



金融领域的随机建模与基于软件 R 的 Monte Carlo 模拟(6):其他随机微分方程模型

摘要

主要研究金融领域中的多种数学模型,重点是利用 R 软件进行数值模拟.继续讨论更多的随机微分方程(SDE)模型,包括均值回归过程、均值回归的 Ornstein-Uhlenbeck(OU)过程、平方根过程、CIR 模型以及 θ 过程.进一步,将对当前 SDE 数值解的研究给出更深入的建议.

关键词

均值回归过程;均值回归的 OU 过程;平方根过程;CIR 模型; θ 过程

中图分类号 F830;O211

文献标志码 A

0 引言

文献[1]讨论了 Black-Scholes 模型^[2-4]、Black-Scholes 偏微分方程(PDE)以及欧式期权定价公式.Black-Scholes 模型是由线性 SDE(随机微分方程)描述的,SDE 的线性性使我们能够获得潜在资产价格的显式表达式,从而给出欧式期权定价公式.然而,Black-Scholes 模型仅适用于描述某一阶段的资产价格.为了对利率、汇率、金融指数、波动率等金融量建模,更多的 SDE 被建立和发展.本文致力于研究这些 SDE 模型,包括均值回归过程^[5]、均值回归 Ornstein-Uhlenbeck(OU)过程^[6]、平方根过程^[7]、CIR 模型^[8]以及 θ 过程^[7,9].

1 均值回归过程

均值回归是一个数学概念,它有的时候被用于股票投资^[10-12],有的时候也被用于其他领域,如种群系统^[9,13].一般地,该定义的本质在于假设股票的高价位和低价位都是临时的,股票价格总是要趋近于时间的平均值.在股票价格分析中使用回归分析主要包含两个方面:辨别股票交易的价格范围和利用分析技巧(如考虑利润因素等)计算平均股票价格.

考虑均值回归模型,形式为线性 SDE:

$$dS(t) = \lambda(\mu - S(t))dt + \sigma S(t)dB(t) \quad (1)$$

满足初值条件 $S(0) = S_0 > 0$.特别地,它也常用于利率和汇率动力学行为的建模.从该模型中可以看出,当 $S(t)$ 高于“平均值” $\mu (> 0)$ 时,漂移项 $\lambda(\mu - S(t))$ 是负的,导致 $dS(t)$ 更多的可能成为负值, $S(t)$ 递减.另一方面,当 $S(t)$ 低于值 μ 时, $\lambda(\mu - S(t))$ 是正的,导致 $dS(t)$ 更多可能为正值, $S(t)$ 递增.因此,预测 $S(t)$ 将最终趋于 μ .事实上,可以看到当 $t \rightarrow \infty$ 时, $ES(t) \rightarrow \mu$.由于该 SDE 具有显式解

$$S(t) = S_0 \exp[-(\lambda + \sigma^2/2)t + \sigma B(t)] +$$

$$\lambda \int_0^t \exp[-(\lambda + \sigma^2/2)(t-s) + \sigma(B(t) - B(s))] ds,$$

因此通过解的显式表达式可知只要 $S_0 > 0$, $S(t)$ 就保持正性.注意到对 $0 \leq s \leq t < \infty$,

$$E\left(\exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}(t-s) + \sigma(B(t) - B(s))\right]\right) = 1.$$

收稿日期 2014-09-13

资助项目 国家自然科学基金(11171056,11171081)

作者简介

毛学荣,男,博士,教授,研究方向为随机分析,随机微分方程理论及应用.

x.mao@strath.ac.uk

李晓月(通信作者),女,博士,教授,研究方向为随机微分方程理论及应用.

lixxy209@nenu.edu.cn

¹ 斯特莱斯克莱德大学 数学系,格拉斯哥, G1 1XT,英国

² 东北师范大学 数学与统计学院,长春,130024

计算期望

$$ES(t) = S_0 e^{-\lambda t} + \lambda \mu \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} ds = \quad (2)$$

$$S_0 e^{-\lambda t} + \mu [1 - e^{-\lambda t}] = \mu + (S_0 - \mu) e^{-\lambda t}. \quad (3)$$

这意味着

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ES(t) = \mu.$$

另一种获得期望的有效方式是对方程(1)两边取期望,有

$$dm_1(t) = \lambda(\mu - m_1(t)) dt,$$

其中 $m_1(t) = ES(t)$, 即

$$\frac{dm_1(t)}{dt} = \lambda(\mu - m_1(t)).$$

众所周知,该微分方程解具有显式表达式

$$m_1(t) = e^{-\lambda t} \left(m_1(0) + \lambda \mu \int_0^t e^{\lambda s} ds \right) = e^{-\lambda t} m_1(0) + \mu(1 - e^{-\lambda t}),$$

和(2)相同.为了得到二阶矩 $m_2(t) = E(S^2(t))$, 利用 Itô 公式,有

$$d(S^2(t)) = 2S(t) [\lambda(\mu - S(t)) dt + \sigma S(t) dB(t)] + (\sigma S(t))^2 dt,$$

两端取期望得

$$\frac{dm_2(t)}{dt} = 2\lambda\mu m_1(t) - (2\lambda - \sigma^2) m_2(t). \quad (4)$$

对 $\lambda > \sigma^2$ 的情形,微分方程(4)有显式解

$$m_2(t) = e^{-(2\lambda - \sigma^2)t} \left(m_2(0) + 2\lambda\mu \int_0^t e^{(2\lambda - \sigma^2)s} m_1(s) ds \right). \quad (5)$$

利用等式(3),有

$$\int_0^t e^{(2\lambda - \sigma^2)s} [\mu + (S_0 - \mu) e^{-\lambda s}] ds = \frac{\mu}{2\lambda - \sigma^2} [e^{(2\lambda - \sigma^2)t} - 1] + \frac{S_0 - \mu}{\lambda - \sigma^2} [e^{(\lambda - \sigma^2)t} - 1].$$

因此

$$m_2(t) = e^{-(2\lambda - \sigma^2)t} \left(S_0^2 + \frac{2\lambda\mu^2}{2\lambda - \sigma^2} [e^{(2\lambda - \sigma^2)t} - 1] + \frac{2\lambda\mu(S_0 - \mu)}{\lambda - \sigma^2} [e^{(\lambda - \sigma^2)t} - 1] \right). \quad (6)$$

上式意味着

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_2(t) = \frac{2\lambda\mu^2}{2\lambda - \sigma^2}.$$

因此

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{var}(S(t)) = \frac{2\lambda\mu^2}{2\lambda - \sigma^2} - \mu^2 = \frac{\mu^2 \sigma^2}{2\lambda - \sigma^2}.$$

对于 $\lambda \leq \sigma^2$ 的情形留给读者自行考虑.

本文设计软件 R 中程序(定义为函数)模拟解

的样本路径:

```
> mrp <-function(S0, Dt, M, a, b, c) {
  ## give S0, Dt, M, a, b, c, for dS(t) = a(b-S) dt + cSdB
  (t), 0 ≤ t ≤ Dt * M
  +t <- 1:M
  +t <- Dt * t
  +S <- numeric()
  +S[1] = S0
  +for (i in 2:M) {
    +S[i] = S[i-1] + a * (b-S[i-1]) * Dt + c * S[i-1] * sqrt
    (Dt) * rnorm(1) }
  +plot(t, S, pch = ".", type = "l", col = "black", xlab = "t",
  ylab = "S(t)") }
```

R 中函数的设计基于文献[14]中讨论过的 Euler-Maruyama(EM)方法(也可参见文献[9, 13, 15]).均值回归过程(1)满足线性 SDE, 显然满足全局 Lipschitz 条件, 因此有限时间强收敛定理保证了步长充分小时, EM 方法得到的数值解能够很好地逼近真实解.例如, 对给定的均值回归过程

$$dS(t) = 3(1 - S(t)) dt + 2S(t) dB(t), \quad 0 \leq t \leq 20,$$

满足初值条件 $S_0 = 4$, 可以选择步长 $Dt = 0.001$, 在 R 中, 两次执行命令

```
> mrp(4, 0.001, 20000, 3, 1, 2)
```

就可以获得图 1 中给出的解的两条样本路径.由图 1 可以清晰地看出显式解围绕着均值 1 波动.

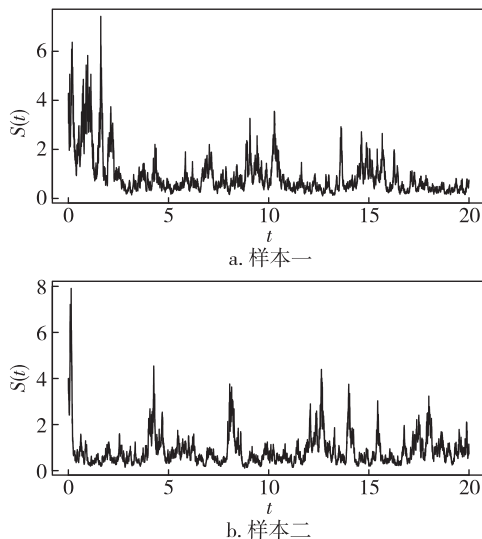


图 1 均值回归过程的两条样本路径

Fig. 1 Two sample paths of the mean reverting process

假设潜在资产价格遵循 0 时刻价格为 S_0 的均值回归过程(1), 考虑在到期日 T 执行价格为 E 的欧式看涨期权, 看涨期权在到期日 T 的平均收益用 MP_{call}

表示,则

$$MP_{\text{call}} = E(\max(S(T) - E, 0)).$$

尽管可以求出 $S(T)$ 的显式表达式,但仍得不到平均收益的显式公式,这与在文献[1]中研究的 Black-Schole 模型完全不同.此时, Monte Carlo 模拟将起到重要作用.事实上,设计 R 中获得看涨期权平均收益近似值的函数:

```
> MPcall <-function(S0,Dt,M,a,b,c,N,E){
+## give S0,Dt,M,a,b,c,N,E for dS=a(b-S)dt+cSdB,
+## T=M * Dt,N=sample size,E=exercise price
+x <-numeric()
+XT <-numeric()
+x[1]=S0
+for(j in 1:N){
+for(i in 2:M)x[i]=x[i-1]+a*(b-x[i-1])*Dt+c*
x[i-1]*sqrt(Dt)*mnorm(1)}
+XT[j]=x[M]}
+payoff <-XT-E
+payoff[payoff<0] <-0
+mean(payoff)
```

此时,有限时间强收敛定理和大数定律保证了步长充分小且样本足够多时,EM 方法得到的数值解具有足够好的精度.

类似地,考虑在到期日 T 执行价格为 E 的欧式看跌期权.看跌期权在到期日 T 的平均收益用 MP_{put} 表示,则

$$MP_{\text{put}} = E(\max(E - S(T), 0)).$$

设计 R 中获得看跌期权平均收益近似值的函数:

```
> MPput <-function(S0,Dt,M,a,b,c,N,E){
+## give S0,Dt,M,a,b,c,N,E for dS=a(b-S)dt+cSdB,
+## T=M * Dt,N=sample size,E=exercise price
+x <-numeric()
+XT <-numeric()
+x[1]=S0
+for(j in 1:N){
+for(i in 2:M)x[i]=x[i-1]+a*(b-x[i-1])*Dt+c*
x[i-1]*sqrt(Dt)*mnorm(1)}
+XT[j]=x[M]}
+payoff <-E-XT
+payoff[payoff<0] <-0
+mean(payoff)
```

实例 1 考虑均值回归过程

$$dS(t) = 0.05(10 - S(t))dt + 0.03S(t)dB(t),$$

$$S(0) = 10.$$

在 0 时刻签订到期时间 $T = 1$, 执行价格 $E = 9.9$ 的欧

式看涨期权和看跌期权.选定步长 $Dt = 0.001$, 模拟 $N = 1000$ 条均值回归过程的样本路径去获得看涨和看跌期权平均收益的近似值.即在 R 中,输入命令

```
> MPcall(10,0.001,1000,0.05,10,0.03,1000,9.9)
> MPput(10,0.001,1000,0.05,10,0.03,1000,9.9)
```

就可以获得平均收益

$$MP_{\text{call}} = 0.1679596, MP_{\text{put}} = 0.07038066.$$

不难证明

$$ES(T) + MP_{\text{put}} - MP_{\text{call}} = E. \quad (7)$$

利用式(3),有

$$\mu + (S_0 - \mu)e^{-\lambda T} + MP_{\text{put}} - MP_{\text{call}} = E. \quad (8)$$

对实例 1,有

$$\mu + (S_0 - \mu)e^{-\lambda T} + MP_{\text{put}} - MP_{\text{call}} =$$

$$10 + 0.07038066 - 0.1679596 = 9.902421,$$

它非常接近 $E = 9.9$.由此可以说明均值收益的近似值精度足够高.

2 均值回归的 Ornstein-Uhlenbeck 过程

本节开始讨论均值回归的 Ornstein-Uhlenbeck (OU) 过程,它从形式上与前一节讨论的均值回归模型非常接近,满足 SDE

$$dS(t) = \lambda(\mu - S(t))dt + \sigma dB(t).$$

均值回归的 OU 过程是一个随机过程.粗略地讲,它描述了在摩擦力影响下大量布朗粒子的运动速度.该过程是平稳的、高斯的、马尔科夫的,是唯一满足这 3 条性质的非平凡过程,它还允许对空间和时间变量做线性变换.随着时间的增长,这个过程的均值将趋于漂移项中的“平均值”(均值回归).

在这个模型中,扩散项并不依赖于 $S(t)$,因此,可以看到 $S(t)$ 可以是负的.均值回归的 OU 过程经常用于商品(如电力)供需差异的建模.它满足的 SDE 具有显式解

$$S(t) = e^{-\lambda t} \left(S_0 + \lambda \mu \int_0^t e^{\lambda s} ds + \sigma \int_0^t e^{\lambda s} dB(s) \right) =$$

$$\mu + e^{-\lambda t} (S_0 - \mu) + \sigma e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} dB(s).$$

显然, $S(t)$ 是正态分布,期望

$$ES(t) = \mu + e^{-\lambda t} (S_0 - \mu) \rightarrow \mu, \quad \text{当 } t \rightarrow \infty \text{ 时,}$$

且方差

$$\text{var}(S(t)) = \frac{\sigma^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}) \rightarrow \frac{\sigma^2}{2\lambda}, \quad \text{当 } t \rightarrow \infty \text{ 时.}$$

因此,注意到对任意初值 S_0 , 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $S(t)$ 的分布总是趋于正态分布 $N(\mu, \sigma^2/2\lambda)$. 也要注意 $S(t)$ 有可能是负的,但如果 $\mu > 1.5\sigma^2/\lambda$, 对充分大的 t ,

$S(t)$ 是负的概率是相当小的. 进一步, 如果 $\mu > 1.5\sigma^2/\lambda$, 且 $S_0 \geq \mu$, 则对任意的 $t, S(t)$ 是负的概率是相当小的.

设计 R 中程序模拟解的样本路径:

```
> mroup <- function(S0, Dt, M, a, b, c) {
  +## give S0, Dt, M, a, b, for dS(t) = a(b-S) dt + c dB(t), 0
  <= t <= Dt * M
  +t <- 1: M
  +t <- Dt * t
  +S <- numeric()
  +S[1] = S0
  +for (i in 2: M) {
  +S[i] = S[i-1] + a * (b - S[i-1]) * Dt + c * sqrt(Dt) *
  mnorm(1) }
  +plot(t, S, pch = ".", type = "l", col = "black", xlab = "t",
  ylab = "S(t)") }
```

给定均值回归的 OU 过程

$dS(t) = 3(1 - S(t)) dt + 2dB(t)$, $0 \leq t \leq 20$ 满足初值条件 $S_0 = 4$, 选定步长 $Dt = 0.001$, 在 R 中两次输入命令

```
> mroup(4, 0.001, 20000, 3, 1, 2)
```

就可以获得解的两条样本路径, 如图 2 所示. 图 2 清晰地显示尽管解可以是负的但它围绕 1 波动.

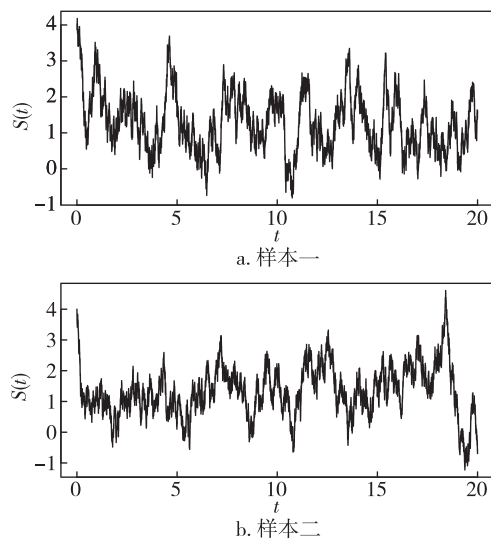


图 2 均值回归的 OU 过程的两条样本路径

Fig. 2 Two sample paths of the mean reverting OU process

3 平方根过程

平方根过程与几何布朗运动模型非常接近^[7,9], 它满足

$$dS(t) = \lambda S(t) dt + \sigma \sqrt{S(t)} dB(t). \quad (9)$$

它的均值呈指数增长, 而它的标准差是关于 $S(t)$ 的平方根的函数而不是 $S(t)$ 本身, 这使得误差项的“方差”正比于 $S(t)$. 因此, 随着资产价格 $S(t)$ 的增长(当然超过 1), 如果资产价格的波动不是“太大”, 这种情况用平方根过程描述更加恰当.

对于这个 SDE, 读者当然想知道 $S(t)$ 是否为负的. 假设 $S(t)$ 是负的, 则 $\sqrt{S(t)}$ 将成为复数, 就会导致对资产价格的建模失去意义. 接下来我们将证明这种假设不可能发生. 等价地, 我们证明当 $S_0 \geq 0$ 时, SDE

$$dS(t) = \lambda S(t) dt + \sqrt{|S(t)|} dB(t) \quad (10)$$

的解是非负的.

为了证明解的非负性, 定义 $a_0 = 1$, 且对任意整数 $k \geq 1$, 定义 $a_k = e^{-k(k+1)/2}$, 则

$$\int_{a_k}^{a_{k-1}} \frac{du}{u} = k.$$

令 $\psi_k(u)$ 是满足 $0 \leq \psi_k(u) \leq 2/ku$ 的连续函数, 它的支撑包含在区间 (a_k, a_{k-1}) 内, 且

$$\int_{a_k}^{a_{k-1}} \psi_k(u) du = 1.$$

这样的函数显然存在. 对 $x \geq 0$, 定义 $\varphi_k(x) = 0$, 且当 $x < 0$ 时,

$$\varphi_k(x) = \int_0^{-x} dy \int_0^y \psi_k(u) du.$$

因此 $\varphi_k \in C^2(\mathbf{R}; \mathbf{R})$, 并且当 $-\infty < x < -a_k$ 时, $-1 \leq \varphi'_k(x) \leq 0$; 否则, $\varphi'_k(x) = 0$. 当 $-a_{k-1} < x < -a_k$ 时, $0 \leq \varphi''_k(x) \leq \frac{2}{k|x|}$; 否则, $\varphi''_k(x) = 0$.

进一步可知, 对 $x \in \mathbf{R}$, 有

$$x^- - a_{k-1} \leq \varphi_k(x) \leq x^-,$$

其中

$$x^- = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

对任意 $t \geq 0$, 利用 Itô 公式, 得

$$\varphi_k(S(t)) = \varphi_k(S_0) + \int_0^t \left[\lambda S(r) \varphi'_k(S(r)) + \right.$$

$$\left. \frac{\sigma^2}{2} |S(r)| \varphi''_k(S(r)) \right] dr +$$

$$\sigma \int_0^t \varphi'_k(S(r)) \sqrt{|S(r)|} dB(r) \leq$$

$$\int_0^t \lambda S^-(r) dr + \frac{\sigma^2 t}{k} + \sigma \int_0^t \varphi'_k(S(r)) \sqrt{|S(r)|} dB(r).$$

因此

$$ES^-(t) - a_{k-1} \leq E\varphi_k(S(t)) \leq \lambda \int_0^t ES^-(r) dr + \frac{\sigma^2 t}{k}.$$

从而

$$ES^-(t) \leq a_{k-1} + \frac{\sigma^2 t}{k} + \lambda \int_0^t ES^-(r) dr.$$

根据 Gronwall 不等式,对 $\forall t \geq 0$,有

$$ES^-(t) \leq \left(a_{k-1} + \frac{\sigma^2 t}{k} \right) e^{\lambda t}.$$

令 $k \rightarrow \infty$,有 $ES^-(t) \leq 0$.故对 $\forall t \geq 0$,有 $ES^-(t) = 0$.因此,对 $\forall t \geq 0, P\{S(t) < 0\} = 0$.

由 $S(t)$ 的连续性,可知对所有的 $t \geq 0, S(t) \geq 0$ 在几乎必然 (a.s.) 意义下成立.这样就证明了 SDE (10) 解的非负性,因此 SDE (10) 可以改写为 SDE (9) 的形式.

接下来,建立解 $S(t)$ 的均值和方差所满足的公式.定义 $m_1(t) = ES(t)$ 和 $m_2(t) = E(S^2(t))$.由方程 (9) 直接可得

$$\frac{dm_1(t)}{dt} = \lambda m_1(t).$$

故均值 $m_1(t) = S_0 e^{\lambda t}$.进一步,根据 Itô 公式,有 $d(S^2(t)) = [2\lambda S^2(t) + \sigma^2 S(t)]dt + 2\sigma(S(t))^3/2dB(t)$.上式两端同时取期望

$$\frac{dm_2(t)}{dt} = 2\lambda m_2(t) + \sigma^2 m_1(t),$$

利用常数变异公式可得

$$m_2(t) = e^{2\lambda t} \left(m_2(0) + \sigma^2 \int_0^t e^{-2\lambda s} m_1(s) ds \right) = e^{2\lambda t} \left(S_0^2 + S_0 \sigma^2 \int_0^t e^{-\lambda s} ds \right) = e^{2\lambda t} \left(S_0^2 + \frac{S_0 \sigma^2}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \right).$$

因此,方差

$$V(S(t)) = m_2(t) - (m_1(t))^2 = \frac{S_0 \sigma^2}{\lambda} (e^{2\lambda t} - e^{\lambda t}).$$

对方程(9)而言,直接应用数值方法会遭到平方根的负值的破坏.为了计算的安全性,自然地想到利用等价形式 (10) 替换 SDE (9).给定步长 $\Delta > 0$,对 SDE (10) 应用 EM 方法.设定 $s_0 = S(0), t_k = k\Delta$,通过

$$s_{k+1} = s_k(1 + \lambda\Delta) + \sigma\sqrt{|s_k|} \Delta B_k, \quad (11)$$

计算近似值 $s_k \approx S(t_k)$,其中 $\Delta B_k = B(t_{k+1}) - B(t_k)$.然而,SDE (10) 不是线性的,也不是全局 Lipschitz 的.因此无法利用标准的收敛定理(如文献[15]中的定理 9.6.2),推理出小步长近似路径是精确的结论.由于平方根函数也不是局部 Lipschitz 的,因此也无法利用文献[16]中的结论.尽管 EM 方法很早就实践中用于获得平方根过程的近似解,但直到 2005 年,它的有限时间强收敛理论才被 Higham 和 Mao 证

明^[17],他们的结论给使用 EM 数值方法模拟的研究者和实践者提供了理论支持.

根据 Higham 和 Mao^[17]的理论,可以编译 R 中程序模拟平方根过程的样本路径:

```
> sqrtp <-function(S0,Dt,M,a,b) {
+## give S0,Dt,M,a,b, for dS(t) = aSdt+bσqrt(|S|) dB
(t),0≤t≤Dt * M
+ t <- 1:M
+ t <- -Dt * t
+S <- numeric()
+S[1] = S0
+for (i in 2:M) {
+S[i] = S[i-1] + a * S[i-1] * Dt + b * sqrt(abs(S[i-1])
* Dt) * rnorm(1) }
+plot(t,S,pch=".",type="l",col="black",xlab="t",
ylab="S(t)") }
```

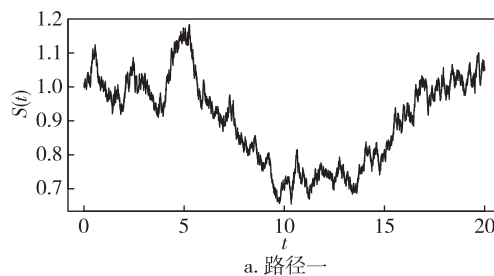
例如,对给定的平方根过程

$$dS(t) = 0.02S(t)dt + 0.1\sqrt{S(t)}dB(t), \quad 0 \leq t \leq 20,$$

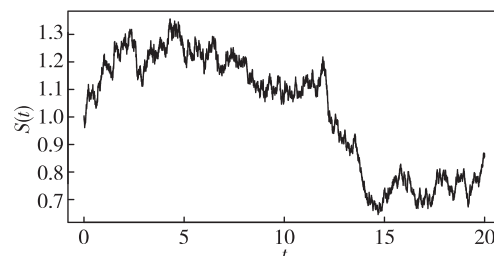
初值 $S_0 = 1$,选定步长 $Dt = 0.001$,在 R 中两次输入命令

```
> sqrtp(1,0.001,20000,0.02,0.1)
```

可以获得解的两条样本路径,如图 3 所示.



a. 路径一



b. 路径二

图 3 平方根过程的两条样本路径

Fig. 3 Two sample paths of the square root process

4 Cox-Ingersoll-Ross 模型

合并平方根和均值回归的想法使我们得到了均值回归的平方根过程

$$dS(t) = \lambda(\mu - S(t))dt + \sigma\sqrt{S(t)}dB(t). \quad (12)$$

这个模型可以用于描述利率的发展,也经常用于评价利率衍生品.1985年由 John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll 和 Stephen A. Ross^[8]引入,因此在金融数学中更多的被称为 CIR 模型.

当 $S_0 > 0$ 时,这个过程同样是非负的.事实上,利用 Itô 公式,有

$$E\varphi_k(S(t)) \leq \varphi_k(S_0) + E \int_0^t \left[\lambda(\mu - S(r))\varphi'_k(S(r)) + \frac{\sigma^2}{2} |S(r)| |\varphi''_k(S(r))| \right] dr \leq \frac{\sigma^2 t}{k}.$$

因此

$$-a_{k-1} \leq ES^-(t) - a_{k-1} \leq \frac{\sigma^2 t}{k}.$$

令 $k \rightarrow \infty$, 对所有的 $t \geq 0$, 有 $ES^-(t) = 0$. 故对所有的 $t \geq 0, S(t) \geq 0$, 几乎必然成立. 也可以借助于对爆炸的经典 Feller 测试^[5,9]来证明更加精确的结论,若 $\sigma^2 \leq 2\lambda\mu$, 则对所有的 $t \geq 0$, 有 $S(t) > 0$ 几乎必然成立.

进一步,很容易获得期望

$$ES(t) = \mu + e^{-\lambda t}(S_0 - \mu) \quad (13)$$

和二阶矩

$$E(S^2(t)) = \frac{\mu(2\lambda\mu + \sigma^2)}{2\lambda} + \frac{(S_0 - \mu)(2\lambda\mu + \sigma^2)}{\lambda} e^{-\lambda t} + \left(S_0^2 + \frac{\mu(2\lambda\mu + \sigma^2)}{2\lambda} - \frac{S_0(2\lambda\mu + \sigma^2)}{\lambda} \right) e^{-2\lambda t}, \quad (14)$$

因此,方差

$$V(S(t)) = \frac{\mu\sigma^2}{2\lambda} + \frac{(S_0 - \mu)\sigma^2}{\lambda} e^{-\lambda t} + \frac{\sigma^2}{\lambda} (0.5\mu - S_0) e^{-2\lambda t}. \quad (15)$$

特别地

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ES(t) = \mu, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \text{var}(S(t)) = \frac{\mu\sigma^2}{2\lambda}.$$

可见这个过程仍然具有均值回归的性质.

特别有趣的是当参数 λ, σ 和 μ 满足关系 $\lambda\mu = \frac{\sigma^2}{4}$ 时,平方根过程 $\sqrt{S(t)}$ 是一个 OU 过程,满足

$$d\sqrt{S(t)} = -\frac{\lambda}{2}\sqrt{S(t)} dt + \frac{\sigma}{2} dB(t),$$

解具有显示表达式

$$\sqrt{S(t)} = \sqrt{S_0} e^{-\lambda t/2} + \frac{\sigma}{2} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)/2} dB(s).$$

5 Θ 过程

另一个非常有用的模型是 Θ 过程^[7,9], 满

足 SDE

$$dS(t) = \lambda S(t) dt + \sigma S^\theta(t) dB(t), \quad (16)$$

其中常数 $\theta \geq 0.5$. 注意到当 $\theta = 1$ 时, Θ 过程是经典的几何布朗运动; 当 $\theta = 0.5$ 时, Θ 过程是平方根过程.

当 $\theta \in (0.5, 1)$ 时, 与平方根过程证明方法类似, 当初值 $S_0 > 0$ 时, 对 $t \geq 0$, 方程 (16) 具有唯一的非负解. 当 $\theta > 1$ 时, 方程 (16) 的解在有限时间可能爆炸. 然而, 若 $\theta > 1$, 可以证明对任意给定的初值 $S_0 > 0$, 当 $t \geq 0$ 时, 方程 (16) 存在唯一全局解 $S(t)$, 且该解以概率 1 为正的. 事实上, 由于方程 (16) 的系数在 $(0, \infty)$ 上是局部 Lipschitz 连续的, 利用横截技巧^[9]可以证明该方程在 $t \in [0, \tau)$ 上存在唯一局部解 $S(t)$. 取充分大的正数 k_0 , 使得 $S_0 \in [1/k_0, k_0]$. 定义

$$\tau_k = \inf\{t \in [0, \tau) : S(t) \notin (1/k, k)\}, \quad k \geq k_0,$$

定义 $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$. 显然只需要证明 $\tau_\infty = \infty$, a.s. 如果该结论不成立, 则存在一对常数 $T > 0$ 和 $\varepsilon \in (0, 1)$, 满足 $P(\tau_\infty \leq T) > \varepsilon$. 因此存在一个足够大的常数 $k_1 \geq k_0$, 使得

$$P(\tau_k \leq T) \geq \varepsilon, \text{ 对所有 } k \geq k_1. \quad (17)$$

定义 C^2 函数 $V: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}_+$,

$$V(S) = \sqrt{S} - 1 - 0.5 \log(S), \quad S > 0.$$

若 $S(t) \in (0, \infty)$, 利用 Itô 公式, 可知

$$dV(S(t)) = 0.5(S^{-0.5}(t) - S^{-1}(t))[\lambda S(t) dt + \sigma S^\theta(t) dB(t)] + 0.25(-0.5S^{-1.5}(t) + S^{-2}(t))\sigma^2 S^{2\theta}(t) dt = F(S(t)) dt + 0.5\sigma(S^{-0.5}(t) - S^{-1}(t))S^\theta(t) dB(t),$$

其中

$$F(S) = 0.5\lambda(S^{0.5} - 1) + 0.25\sigma^2 S^{2\theta-2} - 0.125\sigma^2 S^{2\theta-1.5}, \quad S \in (0, \infty).$$

显然 $F(S)$ 在 $S \in (0, \infty)$ 是有界的, 记为 K . 因此, 只要 $S(t) \in (0, \infty)$, 有

$$dV(S(t)) \leq K dt + 0.5\sigma(S^{-0.5}(t) - S^{-1}(t))S^\theta(t) dB(t).$$

上式两端由 0 到 $\tau_k \wedge T$ 积分, 取期望, 得

$$EV(S(\tau_k \wedge T)) \leq V(S_0) + KE(\tau_k \wedge T) \leq V(S_0) + KT. \quad (18)$$

对 $k \geq k_1$, 定义 $\Omega_k = \{\tau_k \leq T\}$, 由式 (17) 可知, $P(\Omega) \geq \varepsilon$. 注意到每个 $\omega \in \Omega_k, S(\tau_k, \omega)$ 等于 k 或 $1/k$, 因此 $V(S(\tau_k, \omega))$ 不小于

$$\sqrt{k} - 1 - 0.5 \log(k)$$

或

$$\sqrt{1/k} - 1 - 0.5 \log(1/k) = \sqrt{1/k} - 1 + 0.5 \log(k).$$

即

$$V(S(\tau_k, \omega)) \geq [\sqrt{k} - 1 - 0.5 \log(k)] \wedge [\sqrt{1/k} - 1 + 0.5 \log(k)].$$

由 (18) 可知

$$V(S_0) + KT \geq E[I_{\Omega_k}(\omega) V(S(\tau_k, \omega))] \geq \varepsilon([\sqrt{k}-1-0.5\log(k)] \wedge [0.5\log(k)-1]).$$

令 $k \rightarrow \infty$, 则有矛盾

$$\infty > V(S_0) + KT = \infty,$$

因此 $\tau_\infty = \infty$ 几乎必然成立.

当 $\theta > 1$ 时, Θ 过程(16)的数值方法是当今研究的热点问题. 大多数现有数值结果, 包括有影响力的文章^[16], 都要求扩散项系数函数满足线性增长条件, 因此这些方法无法应用到 Θ 过程. 最近, 这一问题取得了一些突破性进展. 例如, 文献[18]研究了广义 Khasminskii 型条件下 SDE 的数值解, 文献[19]利用[18]中的方法研究了均值回归的 Θ 随机波动模型的数值解. 这两篇文献^[18-19]的结论可以用于证明 Θ 过程的 EM 数值解以概率收敛到真实解. 此外, 文献[20]研究了具有强非线性的 Ait-Sahalia 型利率模型^[21]

$$dx(t) = (\alpha_{-1}x(t)^{-1} - \alpha_0 + \alpha_1x(t) - \alpha_2x(t)^r)dt + \sigma x(t)^\rho dB(t), \quad r, \rho > 1 \quad (19)$$

的倒向 EM 方法的数值解的强收敛性.

最近, 为了释放扩散项系数函数的条件, 文献[22]发展了新的数值方法, 称为倒向前向 EM 数值方法. 该方法可以被用于金融数学中出现的高度非线性系统的 Monte Carlo 模拟, 如

$$dx(t) = (\mu - \alpha x^r(t))dt + \beta x^\rho(t)dB(t). \quad r, \rho > 1, \quad (20)$$

或种群系统

$$dx(t) = \text{diag}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \cdot [(\mathbf{b} + \mathbf{A}x^2(t))dt + \mathbf{x}(t)dB(t)], \quad (21)$$

其中 $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$, 矩阵 $\mathbf{A} = (A_{ij})_{n \times n}$ 满足 $\lambda_{\max}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) < 0$, 这里 $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$ 表示 \mathbf{A} 的最大特征根, 且 $\mathbf{x}^2 = (x_1^2, \dots, x_n^2)^T$.

6 结论

本系列文章中讨论了很多金融领域中流行的随机模型以及相应的期权定价问题, 演绎了如何在 R 中利用 Monte Carlo 方法模拟潜在资产价格的样本路径以及如何获得期权价值的近似值和平均收益, 给读者提供了很多 R 中的程序, 相信读者可以利用这些程序, 经过简单的修正研究其他的 SDE 模型.

参考文献

References

[1] 毛学荣, 李晓月. 金融领域的随机建模与基于软件 R 的 Monte Carlo 模拟(5): Black-Sdholes 的世界[J]. 南京信息工程大学学报: 自然科学版, 2015, 7(5):

407-412

MAO Xuerong, LI Xiaoyue. Stochastic modelling in finance and Monte Carlo simulations with R. Part E: The Black-Sdholes world [J]. Journal of Nanjing University of Information Science & Technology: Natural Science Edition, 2015, 7(5): 407-412

[2] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities [J]. The Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637-654

[3] Merton R C. Theory of rational option pricing [J]. The Bell Journal of Economics and Management Science, 1973, 4(1): 141-183

[4] Samuelson P A. Rational theory of warrant pricing [J]. Industrial Management Review, 1965, 6(2): 13-39

[5] Karatzas I, Shreve S E. Brownian motion and stochastic calculus [M]. New York: Springer-Verlag, 1988

[6] Uhlenbeck G E, Ornstein L S. On the theory of Brownian motion [J]. Phys Rev, 1930, 36(5): 823-841

[7] Lewis A L. Option valuation under stochastic volatility: With mathematica code [M]. Newport Beach, California: Finance Press, 2000

[8] Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. A theory of the term structure of interest rates [J]. Econometrica, 1985, 53(2): 385-407

[9] Mao X R. Stochastic differential equations and applications [M]. 2nd Ed. Chichester: Horwood Publishing, 2007

[10] Etheridge A. A course in financial calculus [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002

[11] Higham D J. An introduction to financial option valuation [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004

[12] Tretyakov M V. Introductory course on financial mathematics [M]. London: Imperial College Press, 2013

[13] Mao X R, Yuan C G. Stochastic differential equations with Markovian switching [M]. London: Imperial College Press, 2006

[14] 毛学荣, 李晓月. 金融领域的随机建模与基于软件 R 的 Monte Carlo 模拟(4): 随机微分方程模型 [J]. 南京信息工程大学学报: 自然科学版, 2015, 7(4): 313-322

MAO Xuerong, LI Xiaoyue. Stochastic modelling in finance and Monte Carlo simulations with R. Part D: Stochastic differential equation model [J]. Journal of Nanjing University of Information Science & Technology: Natural Science Edition, 2015, 7(4): 313-322

[15] Kloeden P E, Platen E. Numerical solution of stochastic differential equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1999

[16] Higham D J, Mao X R, Stuart A M. Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2002, 40(3): 1041-1063

[17] Higham D J, Mao X R. Convergence of Monte Carlo simulations involving the mean-reverting square root process [J]. Journal of Computational Finance, 2005, 8(3): 35-61

[18] Mao X R. Numerical solutions of stochastic differential delay equations under the generalized Khasminskii-type conditions [J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217(12): 5512-5524

[19] Baduraliya C, Mao X R. The Euler-Maruyama approximation for the asset price in the mean-reverting-theta stochastic volatility model [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2012, 64(7): 2209-2223

- [20] Szpruch L, Mao X R, Higham D J, et al. Numerical simulations of a strongly nonlinear Ait-Sahalia type interest rate model [J]. BIT Numerical Mathematics, 2011, 51(2): 405-425
- [21] Ait-Sahalia Y. Testing continuous-time models of the spot interest rate [J]. Review of Financial Studies, 1996, 9(2): 385-426
- [22] Mao X R, Szpruch L. Strong convergence and stability of implicit numerical methods for stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2013, 238(1): 14-28

Stochastic modelling in finance and Monte Carlo simulations with R Part 6: other SDEs models

MAO Xuerong¹ LI Xiaoyue²

1 Department of Mathematics and Statistics, University of Strathclyde, Glasgow, G1 1XT, Scotland, UK

2 School of Mathematics and Statistics, Northeast Normal University, Changchun 130024

Abstract The key aim of this serial is to study various stochastic models in finance with emphasis on the Monte Carlo simulations with R for these models. In this paper, we will discuss more SDE models, including the mean reverting process, the mean reverting Ornstein-Uhlenbeck process, the square root process, the CIR model and θ process. Moreover, we will make some further comments on the current study of the numerical solutions of SDEs.

Key words mean reverting process; Ornstein-Uhlenbeck process; square root process; CIR model; θ process