{Q}u-\underline{b}^{\mathrm{T}}v-d_{c}^{\mathrm{T}}w+d_{\Delta}^{\mathrm{T}}|w|\mid\overline{Q}u+\overline{A}^{\mathrm{T}}v+ B_{c}^{\mathrm{T}}w+B_{\Delta}^{\mathrm{T}}|w|+\overline{c}\geqslant 0,v\geqslant 0\right\}. \quad (32)$$

当区间二次规划问题(29)的对偶间隙为零时,得到最优值范围的上界$\overline{f}=\psi$,因此称为对偶方法.而定理 28 通过原始问题的子问题给出直接计算$\overline{f}$的方法,因而称之为原始方法.在原始方法中,零对偶间隙的条件被去掉了.

由定理 28 容易得到下面两个推论:

推论 1 设$\mathbf{b}\in\mathbf{IR}^{k}$,考虑区间二次规划

$$\min\left\{\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}x+\mathbf{c}^{\mathrm{T}}x\mid\mathbf{A}x=\mathbf{b},x\geqslant 0\right\},$$

这里任意的$Q\in\mathbf{Q}$半正定.我们有

$$\underline{f}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{Q})=\inf\left\{\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\underline{Q}x+\underline{c}^{\mathrm{T}}x\mid\underline{A}x\leqslant\overline{b},\overline{A}x\geqslant\underline{b},x\geqslant 0\right\},$$

$$\overline{f}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{Q})=\sup_{y\in\{\pm 1\}^{k}}f(A_{ye},b_{y},\overline{c},\overline{Q}).$$

推论 2 考虑区间二次规划

$$\min\left\{\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}x+\mathbf{c}^{\mathrm{T}}x\mid\mathbf{A}x\leqslant b,x\geqslant 0\right\},$$

这里任意的$Q\in\mathbf{Q}$半正定.我们有

$$\underline{f}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{Q})=\inf\left\{\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\underline{Q}x+\underline{c}^{\mathrm{T}}x\mid\underline{A}x\leqslant\overline{b},x\geqslant 0\right\},$$

$$\overline{f}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{Q})=f(\overline{A},\underline{b},\overline{c},\overline{Q})= \inf\left\{\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\overline{Q}x+\overline{c}^{\mathrm{T}}x\mid\overline{A}x\leqslant\underline{b},x\geqslant 0\right\}.$$

3.2 计算上界的原始方法与对偶方法之间的关系

定理 28 给出了计算区间二次规划(29)的最优值范围的上界的原始方法:

$$\overline{f}(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{Q})=\sup_{y\in\{\pm 1\}^{k}}f(\overline{A},B_{ye},\overline{b},\overline{c},d_{y},\overline{Q}).$$

令

$$\overline{f}_{1}=\sup_{y\in\{\pm 1\}^{k}}f(\overline{A},B_{ye},\underline{b},\overline{c},d_{y},\overline{Q}).$$

下面几个定理的结论给出了原始方法与对偶方法之间的关系[66].

定理 29 当ψ确定后,$\overline{f}_{1}$的情况如下:

$$\overline{f}_{1}\begin{cases}\in\{-\infty,\infty\}, & \psi=-\infty,\\ >-\infty, & \psi\text{ 是有限值},\\ =\infty, & \psi=\infty.\end{cases} \quad (33)$$

定理 30 当$\overline{f}_{1}$确定后,ψ的情况如下:

$$\psi=\begin{cases}-\infty, & \overline{f}_{1}=-\infty,\\ \overline{f}_{1}, & \overline{f}_{1}\text{ 是有限值},\\ \text{无法确定}, & \overline{f}_{1}=\infty.\end{cases} \quad (34)$$

定理 31 若区间凸二次规划(29)的 Dorn 对偶间隙为零,则$\overline{f}_{1}=\psi$.

3.3 最优值下界的若干性质

对于区间二次规划的研究,学者们关注的大都是其最优值范围上界的计算方法[60-61,64-65],这是因为上界的计算是一个 NP 难题[64-65],而下界的计算问题是多项式时间复杂性的,相应的算法较为简单.但是,区间二次优化问题的下界有一些有趣的理论性质,研究这些性质有助于人们深入了解区间二次优化问题内在结构.最近,我们得到了如下结果:

考虑区间二次规划问题(29),定义

$\bar{f}(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{Q})=\inf\{f(A,B,b,c,d,Q)\mid A\in\mathbf{A},B\in\mathbf{B},b\in\mathbf{b},c\in\mathbf{c},d\in\mathbf{d},Q\in\mathbf{Q}\}$.下界$\underline{f}$的取值分为 3 种情况,分别是$\infty$,$-\infty$或有限值.若$\bar{f}=\infty$,则由下界$\underline{f}$的定义可知区间二次规划的每一个子问题都是不可行的.下面的结论讨论了下界取$-\infty$或有限值 2 种情况.

定理 32 若$\underline{f}=-\infty$,则存在$B_0\in\mathbf{B}$使得对任意的$d\in\mathbf{d}$,有

$$f(\underline{A},B_0,\bar{b},\underline{c},d,\underline{Q})\in\{-\infty,\infty\}. \tag{35}$$

这个结论说明,若$\underline{f}=-\infty$,必有一个子系统可达正或负无穷,这个结论并不是显然的,因为一个不完备的系统未必聚点可达.

若$\underline{f}$是有限的,下述结论给出了如何构造出对应该值的子问题的方法.

定理 33 设$\underline{f}$是有限的,令x^*为问题

$$\min\left\{\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\underline{Q}x+\underline{c}^{\mathrm{T}}x\mid \underline{A}x\leqslant\bar{b},\underline{B}x\leqslant\bar{d},\bar{B}x\geqslant\underline{d},x\geqslant 0\right\}$$

的最优解,则

$$\underline{f}=f(\underline{A},B_c-T_yB_\Delta,\bar{b},\underline{c},d_c+T_yd_\Delta,\underline{Q}),$$

这里

$$y_i=\begin{cases}\dfrac{(B_cx^*-d_c)_i}{(B_\Delta x^*+d_\Delta)_i}, & (B_\Delta x^*+d_\Delta)_i>0,\\ \alpha, & (B_\Delta x^*+d_\Delta)_i=0,\end{cases}$$
$$i=1,2,\cdots,k,\quad \alpha\in[-1,1]. \tag{36}$$

一般的,由式(36)定义的向量y在大多数情况下并不属于$\{\pm1\}^k$,故定理 33 中的子问题中一般有$B_c-T_yB_\Delta\neq B_{ye}$,$d_c+T_yd_\Delta\neq d_y$,这样会给下界的计算带来一些麻烦.然而,可以通过增加一些条件使得y属于$\{\pm1\}^k$.

定理 34 设问题

$$\max\left\{-\frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}\underline{Q}u-\bar{b}^{\mathrm{T}}v_1-\bar{d}^{\mathrm{T}}v_2+\underline{d}^{\mathrm{T}}v_3\mid \underline{Q}u+\underline{A}^{\mathrm{T}}v_1+\underline{B}^{\mathrm{T}}v_2-\bar{B}^{\mathrm{T}}v_3+\underline{c}\geqslant 0,v_i\geqslant 0,i=1,2,3\right\}$$

有一个最优解$(u^*,v_1^*,v_2^*,v_3^*)^{\mathrm{T}}$且其满足$v_2^*+v_3^*>0$,则

$$\underline{f}=f(\underline{A},B_{ye},\bar{b},\underline{c},d_y,\underline{Q}),$$

这里

$$y_i=\begin{cases}1, & (v_2^*)_i>0,\\ -1, & (v_2^*)_i=0.\end{cases}\ (i=1,2,\cdots,k) \tag{37}$$

当$\underline{f}$是有限值时,定理 33 和定理 34 具体给出了其对应的子问题.

原始优化问题与其对偶问题有着密切的联系,在某些情形下通过对偶问题求解原问题会更简单.从对偶问题出发研究原始问题,这一确定型优化问题中常用的技巧在区间优化中也是非常有效的[7,60-61,65,67-68].我们证明了如下结论:设$\underline{f}$取有限值,考虑$\underline{f}$模型的对偶优化问题

$$\theta(u,v,w)=\min_{b\in\mathbf{b},d\in\mathbf{d}}-\frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}\underline{Q}u-b^{\mathrm{T}}v-d^{\mathrm{T}}w,$$
$$S=\{(u,v,w)^{\mathrm{T}}\mid \underline{Q}u+A^{\mathrm{T}}v+B^{\mathrm{T}}w+c\geqslant 0,v\geqslant 0,\ \forall A\in\mathbf{A},\forall B\in\mathbf{B},\forall c\in\mathbf{c}\},$$

则可以得到下述结论:

定理 35 若$\underline{f}$是有限值,则$\underline{f}=\max\{\theta(u,v,w)\mid(u,v,w)^{\mathrm{T}}\in S\}$.

除了区间二次优化问题,对一般区间非线性优化问题的研究还刚刚起步,主要的方法有如下几种:一是引入序关系转换区间优化问题为确定型优化问题,二是研究最优值的上下界,再就是引入 Hukuhara 导数利用分析工具研究最优解的特征,有兴趣的读者可以参考文献[64,69-72].

4 应用

区间系统与区间优化模型在人们的生产与社会实践中有着广泛的应用.这里仅列举区间优化技巧的部分应用例子.文献[41]研究了养鸡场的饲料配比问题;文献[73]研究了流域水污染控制问题;文献[74]研究了固体废物管理系统的优化问题;文献[75]研究了社区规模可再生能源系统规划问题;文献[76]研究了带区间加工时间的两台机器流水线排序问题;文献[77]研究了固体废物的可持续发展管理系统问题;文献[78]研究了非点源农业水污染的管理问题;文献[79]研究了离散动态系统的故障诊断问题;文献[80]研究了流域水资源配置问题;文献[81]研究了水及废水的负荷分配问题;文献[82]研究了支持能源系统规划和空气污染缓解问题;文献[83]研究了带有时间窗口的车辆路径问题;文献

[84]研究了水资源与农业土地利用规划问题;文献[85]研究了空气质量管理问题;文献[86]研究了电力系统的碳排放风险分析问题.可以预期,随着科技的发展与社会的进步,区间系统与区间优化的模型与技术将得到越来越多的应用.

参考文献
References

[1] Birge J, Louveaux F. Introduction to stochastic programming[M].New York:Physica-Verlag,1997
[2] Tanaka H,Asal K.Fuzzy linear programming problemwith fuzzy numbers[J].Fuzzy Sets and Systems,1984,13:1-10
[3] Chanas S,Kuchta D.A concept of the optimal solution of the transportation problem with fuzzy cost coefficients [J].Fuzzy Sets and Systems,1996,82:299-305
[4] Moore R.Interval analysis[M].Prentice-Hall,Englewood Cliffs,NJ,1966
[5] Moore R.Interval arithmetic and automatic error analysis in digital computing[M].Thesis:Stanford University,1962
[6] Moore R, Kearfott R, Cloud M. Introduction to intervalanalysis[M].SIAM,Philadelphia,2009
[7] Fiedler M,Nedoma J,Ramik J,et al.Linear optimization problems with inexact data[M].New York:Springer-Verlag,2006
[8] Oettli W,Prager W.Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coeficients and right-hand sides[J].Numerische Mathematik,1964,6:405-409
[9] Gerlach W.Zur losung hearer ungleichungssysteme bei storung der rechten seite und der koefizientenmatrix, mathematische operationsforschung und statistik [J]. Series Optimization,1981,12:41-43
[10] Rohn J.Solvability of systems of linear interval equations [J].SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications,2003,25:237-245
[11] Poljak S,Rohn J.Checking robust nonsingularity is NP-hard[J].Mathematics of Control,Signals,and Systems,1993,6:1-9
[12] Shary S.Solving the interval linear tolerance problem[J].Math Comput Simulation,1995,39:53-85
[13] Shary S.Controllable solution set to interval static systems [J].Math Comput Simulation,1997,86:185-196
[14] Shary S.A new technique in systems analysis under interval uncertainty and ambiguity[J].Reliab Comput,2002,8(5):321-418
[15] Li W,Wang H,Wang Q.Localized solutions to interval linear equations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2013,238(15):29-38
[16] Worrawate L,Phantipa T.L-and R-localized solvabilities of max-separable interval linear equations and its applications[J].Journal of computational and applied mathematics,2015,279:306-317
[17] Hladík M.Weak and strong solvability of interval linear systems of equations and inequalities[J].Linear Algebra and its Applications,2013,438:4156-4165
[18] Li H,Luo J,Wang Q.Solvability and feasibility of interval linear equations andinequalities [J]. Linear Algebra Appl,2014,463:78-94
[19] Li W,Liu X,Li H.Generalized solutions to interval linear programmes and related necessary and sufficient optimality conditions [J]. Optimization Methods &Software,2015,30(3):516-530
[20] Alefeld G,Herzberger J.Introduction to interval computations[M].New York:Academic Press,1983
[21] Neumaier A.Interval methods for systems of equations [M].Cambridge:Cambridge University Press,1990.
[22] Popova E.Solvability of parametric interval linear systems of equations and inequalities[J].SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications,2015,36(2):615-633
[23] Farkas J. Theorie der einfachen ungleichungen [J]. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik,1902,124:1-27
[24] Rohn J. A farkas-type theorem for linear interval equations[J].Computing,1989,43:93-95
[25] Karademir S,Prokopyev O.A short note on solvability of systems of interval linear equations[J].Linear Multilinear Algebra,2011,59:707-710
[26] Rohn J.A farkas-type theorem for interval linear inequalities[J].Optim Lett,2014,8:1591-1598
[27] Xia M, Li W, Li H. Farkas-type theorems for interval linear systems[J].Linear &Multilinear Algebra,2015,63(7):1390-1400
[28] Ishibuchi H, Tanaka H. Multiobjective programming in optimization of the interval objective function [J]. European Journal of Operational Research,1990,48(2):219-225.
[29] Ishibuchi H,Tanaka H.Formulation and analysis of linearprogramming problem with interval coefficients [J]. Journal ofJapan Industrial Management Association,1989,40(5):320-329 (InJapanese)
[30] Facchinetti G,Ricci R,Muzzioli S.Note on rankingfuzzy triangular numbers[J].International Journal of Intelligent Systems,1998,13:613-622
[31] 刘新旺,达庆利.一种区间线性规划的满意解[J].系统工程学报,1999,14(2):123-128
LIU Xinwang, DA Qingli. A satisfactory solution for interval linear programming[J].Journal of Systems Engineering,1999,14(2):123-128
[32] Liu X.Measuring the satisfaction of constraints in fuzzy linearprogramming[J].Fuzzy Sets and Systems,2001,122:263-275
[33] Sengupta A, Pal T, Chakraborty D. Interpretation ofinequality constraints involving interval coefficients and asolution to interval linear programming [J]. Fuzzy Sets andSystems,2001,119:129-138
[34] Xu Z,Da Q.Possibility degree method for ranking intervalnumbers and its application[J].Journal of systems engineering,2003,18(1):67-70
[35] Sengupta A,Pal T.On comparing interval numbers[J].European Journal of Operational Research,2000,127:28-43
[36] Angiz Z, Emrouznejad L, Mustafa A, et al. Aggregating

preference ranking with fuzzy data envelopment analysis [J].Knowledge-Based Systems,2010,23(6):512-519

[37] Yue Z.An extended TOPSIS for determining weights of decision makerswith interval numbers [J]. Knowledge-Based Systems,2011,24:146-153

[38] Dai J,Wang W,Xu Q,et al.Uncertaintymeasurement for interval-valued decision systems based on extendedconditional entropy [J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 27: 443-450

[39] Song P,Liang J,Qian Y.A two-gradeapproach to ranking interval data [J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 27: 234-244

[40] 李炜,线性优化及其扩展[M].北京:国防工业出版社,2011
LI Wei,Linear optimization and extensions[M].Beijing: National Defence Industry Press,2011

[41] Tong S.Interval number and fuzzy number linear programming[J].Fuzzy Sets and Systems,1994,66(3):301-306.

[42] Chinneck J, Ramadan K. Linear programming with interval coefficients[J].J Oper Res Soc,2000,51(2): 209-220

[43] Soleimani D M,Jahanshahloo G.Optimal and strongly optimal solutions for linear programming models with variable parameters [J]. Applied Mathematics Letters, 2007,20(10):1052-1056.

[44] Hladik M.Optimal value range in interval linear programming[J].Fuzzy Optim Decis Mak,2009,8(3):283-294

[45] Li W,Luo J,Wang Q,et al,Checking weak optimality of the solution to linear programming with interval right-hand side[J].Optim Lett,2014,8(4):1287-1299

[46] Li W,Luo J,Deng C.Necessary and sufficient conditions of some strong optimal solutions to the interval linear programming[J].Linear Algebra and its Applications,2013, 439:3241-3255

[47] Luo J,Li W.Strong optimal solutions of interval linear programming [J]. Linear Algebra Appl, 2013, 439: 2479-2493

[48] Luo J,Li W,WANG Q.Checking strong optimality of interval linear programming with inequality constraints and nonnegative constraints[J].Journal of Computational and Applied Mathematics,2014,260:180-190

[49] Li H.Necessary and sufficient conditions for unified optimality of interval linear program in the general form[J]. Linear Algebra and its Applications,2015,484:154-174

[50] Li Wei.A note on dependency between interval linear systems[J].Optimization Letters,2015,9(4):795-797

[51] Rohn J.Strong solvability of interval linear programming problems[J].Comp,1981,26:79-82

[52] Hladík M.Interval linear programming:A survey[M]// Linear Programming New Frontiers,Nova Science Publishers Inc,2011

[53] Luo J,Li W.Checking strong optimality of interval linear programming[J]. Advances in intelligence systems research,2013,37:152-155

[54] 史加荣,刘三阳,熊文涛.区间数线性规划的一种新解法[J].,系统工程理论与实践,2005,25(2):101-106
SHI Jiarong, LIU Sanyang, XIONG Wentao. A new solution method for interval linear programming [J]. System engineering theory and Practice, 2005, 25 (2): 101-106

[55] 郭均鹏,李汶华.区间线性规划的标准型及其最优值区间[J].管理科学学报,2004,7(3):59-63
GUO Junpeng, LI Wenhua. Standard form of interval linear programming and its optimal objectiveinterval value [J].Journal of Management Sciences in China,2004,7(3):59-63

[56] Hladík M.How to determine basis stability in interval linear programming[J].Optim Lett,2014,8(1):375-389

[57] Wang X,Huang G.Violation analysis on two-step method for interval linearprogramming[J].Information Sciences, 2014,281:85-96

[58] Steuer R. Algorithms for linear programming problems with interval objective function coefficients [J]. Math Oper Res,1981,6:333-348

[59] Allahdadi M,Nehi H.The optimal solution set of the interval linear programming problems [J]. Optim Lett, 2013,7(8):1893-1911

[60] Liu S,Wang R.A numerical solution method to intervalquadratic programming[J].Applied Mathematics and Computation,2007,189(2):1274-1281

[61] Li W. Tian X. Numerical solution method for generalinterval quadratic programming[J].Applied Mathematics and Computation,2008,202:589-595

[62] Li W.Algorithm for interval quadratic programming with equality constraints [C] // Proceedings of FSKD'09, 2009,6:78-81

[63] Li W.An improving procedure of the numerical solution method for interval quadratic programming [C] // Proceedings of ICICTA09,2009,1:165-168

[64] Hladík M. Optimal value bounds in nonlinear programming with interval data[J].Top,2011,19:93-106

[65] Li W,Xia M,Li H.New method for computing the upper bound of optimal value in interval quadratic program[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015,288:70-80

[66] Li W,Xia M,Li H.Some results on the upper bound of optimal values in interval quadratic programming,(submmited)

[67] Alefeld G,Mayer G.Interval analysis:Theory and applications[J].Journal of Computational and Applied Mathematics,2000,121:421-464

[68] Soleimani D M,Jahanshahloo G.Optimal and strongly optimal solutions for linear programming models with variable parameters [J]. Applied Mathematics Letters, 2007,20(10):1052-1056

[69] Wu X, Huang G, Liu L, et al. An interval nonlinear program for the planning of waste management systems with economies-of-scale effects: A case study for the region of Hamilton,Ontario,Canada[J].Eur J Oper Res, 2006,171(2):349-372

[70] Agarwal P,Bohner M.Basic calculus on time scales and some of its applications[J].Results Math,1999,35:3-22

[71] Stefanini L, Bede B. Generalized Hukuhara differentiability of interval valued functions and interval differential equations [J]. Nonlinear Anal, 2009, 71: 1311-1328.

[72] Vasile L. Hukuhara differentiability of interval-valued functionsand interval differential equations on time scales [J].Information Sciences,2013,248:50-67
[73] Chang N,Chen H,Shaw D,et al.Water pollution controlin river basin by interactive fuzzy interval multiobjectiveprogramming[J].Environ Eng,1997,123(12):1208-1216
[74] Chang N,Chen Y,Wang S.A fuzzy interval multiobjectivemixed integer programming approach for the optimal planning of solid waste management systems[J].Fuzzy Sets Syst,1997,89(1):35-60
[75] Cai Y,Huang G,Yang Z,et al.Community scalerenewable energy systems planning under uncertainty-aninterval chance-constrained programming approach[J].Renew Sustain Energy Rev,2009,13(4):721-735
[76] Matsveichuk N M, Sotskov Yu N, Egorova N G, et al. Scheduleexecution for two-machine flow-shop with interval processingtimes[J].Mathematical and Computer Modelling,2009,49:991-1011
[77] Pires A,Chang N,Martinho G.An AHP-based fuzzy intervalTOPSIS assessment for sustainable expansion of the solid wastemanagement system in Setubal Peninsula,Portugal[J].Resour Conserv Recycl,2011,56(1):7-21
[78] Zhang X D,Huang G H,Nie X H.Possibilistic stochastic watermanagement model for agricultural nonpoint source pollution[J].Water Resour Plan Manag,2011,137(1):101-112
[79] Li W,Tian X.Fault detection in discrete dynamic systems with uncertainty based on interval optimization[J].Mathematical Modelling and Analysis,2011,16(4):549-557
[80] Nikoo M,Kerachian R,Poorsepahy-Samian H.An intervalparameter model for cooperative inter-basin water resources allocation considering the water quality issues [J].Water Resour Manag,2012,26(11):3329-3343
[81] Nikoo M, Kerachian R, Karimi A. A nonlinear intervalmodel for water and waste load allocation in river basins [J]. WaterResour Manag, 2012, 26 (10): 2911-2926
[82] Dong C,Huang G,Cai Y,et al.An inexact optimization-modeling approach for supporting energy systems planning andair pollution mitigation in Beijing city[J]. Energy,2012,37(1):673-688
[83] Vidal T,Crainic T,Gendreau M,et al.A hybrid geneticalgorithm with adaptive diversity management for a large class of vehicle routing problems with time-windows[J]. Comput Oper Res,2013,40(1):475-489
[84] Dong C,Huang G,Tan Q,et al.Coupled planning of waterresources and agricultural land-use based on an inexactstochasticprogramming model[J]. Front Earth Sci, 2014,8(1):70-80
[85] Cheng G, Huang G, Dong C.Synchronic interval Gaussianmixed-integer programming for air quality management [J]. SciTotal Environ, 2015, 538 (15): 986-996
[86] Zhu Y,Li Y,Huang G.An optimization decision supportapproach for risk analysis of carbon emission trading in electricpower systems[J].Environ Model Software,2015, 67:43-56

Interval systems and interval optimization: Theory and applications

LI Wei[1] HUANG Jinhua[2,3]
1 Institute of Operational Research &Cybernetics,Hangzhou Dianzi University,Hangzhou 310018
2 School of Automation Science and Engineering,South China University of Technology,Guangzhou 510641
3 Department of Electric and Electronic Engineering,Wuhan Institute of Shipbuilding Technology,Wuhan 430050

Abstract We give an overview on theorem and applications of interval systems and interval optimization.Among others we discuss solutions and solubility of interval linear systems,optimal solution and optimality of interval linear programming problem and interval quadratic programming problem.We also introduce some applications such as energy systems planning,air quality management,Fault Detection etc.

Key words interval systems;interval linear programming;interval quadratic programming;weak solutions;strong solutions