文章编号:1674-7070(2015)05-0475-06

薛艳梅[1]

n 维 α 带小波紧框架的显式构造

摘要

研究了 n 维 α 带小波紧框架的结构,给出了 m 个函数生成 n 维 α 带小波紧框架的充分条件,并给出构造该小波紧框架的显式算法,最后给出了构造小波紧框架的数值算例.

关键词

框架多分辨分析;小波紧框架;尺度函数

中图分类号 O174.2

文献标志码 A

收稿日期 2015-02-12

资助项目 国家自然科学基金青年项目(11301276);江苏省自然科学基金青年项目(BK20130984);浙江海洋学院“海洋科学”省重中之重学科开放课题(20140103)

作者简介

薛艳梅,女,博士,讲师,主要研究小波分析理论及应用.ymxue1@163.com

1 南京信息工程大学 数学与统计学院,南京,210044

0 引言

多分辨分析(MRA)方法是构造小波的重要方法之一.类似于MRA,框架多分辨分析(FMRA)[1]也是构造小波紧框架的重要方法.这两种方法的区别在于 MRA 要求尺度函数的平移构成其闭线性张成子空间 V_0 的 Riesz 基或正交基,而 FMRA 只要求构成空间 V_0 的一个框架,即小波框架在一般情形下不能构成 Riesz 基.虽然小波框架中存在“冗余”函数,但由于其表示信号的不唯一性,使得在应用小波框架恢复信号的过程中,其数值计算更稳定.近年来,已有不少学者给出了关于小波紧框架的一些构造方法,比如 Chui 等[2]与 Petukhov[3-4]分别对一维 2 带小波紧框架进行了研究,并进一步给出了具体的显式构造算法.出于信号多通道理论的需要,黄永东等[5]研究了一维 α 带小波紧框架的显式构造算法,并给出了该类小波紧框架的具体分解和重构算法.基于上述一维小波紧框架的构造,王刚[6]具体研究了一类二维 3 带小波紧框架的构造算法,并给出了该类小波紧框架的分解和重构算法.但对于更一般的 n 维多带小波紧框架的研究却未见报道.本文讨论了一类 n 维 α 带小波紧框架生成的充分条件,并给出了 n 维 α 带小波紧框架的显式构造算法.

1 小波紧框架

记 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_k)\in\mathbf{R}^k$, $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in\mathbf{R}^k$,令

$$\boldsymbol{\Theta}=\left\{\boldsymbol{\beta}_i=(\theta_1^{(i)},\cdots,\theta_s^{(i)},\cdots,\theta_n^{(i)}):\theta_s^{(i)}=0,\frac{2\pi}{\alpha},\cdots,\frac{2(\alpha-1)\pi}{\alpha};1\leqslant s\leqslant n\right\},$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_i\neq\boldsymbol{\beta}_j,0\leqslant i,j\leqslant\alpha^n-1$.函数 $f(\boldsymbol{x})$、$g(\boldsymbol{x})\in L^2(\mathbf{R}^n)$ 的内积、范数和傅里叶变换分别定义为 $<f,g>=\int_{\mathbf{R}^n}f(\boldsymbol{x})\overline{g(\boldsymbol{x})}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$,其中 $\overline{g(\boldsymbol{x})}$ 表示 $g(\boldsymbol{x})$ 的复共轭,$\|f\|^2=<f,f>$,$\hat{f}(\boldsymbol{\omega})=\int_{\mathbf{R}^n}f(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\omega}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$,其中 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\omega}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 的欧氏内积.

定义 1[5] 希尔伯特空间 X 中的函数族 $\{\phi_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 称为是一个框架,如果存在 $0<A,B<\infty$,使得对所有 $f\in X$ 有

$$A\|f\|^2\leqslant\sum_{k\in Z}|<f,\phi_k>|^2\leqslant B\|f\|^2,\tag{1}$$

其中 A 和 B 是框架的界.如果 $A=B$,则称该框架是紧框架.

定义 2 设 $\{V_j\}$ 是 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中的闭子空间序列,如果存在 $\Phi(\boldsymbol{x})\in$

V_0 使得

1) $V_j \subset V_{j+1}$, $\forall j \in \mathbf{Z}$;

2) $\mathrm{clos}_{L^2(\mathbf{R}^n)}(\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j) = L^2(\mathbf{R}^n)$, $\bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}$;

3) $f(\boldsymbol{x}) \in V_j \Leftrightarrow f(\alpha \boldsymbol{x}) \in V_{j+1}$, $\forall j \in \mathbf{Z}$;

4) $\{\Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k}): \boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n\}$ 是 V_0 的一个框架.

则称($\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$, Φ)是一个框架多分辨分析, Φ 是框架多分辨分析的尺度函数.

因为 $\Phi(\boldsymbol{x}) \in V_0 \subset V_1$, 所以存在序列 $\{h_k\} \in l^2(\mathbf{Z}^n)$, 使得

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} h_k \Phi(\alpha \boldsymbol{x} - \boldsymbol{k}). \tag{2}$$

对式(2)两边作 Fourier 变换得 $\hat{\Phi}(\boldsymbol{\omega}) = H_0\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\alpha}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\alpha}\right)$, 其中 $H_0(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\alpha^n}\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n} h_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}$ 称为两尺度符号.由 $\hat{\Phi}(\boldsymbol{\omega})$ 的连续性,不妨设

$$\lim_{\boldsymbol{\omega}\to 0}\hat{\Phi}(\boldsymbol{\omega}) = 1. \tag{3}$$

定义 3 如果函数 $\{\Psi^1, \Psi^2, \cdots, \Psi^m\} \subset V_1$ 的伸缩平移 $\{\{\Psi^l_{j,\boldsymbol{k}}\}_{j\in\mathbf{Z},\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}\}_{l=1}^m$ 构成 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的紧框架,则称 $\{\Psi^1, \Psi^2, \cdots, \Psi^m\}$ 为一个小波紧框架,其中 $\Psi^l_{j,\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \alpha^{jn/2}\Psi^l(\alpha^j \boldsymbol{x} - \boldsymbol{k})$, $j \in \mathbf{Z}$, $\boldsymbol{k} \in \mathbf{Z}^n$, $l = 1, 2, \cdots, m$.

对于函数 $\Psi^1, \Psi^2, \cdots, \Psi^m$, 有

$$\Psi^l(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n} h^l_{\boldsymbol{k}} \Phi(\alpha \boldsymbol{x} - \boldsymbol{k}), \tag{4}$$

$$\hat{\Psi}^l(\boldsymbol{\omega}) = H_l\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\alpha}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\alpha}\right), \tag{5}$$

其中 $H_l(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{\alpha^n}\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n} h^l_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\omega}}$, $\quad l = 1, 2, \cdots, m$.

2 n 维 α 带小波紧框架的显式构造

设 Φ 为尺度函数, $H_0(\boldsymbol{\omega})$ 为其相应的尺度符号. Ψ^l, $l = 1, 2, \cdots, m$ 相对应的符号为 H_l, $l = 1, 2, \cdots, m$, 且 H_l 都是以 $2\pi\mathbf{Z}^n$ 为周期的有界函数.为书写方便,不妨记 $\boldsymbol{\mu}_i = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\beta}_i$, $i = 0, \cdots, \alpha^n - 1$, 故设

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{pmatrix} H_0(\boldsymbol{\mu}_0) & \cdots & H_m(\boldsymbol{\mu}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ H_0(\boldsymbol{\mu}_{\alpha^n-1}) & \cdots & H_m(\boldsymbol{\mu}_{\alpha^n-1}) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

定理 1 若

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{M}^*(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{I}_{\alpha^n}, \tag{7}$$

则函数族 $\{\Psi^l\}_{l=1}^m$ 的伸缩平移构成 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的一个小波紧框架,其中 $\boldsymbol{M}^*(\boldsymbol{\omega})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega})$ 的共轭转置.

为证明定理 1,首先给出以下引理.

引理 1 设 H_l, $l = 0, 1, \cdots, m$ 满足(7),则 $\forall \omega \in \mathbf{R}^n$, 有

$$\sum_{i=0}^{\alpha^n-1} | H_l(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\beta}_i) |^2 \leqslant 1, l = 0, 1, \cdots, m. \tag{8}$$

证明 根据矩阵乘法的性质,只须对 $l = 0$ 证明式(8)成立即可.记

$$\boldsymbol{M}_0(\omega) = \begin{pmatrix} H_1(\boldsymbol{\mu}_0) & \cdots & H_m(\boldsymbol{\mu}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ H_1(\boldsymbol{\mu}_{\alpha^n-1}) & \cdots & H_m(\boldsymbol{\mu}_{\alpha^n-1}) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = (H_0(\boldsymbol{\mu}_0), H_0(\boldsymbol{\mu}_1), \cdots, H_0(\boldsymbol{\mu}_{\alpha^n-1}))^{\mathrm{T}},$$

由式(7)得

$$\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{M}_0^*(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{I}_{\alpha^n} - \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^* =$$

$$\begin{pmatrix} 1 - |H_0(\boldsymbol{\mu}_0)|^2 & \cdots & -H_0(\boldsymbol{\mu}_0)\overline{H_0(\boldsymbol{\mu}_{\alpha^n-1})} \\ \vdots & & \vdots \\ -H_0(\boldsymbol{\mu}_{\alpha^n-1})\overline{H_0(\boldsymbol{\mu}_0)} & \cdots & 1 - |H_0(\boldsymbol{\mu}_{\alpha^n-1})|^2 \end{pmatrix},$$

经计算,矩阵 $\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{M}_0^*(\boldsymbol{\omega})$ 的 α^n 个特征值为

$$\lambda_1(\boldsymbol{\omega}) = \lambda_2(\boldsymbol{\omega}) = \cdots = \lambda_{\alpha^n-1}(\boldsymbol{\omega}) = 1,$$

$$\lambda_{\alpha^n}(\boldsymbol{\omega}) = 1 - \sum_{i=0}^{\alpha^n-1} \left| H_0(\boldsymbol{\mu}_i) \right|^2.$$

因为 $\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{M}_0^*(\boldsymbol{\omega})$ 是一个半正定矩阵,所以 $\lambda_{\alpha^n}(\boldsymbol{\omega}) \geqslant 0$, 即式(8)对 $l = 0$ 成立.

引理 2 设 $\Phi(\boldsymbol{x}) \in L^2(\mathbf{R}^n)$ 是一个尺度函数, $H_0(\boldsymbol{\omega})$ 为其相应的尺度符号,且 $H_0(\boldsymbol{\omega})$ 满足

$$\sum_{i=0}^{\alpha^n-1} \left| H_0(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\beta}_i) \right|^2 \leqslant 1 \quad \text{a.e.}, \tag{10}$$

则有

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n} \left| \hat{\Phi}(\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{k}\pi) \right|^2 =$$

$$\sum_{k_1\in\mathbf{Z}} \cdots \sum_{k_n\in\mathbf{Z}} \left| \hat{\Phi}(\omega_1 + 2k_1\pi, \cdots, \omega_n + 2k_n\pi) \right|^2 \leqslant 1. \tag{11}$$

证明 由式(3)、(10)以及 $\hat{\Phi}(\boldsymbol{\omega})$ 的连续性,容易得到

$$|\hat{\Phi}(\boldsymbol{\omega})| = \left|\hat{\Phi}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\alpha}\right)\right| \left|H_0\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\alpha}\right)\right| \leqslant 1 \quad \text{a.e.},$$

因此,对任意正整数 s, 当 α 为偶数时,有(α 为奇数时同理可证)

$$\sum_{k_1=-\frac{1}{2}\alpha^s}^{\frac{1}{2}\alpha^s-1} \cdots \sum_{k_n=-\frac{1}{2}\alpha^s}^{\frac{1}{2}\alpha^s-1} | \hat{\Phi}(\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{k}\pi) |^2 =$$

$$\sum_{k_1=-\frac{1}{2}\alpha^s}^{\frac{1}{2}\alpha^s-1} \cdots \sum_{k_n=-\frac{1}{2}\alpha^s}^{\frac{1}{2}\alpha^s-1} \prod_{i=1}^{s} \left| H_0(\alpha^{-i}(\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{k}\pi)) \right|^2 \times$$

$$\left| \hat{\Phi}(\alpha^{-i}(\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{k}\pi)) \right|^2.$$

为书写方便,记

$$\boldsymbol{\Theta}_s(\omega+2\boldsymbol{k}\pi)\triangleq\prod_{i=1}^{s}|H_0(\alpha^{-i}(\boldsymbol{\omega}+2\boldsymbol{k}\pi))|^2,$$

则上式 ≤

$$\sum_{k_1=-\frac{1}{2}\alpha^s}^{\frac{1}{2}\alpha^s-1}\cdots\sum_{k_n=-\frac{1}{2}\alpha^s}^{\frac{1}{2}\alpha^s-1}\boldsymbol{\Theta}_s(\boldsymbol{\omega}+2\boldsymbol{k}\pi)=$$

$$\sum_{k_1=-\frac{1}{2}\alpha^s}^{\frac{1}{2}(2-\alpha)\alpha^{s-1}-1}\sum_{k_2=-\frac{1}{2}\alpha^s}^{\frac{1}{2}(2-\alpha)\alpha^{s-1}-1}\cdots\sum_{k_n=-\frac{1}{2}\alpha^s}^{\frac{1}{2}\alpha^s-1}\boldsymbol{\Theta}_s(\boldsymbol{\omega}+2\boldsymbol{k}\pi)+$$

$$\cdots+$$

$$\sum_{k_1=\frac{1}{2}(\alpha-2)\alpha^{s-1}}^{\frac{1}{2}\alpha^s-1}\sum_{k_2=-\frac{1}{2}\alpha^s}^{\frac{1}{2}(2-\alpha)\alpha^{s-1}-1}\cdots\sum_{k_n=-\frac{1}{2}\alpha^s}^{\frac{1}{2}\alpha^s-1}\boldsymbol{\Theta}_s(\boldsymbol{\omega}+2\boldsymbol{k}\pi)+$$

$$\cdots+$$

$$\sum_{k_1=-\frac{1}{2}\alpha^s}^{\frac{1}{2}(2-\alpha)\alpha^{s-1}-1}\sum_{k_2=\frac{1}{2}(\alpha-2)\alpha^{s-1}}^{\frac{1}{2}\alpha^s-1}\cdots\sum_{k_n=-\frac{1}{2}\alpha^s}^{\frac{1}{2}\alpha^s-1}\boldsymbol{\Theta}_s(\boldsymbol{\omega}+2\boldsymbol{k}\pi)+$$

$$\cdots+$$

$$\sum_{k_1=\frac{1}{2}(\alpha-2)\alpha^{s-1}}^{\frac{1}{2}\alpha^s-1}\sum_{k_2=\frac{1}{2}(\alpha-2)\alpha^{s-1}}^{\frac{1}{2}\alpha^s-1}\cdots\sum_{k_n=-\frac{1}{2}\alpha^s}^{\frac{1}{2}\alpha^s-1}\boldsymbol{\Theta}_s(\boldsymbol{\omega}+2\boldsymbol{k}\pi)=$$

$$\cdots=$$

$$\sum_{k_1=\frac{1}{2}(\alpha-2)\alpha^{s-1}}^{\frac{1}{2}\alpha^s-1}\cdots\sum_{k_n=\frac{1}{2}(\alpha-2)\alpha^{s-1}}^{\frac{1}{2}\alpha^s-1}\boldsymbol{\Theta}_s(\boldsymbol{\omega}+2\boldsymbol{k}\pi)\times$$

$$\sum_{j=0}^{\alpha^n-1}|H_0(\alpha^{-i}(\boldsymbol{\omega}+2\boldsymbol{k}\pi+\boldsymbol{\beta}_j))|^2\leqslant$$

$$\sum_{k_1=\frac{1}{2}(\alpha-2)\alpha^{s-1}}^{\frac{1}{2}\alpha^s-1}\cdots\sum_{k_n=\frac{1}{2}(\alpha-2)\alpha^{s-1}}^{\frac{1}{2}\alpha^s-1}\boldsymbol{\Theta}_{s-1}(\boldsymbol{\omega}+2\boldsymbol{k}\pi)\leqslant\cdots\leqslant 1.$$

由 l 的任意性,引理 2 得证.

引理 3 设 $\Phi(\boldsymbol{x})\in L^2(\mathbf{R}^n)$ 是一个尺度函数,$H_0(\boldsymbol{\omega})$ 为其相应的尺度符号,且 $H_0(\omega)$ 满足式(10),则 $\forall f\in L^2(\mathbf{R}^n)$,有 $S_j=\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}|\langle f,\Phi_{j,k}\rangle|^2<+\infty$,其中 $\Phi_{j,k}=\alpha^{\frac{jn}{2}}\Phi(\alpha^j\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k})$,并且有

1) $\lim\limits_{j\to+\infty}S_j=\|f\|^2$;

2) $\lim\limits_{j\to-\infty}S_j=0$.

证明 应用 Plancherel 和 Parseval 公式,得到

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}|\langle f,\Phi_{j,\boldsymbol{k}}\rangle|^2=$$

$$(2\pi)^{-2n}\alpha^{-jn}\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}\left|\int_{\mathbf{R}^n}\hat{f}(\boldsymbol{\omega})\overline{\hat{\Phi}(\alpha^{-j}\boldsymbol{\omega})}e^{i\alpha^{-j}\omega\cdot k}d\boldsymbol{\omega}\right|^2=$$

$$(2\pi)^{-2n}\alpha^{-jn}\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}\left|\int_{[-\alpha^j\pi,\alpha^j\pi]^n}\sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbf{Z}^n}\hat{f}(\cdot)\overline{\hat{\Phi}(\alpha^{-j}(\cdot))}e^{i\alpha^{-j}\omega\cdot\boldsymbol{k}}d\boldsymbol{\omega}\right|^2=$$

$$(2\pi)^{-n}\int_{[-\alpha^j\pi,\alpha^j\pi]^n}\left|\sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbf{Z}^n}\hat{f}(\cdot)\overline{\hat{\Phi}(\alpha^{-j}(\cdot))}\right|^2d\boldsymbol{\omega}=$$

$$(2\pi)^{-n}\|F_j\|^2,\tag{12}$$

其中 $F_j(\boldsymbol{\omega})=\sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbf{Z}^n}\hat{f}(\cdot)\overline{\hat{\Phi}(\alpha^{-j}(\cdot))}$,$\cdot\triangleq\boldsymbol{\omega}+2\pi\alpha^j\boldsymbol{m}$.

引入下列函数序列

$$\hat{g}_j(\boldsymbol{\omega})=\begin{cases}\hat{f}(\boldsymbol{\omega}),&\|\boldsymbol{\omega}\|\leqslant\alpha^j\pi,\\0,&\|\boldsymbol{\omega}\|>\alpha^j\pi,\end{cases}\quad h_j=f-g_j,j=0,1,2,\cdots,$$

$$G_j(\boldsymbol{\omega})=\sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbf{Z}^n}\hat{g}_j(\cdot)\overline{\hat{\Phi}(\alpha^{-j}(\cdot))},$$

$$H_j(\boldsymbol{\omega})=\sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbf{Z}^n}\hat{h}_j(\cdot)\overline{\hat{\Phi}(\alpha^{-j}(\cdot))},$$

当 $j\to+\infty$ 时,$\|G_j\|\to\|\hat{f}\|$.又由引理 2 得,

$$\|H_j\|^2=$$

$$\int_{[-\alpha^j\pi,\alpha^j\pi]^n}\left|\sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbf{Z}^n}\hat{h}_j(\cdot)\overline{\hat{\Phi}(\alpha^{-j}(\cdot))}\right|^2d\omega\leqslant$$

$$\int_{[-\alpha^j\pi,\alpha^j\pi]^n}\sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbf{Z}^n}|\hat{h}_j(\cdot)|^2\sum_{m\in Z^n}|\overline{\hat{\Phi}(\alpha^{-j}(\cdot))}|^2d\boldsymbol{\omega}\leqslant$$

$$\int_{[-\alpha^j\pi,\alpha^j\pi]^n}\sum_{\boldsymbol{m}\in\mathbf{Z}^n}|\hat{h}_j(\cdot)|^2d\omega=$$

$$\|\hat{h}_j\|^2\to 0,(j\to+\infty).\tag{13}$$

又因为

$$\|G_j\|-\|H_j\|\leqslant\|F_j\|=\|G_j+H_j\|\leqslant\|G_j\|+\|H_j\|,\tag{14}$$

所以由式(12)—(14)得

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}\left|\langle f,\Phi_{j,\boldsymbol{k}}\rangle\right|^2=(2\pi)^{-n}\|F_j\|^2\to(2\pi)^{-n}\|\hat{f}\|^2=\|f\|^2,(j\to+\infty).$$

从而 1)得证.

下证 2).引入辅助函数 f_N,其中

$$f_N(\boldsymbol{x})=\begin{cases}f(\boldsymbol{x}),&\|\boldsymbol{x}\|\leqslant N,\\0,&\|\boldsymbol{x}\|>N,\end{cases}\quad\|\boldsymbol{x}\|=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|\}.$$

$\forall\varepsilon>0$,选择适当的 N 使得 $\|f-f_N\|<\varepsilon$.因为

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}\left|\langle f,\Phi_{j,\boldsymbol{k}}\rangle\right|^2=$$

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}\left|\langle f_N,\Phi_{j,\boldsymbol{k}}\rangle\right|^2+\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}\left|\langle f-f_N,\Phi_{j,\boldsymbol{k}}\rangle\right|^2\leqslant$$

$$\alpha\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}\left|\langle f_N,\Phi_{j,\boldsymbol{k}}\rangle\right|^2+\alpha\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}\left|\langle f-f_N,\Phi_{j,\boldsymbol{k}}\rangle\right|^2\leqslant$$

$$\alpha\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}\left|\langle f_N,\Phi_{j,\boldsymbol{k}}\rangle\right|^2+\frac{\|f-f_N\|}{\pi}\leqslant$$

$$\alpha\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}\left|\langle f_N,\Phi_{j,\boldsymbol{k}}\rangle\right|^2+\frac{\varepsilon}{\pi},\tag{15}$$

所以,要证 2),只需证明 $\lim\limits_{j\to-\infty}\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^n}\left|\langle f_N,\Phi_{j,\boldsymbol{k}}\rangle\right|^2=0$,

又因为

$$\sum_{k\in Z^n}\left|\langle f_N,\Phi_{j,k}\rangle\right|^2\leqslant\sum_{k\in Z^n}\left(\int_{\|x\|\leqslant N}f(x)\Phi_{j,k}(x)dx\right)^2\leqslant$$
$$\|f\|^2\sum_{k\in Z^n}\int_{\|x\|\leqslant N}\Phi_{j,k}^2(x)dx=$$
$$\|f\|^2\sum_{k\in Z^n}\int_{\|x+k\|\leqslant\alpha^jN}\Phi^2(x)dx\to0,(j\to-\infty),$$

所以$\lim\limits_{j\to-\infty}\sum\limits_{k\in Z^n}|\langle f_N,\Phi_{j,k}\rangle|^2=0$,利用 式(15),可得 $\lim\limits_{j\to-\infty}S_j=0$.

引理 4 如果式(7)成立,则 $\forall f\in L^2(\mathbf{R}^n)$,$J\in\mathbf{Z}$,有

$$\sum_{l=1}^m\sum_{L\in Z}\sum_{k\in Z^n}|\langle f,\Psi_{L,k}^l\rangle|^2=\sum_{k\in Z^n}|\langle f,\Phi_{J,k}\rangle|^2+\sum_{l=1}^m\sum_{L\geqslant J}\sum_{k\in Z^n}|\langle f,\Psi_{L,k}^l\rangle|^2<\infty,\qquad(16)$$

证明 由式(7)得,

$$H_0(\mu_i)\overline{H_0(\mu_j)}+\cdots+H_m(\mu_i)\overline{H_m(\mu_j)}=\delta_{i,j},\quad i,j=0,\cdots,\alpha^n-1.\qquad(17)$$

令

$$\Delta_i(\omega)=\sum_{k\in Z^n}\hat f(\omega+2\pi\alpha^{L+1}k+\alpha^{L+1}\beta_i)\cdot\overline{\hat\Phi(\alpha^{-L-1}\omega+2\pi k+\beta_i)},\quad i=0,\cdots,\alpha^n-1,\qquad(18)$$

则对 $\forall L\in\mathbf{Z}$,由式(17),得

$$\sum_{k\in Z^n}\left|\langle f,\Phi_{L,k}\rangle\right|^2+\sum_{l=1}^m\sum_{k\in Z^n}\left|\langle f,\Psi_{L,k}^l\rangle\right|^2=$$
$$(2\pi)^{-2n}\sum_{l=0}^m\int_{[-\alpha^L\pi,\alpha^L\pi]^n}\left|\sum_{i=0}^{\alpha^n-1}(\Delta_i(\omega)\overline{H_l(\alpha^{-L-1}\omega+\beta_i)})\right|^2d\omega=$$
$$(2\pi)^{-2n}\sum_{i=0}^{\alpha^n-1}\left(\int_{[-\alpha^L\pi,\alpha^L\pi]^n}|\Delta_i(\omega)|^2d\omega\right)=$$
$$(2\pi)^{-2n}\int_{[-\alpha^L\pi,\alpha^L\pi]^n}\left|\sum_{k\in Z^n}\hat f(\omega+2\pi\alpha^{L+1}k)\cdot\overline{\hat\Phi(\alpha^{-L-1}\omega+2\pi k)}\right)\right|^2d\omega=\sum_{k\in Z^n}\left|\langle f,\Phi_{L+1,k}\rangle\right|^2,$$

即对 $\forall L\in\mathbf{Z}$,有

$$\sum_{k\in Z^n}\left|\langle f,\Phi_{L,k}\rangle\right|^2+\sum_{l=1}^m\sum_{k\in Z^n}\left|\langle f,\Psi_{L,k}^l\rangle\right|^2=\sum_{k\in Z^n}\left|\langle f,\Phi_{L+1,k}\rangle\right|^2.\qquad(19)$$

另外,由式(19)及引理 3 可知,对某个整数 J,有

$$\sum_{k\in Z^n}\left|\langle f,\Phi_{J,k}\rangle\right|^2+\sum_{l=1}^m\sum_{L\geqslant J}\sum_{k\in Z^n}\left|\langle f,\Psi_{L,k}^l\rangle\right|^2=$$
$$\sum_{k\in Z^n}\left|\langle f,\Phi_{J,k}\rangle\right|^2+\sum_{l=1}^m\sum_{k\in Z^n}\left|\langle f,\Psi_{J,k}^l\rangle\right|^2+\sum_{l=1}^m\sum_{L\geqslant J+1}\sum_{k\in Z^n}\left|\langle f,\Psi_{L,k}^l\rangle\right|^2=$$
$$\sum_{k\in Z^n}\left|\langle f,\Phi_{J+1,k}\rangle\right|^2+\sum_{l=1}^m\sum_{L\geqslant J+1}\sum_{k\in Z^n}\left|\langle f,\Psi_{L,k}^l\rangle\right|^2=\cdots=$$
$$\lim_{L\to+\infty}\sum_{k\in Z^n}\left|\langle f,\Phi_{L,k}\rangle\right|^2=\|f\|^2<+\infty,$$

并且反复应用式(19),可得

$$\sum_{k\in Z^n}|\langle f,\Phi_{J,k}\rangle|^2=$$
$$\sum_{k\in Z^n}|\langle f,\Phi_{J-1,k}\rangle|^2+\sum_{l=1}^m\sum_{k\in Z^n}|\langle f,\Psi_{J-1,k}^l\rangle|^2=\cdots=$$
$$\sum_{l=1}^m\sum_{L\leqslant J-1}\sum_{k\in Z^n}|\langle f,\Psi_{L,k}^l\rangle|^2,$$

故式(16)成立,即引理 4 得证.

由上述引理 1—4 容易得定理 1 成立.从而,n 维 α 带小波紧框架的构造可以归结为求满足式(7)的符号函数 $H_l,l=0,1,\cdots,m$.下面给出满足式(7)所有解 H_l.

假设 $H_0(\omega)$ 满足式(10),由引理 1 知,矩阵 $M_0(\omega)M_0{}^*(\omega)$ 的 α^n 个特征值为

$$\lambda_1(\omega)=\lambda_2(\omega)=\cdots=\lambda_{\alpha^n-1}(\omega)=1,$$
$$\lambda_{\alpha^n}(\omega)=1-\sum_{i=0}^{\alpha^n-1}|H_0(\mu_i)|^2.$$

它们相应的单位特征向量分别为

$$\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{1}{\Omega_1}(-\overline{H_0(\mu_1)},-\overline{H_0(\mu_0)},0,\cdots,0)^T,\\ \gamma_k=\dfrac{1}{\Omega_k}\Big(-H_0(\mu_0)\overline{H_0(\mu_k)},\cdots,-H_0(\mu_{k-1})\overline{H_0(\mu_k)},\\ \qquad\sum\limits_{i=0}^{k-1}|H_0(\mu_i)|^2,0,\cdots,0\Big)^T,\\ \qquad k=2,3,\cdots,\alpha^n-1,\\ \gamma_{\alpha^n}=\dfrac{1}{\Omega_{\alpha^n}}(H_0(\mu_0),H_0(\mu_1),\cdots,H_0(\mu_{\alpha^n-1}))^T.\end{cases}$$

其中

$$\begin{cases}|\Omega_1|^2=|H_0(\mu_0)|^2+|H_0(\mu_1)|^2,\\ |\Omega_k|^2=|H_0(\mu_k)|^2\sum\limits_{i=0}^{k-1}|H_0(\mu_i)|^2+\\ \qquad\Big(\sum\limits_{i=0}^{k-1}|H_0(\mu_i)|^2\Big)^2,k=2,3,\cdots,\alpha^n-1,\\ |\Omega_{\alpha^n}|^2=\sum\limits_{i=0}^{\alpha^n-1}|H_0(\mu_i)|^2.\end{cases}$$

从而,矩阵 $M_0(\omega)M_0^*(\omega)$ 可以分解为

$$\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{M}_0^*(\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{P}^*(\boldsymbol{\omega}),\qquad(20)$$

其中

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\omega})=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{\alpha^n}),$$
$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\omega})=\mathrm{diag}\{\lambda_1(\boldsymbol{\omega}),\lambda_2(\boldsymbol{\omega}),\cdots,\lambda_{\alpha^n}(\boldsymbol{\omega})\}.\quad(21)$$

定理 2 设 $H_0(\boldsymbol{\omega})$ 为满足式(10)且以 $2\pi\mathbf{Z}^n$ 为周期的函数，则当 $m=\alpha^n$ 时，存在以 $2\pi\mathbf{Z}^n$ 为周期的函数 $H_1(\boldsymbol{\omega}),H_2(\boldsymbol{\omega}),\cdots,H_{\alpha^n}(\boldsymbol{\omega})$，使得 式(7) 成立，并且式 (7) 的任何一个解均可被表示为如下矩阵的第一行：

$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\omega})\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\omega})}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\omega}),$$

其中 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\omega}),\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\omega})$ 由式(21) 所定义. $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\omega})$ 为任意 $\alpha^n\times\alpha^n$ 酉矩阵并且它的元素是以 $\pi\mathbf{Z}^n$ 为周期的函数.

证明 因为

$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\Gamma}^*(\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\omega})\cdot\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\omega})}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\omega})\cdot\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\omega})}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\omega}))^*=\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{M}_0^*(\boldsymbol{\omega}),$$

故可取 $\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\omega})\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\omega})}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\omega})$. 又由式(6)知，$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\omega})$ 是以 $2\pi\mathbf{Z}^n$ 为周期的函数，所以 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\omega})$ 是以 $\pi\mathbf{Z}^n$ 为周期的函数.

3 数值算例

例 1 设

$$H_0(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{4}(1+\mathrm{e}^{-i\omega_1/2})^2\cdot\frac{1}{4}(1+\mathrm{e}^{-i\omega_2/2})^2,$$

它满足

$$|H_0(\omega_1,\omega_2)|^2+|H_0(\omega_1,\omega_2+\pi)|^2+|H_0(\omega_1+\pi,\omega_2)|^2+|H_0(\omega_1+\pi,\omega_2+\pi)|^2=\left(\cos^4\frac{\omega_1}{4}+\sin^4\frac{\omega_1}{4}\right)\left(\cos^4\frac{\omega_2}{4}+\sin^4\frac{\omega_2}{4}\right)\leqslant 1,$$

则根据本文定理 2，取

$$\boldsymbol{Q}(\omega_1,\omega_2)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{i(\omega_1+\omega_2)} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{i(\omega_1+\omega_2)} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{i(\omega_1+\omega_2)}\end{pmatrix},$$

那么可以构造出对应的二元 2 带小波紧框架 $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4$ 的符号如下：

$$H_1(\omega_1,\omega_2)=-\frac{1}{16\Omega_1}(1+\mathrm{e}^{i\omega_1/2})^2\cdot(1+\mathrm{e}^{i(\omega_2+\pi)/2})^2\cdot\mathrm{e}^{i(\omega_1+\omega_2)},$$

$$H_2(\omega_1,\omega_2)=\frac{i}{8\Omega_2}\left(1-\sin\frac{\omega_1}{2}+\cos\frac{\omega_1}{2}\right)\cdot\left(\cos^4\frac{\omega_2}{4}+\sin^4\frac{\omega_2}{4}\right)\cdot\mathrm{e}^{i(\omega_1+\omega_2)},$$

$$H_3(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{64\Omega_3}\left(1-\sin\frac{\omega_1}{2}+\cos\frac{\omega_1}{2}\right)\cdot\left(1-\sin\frac{\omega_2}{2}+\cos\frac{\omega_2}{2}\right)\cdot\mathrm{e}^{i(\omega_1+\omega_2)},$$

$$H_4(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{16\Omega_4}(1+\mathrm{e}^{-i\omega_1/2})^2\cdot(1+\mathrm{e}^{-i\omega_2/2})^2\cdot\mathrm{e}^{i(\omega_1+\omega_2)}.$$

其中

$$\begin{cases}|\Omega_1|^2=|H_0(\omega_1,\omega_2)|^2+|H_0(\omega_1,\omega_2+\pi)|^2,\\ |\Omega_2|^2=|H_0(\omega_1+\pi,\omega_2)|^2\cdot[\,|H_0(\omega_1,\omega_2)|^2+|H_0(\omega_1,\omega_2+\pi)|^2]+[\,|H_0(\omega_1,\omega_2)|^2+|H_0(\omega_1,\omega_2+\pi)|^2]^2,\\ |\Omega_3|^2=|H_0(\omega_1+\pi,\omega_2+\pi)|^2\cdot[\,|H_0(\omega_1,\omega_2)|^2+|H_0(\omega_1,\omega_2+\pi)|^2+|H_0(\omega_1+\pi,\omega_2)|^2]+[\,|H_0(\omega_1,\omega_2)|^2+|H_0(\omega_1,\omega_2+\pi)|^2+|H_0(\omega_1+\pi,\omega_2)|^2]^2,\\ |\Omega_4|^2=|H_0(\omega_1,\omega_2)|^2+|H_0(\omega_1,\omega_2+\pi)|^2+|H_0(\omega_1+\pi,\omega_2)|^2+|H_0(\omega_1+\pi,\omega_2+\pi)|^2.\end{cases}$$

参考文献
References

[1] Benedetto J J, Li S. The theory of multiresolution analysis frame and applications to filter banks[J]. Appl Comput Hamon Anal, 1998, 5(4): 389-427

[2] Chui C K, He W J. Compactly supported tight frames associated with refinable functions[J]. Appl Comput Hamon Anal, 2000, 8(3): 293-319

[3] Petukhov A. Explicit construction of framelets[J]. Appl Comput Hamon Anal, 2001, 11(2): 313-327

[4] Petukhov A. Symmetric framelets[J]. Constr Approx, 2003, 19(2): 309-328

[5] 黄永东，程正兴. α 带小波紧框架的显式构造[J]. 数学物理学报，2007，27A(1)：7-18
HUAGN Yongdong, CHENG Zhengxing. Explicit construction of wavelet tight frames with dilation factor α[J]. Acta Mathematica Scientia, 2007, 27A(1): 7-18

[6] 王刚. 二元 3 带小波紧框架的构造[J]. 应用数学学报，2008，31(2)：290-305
WANG Gang. The construction of bivariate three-band wavelet tight frames[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2008, 31(2): 290-305

Explicit construction of wavelet tight frames with dilation factor α in R^n

XUE Yanmei[1]
1 School of Math & Statistics, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044

Abstract In this paper, the construction of wavelet tight frames with dilation factor α in $\mathbf{R}^n$ are studied. Sufficient conditions for existence of wavelet tight frames generated by the m functions are presented, and explicit algorithms for the construction of the wavelet frames are provided. Finally, an example of wavelet tight frames is offered.

Key words frame multiresolution analysis; wavelet tight frame; scaling function