文章编号:1674-7070(2015)05-0408-06

毛学荣[1]　李晓月[2]

金融领域的随机建模与基于软件 R 的 Monte Carlo 模拟(5):Black-Scholes 的世界

摘要

主要研究了 Black-Scholes 模型.与 Black-Scholes 期权定价公式相比,将再次强调和证实利用 R 软件 Monte Carlo 模拟的强大作用.

关键词

Black-Scholes 偏微分方程,Black-Scholes 公式;Monte Carlo 模拟;Euler-Maruyama 方法.

中图分类号 F830;O211

文献标志码 A

收稿日期 2014-09-13

资助项目 国家自然科学基金(11171056,11171081)

作者简介

毛学荣,男,博士,教授,研究方向为随机分析,随机微分方程理论及应用.

x.mao@ strath.ac.uk

李晓月(通信作者),女,博士,教授,研究方向为随机微分方程理论及应用.

lixy209@ nenu.edu.cn

1 斯特莱斯克莱德大学 数学系,格拉斯哥,G1 1XT,英国

2 东北师范大学 数学与统计学院,长春,130024

0 引言

1973 年,Black 和 Scholes 提出了 Black-Scholes 模型[1],它作为金融市场的数学模型,是衍生投资的工具.由此模型出发,Black 和 Scholes 得到了一个偏微分方程(PDE),如今被称为 Black-Scholes PDE.该偏微分方程的解对欧式期权进行了理论定价,被称为 Black-Scholes 公式.Black-Scholes 公式使得芝加哥期权交易所乃至全球期权市场中的期权活动合法、科学和繁荣[2].Black-Scholes 公式被广泛使用的同时也常常被期权市场的参与者调整和修正[3].许多实证结果证明 Black-Scholes 价格“相当接近”观察价格[3].Merton[4]发展了对期权定价模型的数学理解,并将之命名为“Black-Scholes 期权定价模型”.

1 Black-Scholes 偏微分方程

在阐述 Black-Scholes 对期权定价的分析前,先列出本文要用到的假设.

1)资产价格遵循线性随机微分方程(SDE):

$$dS(t)=\mu S(t)\,dt+\sigma S(t)\,dB(t). \tag{1}$$

2)在期权有效期内,风险自由利率 r 和资产波动率 σ 为已知常数.

3)对冲交易没有交易费用.

4)在期权有效期内,潜在资产不分红.

5)无套利可能性.

6)潜在资产交易可以连续发生.

7)允许卖空,资产可以分割.

假设持有的看涨或看跌期权价值为 $V(S,t)$,它仅依赖于资产价格 S 和时间 t.利用 Itô 公式,有

$$dV=\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\mu S\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt+\sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dB, \tag{2}$$

式(2)给出了 V 遵循的 SDE,这里 V 关于 t 一阶可导,关于 S 二阶可导.现在构造包含一个期权和一份数量为 $-\Delta$ 的资产的投资组合,这个数量没有特殊性.投资组合的价值为

$$\Pi=V-\Delta S. \tag{3}$$

在非常小的时间段内投资组合价值的增量为 $d\Pi = dV - \Delta dS$. 该段时间里持有的资产数量 Δ 固定.如果 Δ 是不固定的,则 $d\Pi$ 将包含 $d\Delta$.利用式(1)—(3),可知 Π 是一个 Itô 过程,满足 SDE:

$$d\Pi=\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\mu S\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}-\mu\Delta S\right)dt+\sigma S\left(\frac{\partial V}{\partial S}-\Delta\right)dB. \tag{4}$$

为了消掉随机因素,选取

$$\Delta=\frac{\partial V}{\partial S}. \tag{5}$$

注意 Δ 是时间段 dt 开始时 $\partial V/\partial S$ 的值.以上设定导致了增量完全确定的投资组合价值遵循:

$$d\Pi=\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt. \tag{6}$$

在无交易费用的假设下来解释套利和供需平衡的定义.数量为 Π 的资金投资在资产市场在时间段 dt 里的收益为 $r\Pi dt$.如果式(6)的右端项大于这个值,则套利者就会借款 Π 投资到这个投资组合中从而获得有保证的低风险收益,该收益要高于借贷费用.相反地,如果式(6)的右端项小于 $r\Pi dt$,则套利者就会卖空这个投资组合将资金 Π 存至银行.两种情况都会使套利者获得低风险、无花费的即时收益.具有这样投资能力的套利者的存在保证了投资组合和银行账户收益几乎相等.因此,有

$$r\Pi dt=\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt, \tag{7}$$

将式(3)和(5)代入式(7),两边除以 dt,得

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0, \tag{8}$$

这就是 Black-Scholes PDE.式(8)并不包含资产增长参数 μ,换句话说,期权的价格独立于资产增长速度的快慢.描述资产价格 SDE(1)的波动率 σ 是该方程影响期权价值的唯一参数,原因在于不同的人尽管同意期权价值,但对 μ 的估计可以是不同的.

2 欧式期权的终端条件

推导了期权价值满足的 Black-Scholes PDE 后,必须要考虑终端条件使得该 PDE 有唯一解.

首先讨论欧式看涨期权.利用 $C(S,t)$ 代替 $V(S,t)$ 表示该期权价值,执行价格为 E,执行时间为 T.接下来考虑欧式期权到期日,即在 $t=T$ 时刻,发生了什么.简单的套利原则可以知道期权的价值.到期时,如果 $S>E$,就会行权,利用数量 E 的资金购买价值 S 的资产,获得收益为 $S-E$;另一方面,到期时,如果 $S\leqslant E$,将不再行权,无收益,否则会导致 $E-S$ 的损失.因此,到期日看涨期权价值为

$$C(S,T)=\max(S-E,0), \tag{9}$$

这是 Black-Scholes PDE 的终端条件.

利用 $P(S,t)$ 代替 $V(S,t)$ 表示看跌期权的价值,类似地可以证明看跌期权到期日的收益(也是终端条件)为

$$P(S,T)=\max(E-S,0). \tag{10}$$

3 Black-Scholes 公式

在前一节本文证明了如果资产价格遵循线性 SDE:

$$dS(t)=\mu S(t)dt+\sigma S(t)dB(t),$$

则 t 时刻依赖于资产价格 S 的欧式看涨期权价值 $C(S,t)$ 满足 Black-Scholes PDE:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}+rS\frac{\partial C}{\partial S}-rC=0,$$
$$S>0,t\in[0,T], \tag{11}$$

其中 r 是风险自由的利率,σ 是波动率.进一步,终端条件为欧式期权的最终收益

$$C(S,T)=\max(S-E,0), \tag{12}$$

其中 $E>0$ 是该衍生证券的执行价格,T 是到期时间.为了给欧式看涨期权定价,需要解具有终端条件(12)的 PDE(11).如果能够得到该 PDE 的显式解 C,则如果知道 t 时刻的资产价格 S,就可以知道当时的期权价值 $C(S,t)$.

定理 1(欧式看涨期权的 Black-Scholes 公式) PDE(11)的解的显式表达式为

$$C(S,t)=SN(d_1)-Ee^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{13}$$

其中 $N(x)$ 是标准正态分布的累积概率分布函数,即

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz,$$

其中

$$d_1=\frac{\log(S/E)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2=\frac{\log(S/E)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

证明 该定理能够利用 PDE 的技巧证明,但本文将使用概率的方法证明[5].给定一对 $S>0$ 和 $t\in[0,T]$,引入 SDE:

$$dx(u)=rx(u)du+\sigma x(u)dB(u),\quad t\leqslant u\leqslant T, \tag{14}$$

满足初值条件 $x(t)=S$.文献[6]证明了线性 SDE 可以显式求解.特别地,有

$$x(T)=S\exp\left[\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma(B(T)-B(t))\right].\quad(15)$$

定义 $C^{2,1}$ 函数

$$V(x,u)=C(x,u)e^{r(T-u)},\quad (x,u)\in(0,\infty)\times[t,T],$$

其中 $C(x,u)$ 满足 Black-Scholes PDE(变量取为 x 和 u 而不是 S 和 t),即

$$\frac{\partial C}{\partial u}+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+rx\frac{\partial C}{\partial x}-rC=0.\quad(16)$$

计算

$$\frac{\partial V}{\partial u}=\left(\frac{\partial C}{\partial u}-rC\right)e^{r(T-u)},\quad \frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial C}{\partial x}e^{r(T-u)},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x}=\frac{\partial^2 C}{\partial^2 x}e^{r(T-u)}.$$

利用 Itô 公式

$$dV(x(u),u)=\left[\frac{\partial V(x(u),u)}{\partial u}+\frac{\partial V(x(u),u)}{\partial x}rx(u)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(x(u),u)}{\partial^2 x}\sigma^2x^2(u)\right]du+\frac{\partial V(x(u),u)}{\partial x}\sigma x(u)dB(u)=$$

$$e^{r(T-u)}\left[\frac{\partial C(x(u),u)}{\partial u}-rC(x(u),u)+rx(u)\frac{\partial C(x(u),u)}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2x^2(u)\frac{\partial^2 C(x(u),u)}{\partial^2 x}\right]du+\sigma x(u)e^{r(T-u)}\frac{\partial C(x(u),u)}{\partial x}dB(u).$$

由式(16)可知

$$dV(x(u),u)=\frac{\partial V(x(u),u)}{\partial x}\sigma x(u)dB(u).$$

两边由 $u=t$ 到 $u=T$ 积分,得

$$V(x(T),T)-V(x(t),t)=\int_t^T\frac{\partial V(x(u),u)}{\partial x}\sigma x(u)dB(u).$$

两端取期望,利用 Itô 积分的性质,有

$$EV(x(T),T)-EV(x(t),t)=0.$$

注意到

$$V(x(T),T)=C(x(T),T)=\max(x(T)-E,0)$$

且

$$V(x(t),t)=C(x(t),t)e^{r(T-t)}=C(S,t)e^{r(T-t)},$$

因此 $E[\max(x(T)-E,0)]-C(S,t)e^{r(T-t)}=0$,即

$$C(S,t)=e^{-r(T-t)}E[\max(x(T)-E,0)].\quad(17)$$

又由于

$$\log(x(T))=\log(S)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma(B(T)-B(t))\sim N(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2),$$

其中 $\hat{\mu}=\log(S)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)$, $\hat{\sigma}=\sigma\sqrt{T-t}$.

因此 $Z:=\frac{\log(x(T))-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\sim N(0,1)$,故 $x(T)=e^{\hat{\mu}+\hat{\sigma}Z}$.

进一步, $x(T)-E\geqslant 0$, 即 $e^{\hat{\mu}+\hat{\sigma}Z}\geqslant E$, 等价于 $Z\geqslant\frac{\log(E)-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$.

因此

$$E[\max(x(T)-E,0)]=E[\max(e^{\hat{\mu}+\hat{\sigma}z}-E,0)]=\int_{\frac{\log(E)-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}}^{\infty}(e^{\hat{\mu}+\hat{\sigma}z}-E)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz.$$

计算

$$\frac{\log(E)-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}=\frac{\log(E)-\log(S)-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}=-\frac{\log(S/E)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}=-d_2.$$

故

$$E[\max(x(T)-E,0)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}(e^{\hat{\mu}+\hat{\sigma}z}-E)e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}e^{\hat{\mu}+\hat{\sigma}z-\frac{1}{2}z^2}dz-\frac{E}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz.$$

根据正态分布的对称性,计算

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{-d_2}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=N(d_2)\quad(19)$$

和

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}e^{\hat{\mu}+\hat{\sigma}z-\frac{1}{2}z^2}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}e^{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2-\frac{1}{2}(z-\hat{\sigma})^2}dz=\frac{e^{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(z-\hat{\sigma})^2}dz=\frac{e^{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-(d_2+\hat{\sigma})}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=$$

$$\frac{e^{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_2+\hat{\sigma}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=e^{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2}N(d_2+\hat{\sigma})=e^{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2}N(d_1),$$

其中 $d_1=d_2+\hat{\sigma}$.将式(19),(20)代入式(18)中,得

$$E[\max(x(T)-E,0)]=e^{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2}N(d_1)-EN(d_2).$$

将上式代入式(17)得

$$C(S,t)=e^{-r(T-t)}\left(e^{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2}N(d_1)-EN(d_2)\right)=$$

$N(d_1)\exp\left[-r(T-t)+\log S+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right]-$

$E\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2)=SN(d_1)-E\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2)$.

证毕.

利用欧式看涨期权定价公式很容易得到欧式看跌期权定价公式.令 $P(S,t)$ 是时刻 t 依赖于资产价格 S 的欧式看跌期权价值,则到期日它的价值为

$$P(S,T)=\max(E-S,0).$$

利用平价原则,有 $S+P(S,t)-C(S,t)=E\mathrm{e}^{-r(T-t)}$.因此

$$P(S,t)=E\mathrm{e}^{-r(T-t)}+C(S,t)-S.$$

将式(13)代入上式得

$$P(S,t)=E\mathrm{e}^{-r(T-t)}+SN(d_1)-E\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2)-S=E\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(-d_2)-SN(-d_1).$$

定理 2 (欧式看跌期权的 Black-Scholes 公式)t 时刻依赖于资产价格 S 的欧式看跌期权价值为

$$P(S,t)=EN(-d_2)\mathrm{e}^{-r(T-t)}-SN(-d_1),$$

其中 d_1 和 d_2 的定义同定理 1.

4 利用软件 R 的模拟

4.1 欧式看涨期权价值

基于欧式看涨期权的 Black-Scholes 公式(13),设计 R 程序(定义为函数)去计算看涨期权价值:

```
> BScall <-function(S0,a,b,T,E){
+## give S0,a,b,T,E,dS=aSdt+bSdB,0\le t\le T
+d1=(log(S0/E)+(a+0.5*b^2)*T)/(b*sqrt(T))
+d2=(log(S0/E)+(a-0.5*b^2)*T)/(b*sqrt(T))
+S0*pnorm(d1)-E*exp(-a*T)*pnorm(d2)
```

实例 1 考虑资产价格模型

$\mathrm{d}S(t)=0.05S(t)\mathrm{d}t+0.03S(t)\mathrm{d}B(t)$, $S(0)=10$

和 $T=1$ 时刻执行价为 $E=10.05$ 的欧式看涨期权,其中风险自由的利率 $r=0.05$,波动率 $\sigma=0.03$.在 R 软件中输入>BScall(10,0.05,0.03,1,10.05)就可以获得 0 时刻欧式看涨期权价值为 $C(10,0)=0.4487318$.

为了测试 Monte Carlo 模拟的有效性,设计 R 函数为

```
> EMcall <-function(S0,Dt,a,b,M,N,E){
+## give S0,Dt,a,b,M,N,E for dS=aSdt+bSdB,
+## T=M*Dt,N=sample size
+x <-numeric()
+XT <-numeric()
+x[1]=S0
+for (j in 1:N){
+for (i in 2:M){x[i]=x[i-1]*(1+a*Dt+b*sqrt(Dt)
*rnorm(1))}
+XT[j]=x[M]}
+payoff <-XT-E
+payoff[payoff<0] <-0
+hist(payoff)
+exp(-a*M*Dt)*mean(payoff)
```

注意:演绎 Monte Carlo 模拟时,要用到 Black-Scholes 公式证明中的 SDE(14)(用 r 代替 μ)和式(17).

实例 1 的延续 令步长 $Dt=0.001$,模拟 SDE 的 1 000 条样本路径,计算 $T=1$ 时刻的收益均值,再乘以 $\mathrm{e}^{-0.05}$,即输入

```
EMcall(10,0.001,0.05,0.03,1000,1000,10.05)
```

就得到了看涨期权价值的近似值 0.449 261 5,这个值与理论值非常接近,参见看涨期权收益的柱状图(图 1).

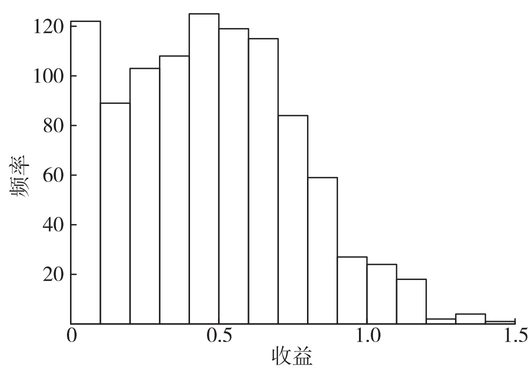

图 1 看涨期权收益的柱状图

Fig. 1 The histogram of the payoff of the call option

4.2 欧式看跌期权价值

基于看跌期权的 Black-Scholes 公式(式 21),设计计算看跌期权价值的 R 函数:

```
> BSput <-function(S0,a,b,T,E){
+## give S0,a,b,T,E,dS=aSdt+bSdB,0\le t\le T
+d1=(log(S0/E)+(a+0.5*b^2)*T)/(b*sqrt(T))
+d2=(log(S0/E)+(a-0.5*b^2)*T)/(b*sqrt(T))
+E*exp(-a*T)*pnorm(-d2)-S0*pnorm(-d1)}
```

实例 2 考虑资产价格模型

$\mathrm{d}S(t)=0.05S(t)\mathrm{d}t+0.03S(t)\mathrm{d}B(t)$, $S(0)=10$

和 $T=1$ 时刻执行价为 $E=10.05$ 的欧式看跌期权,其中风险自由的利率 $r=0.05$,波动率 $\sigma=0.03$.在 R 软件中输入>BSput(10,0.05,0.03,1,10.05)就可以获得 0 时刻欧式看跌期权价值为 $P(10,0)=0.008587539$.

注意到 $S(0)=10$,$P(10,0)=0.008587539$,$C(10,0)=0.4487318$ 和 $E\mathrm{e}^{-0.05}=9.559856$,显然

$$S(0)+P(10,0)-C(10,0)=E\mathrm{e}^{-0.05},$$

这验证了平价原则.

类似地,为了演绎 Monte Carlo 模拟,设计 R 函数为

```
> EMput <-function(S0,Dt,a,b,M,N,E){
+## give S0,Dt,a,b,M,N,E for dS=aSdt+bSdB,
+## T=M * Dt,N=sample size
+x <-numeric()
+XT <-numeric()
+x[1]=S0
+for (j in 1:N){
+for (i in 2:M){x[i]=x[i-1] * (1+a * Dt+b * sqrt(Dt)
 * rnorm(1))}
+XT[j]=x[M]}
+payoff <-E-XT+payoff[payoff<0] <-0
+hist(payoff)
+exp(-a * M * Dt) * mean(payoff)}
```

实例 2 的延续 令步长 $Dt=0.001$,模拟 SDE 的 1 000 条样本路径,计算 $T=1$ 时刻的收益均值,再乘以 $\mathrm{e}^{-0.05}$,即输入

```
EMput(10,0.001,0.05,0.03,1000,1000,10.05)
```

就得到了看跌期权价值的近似值 0.008 929 455,这个值与理论值非常接近,参见看跌期权收益的柱状图(图 2).

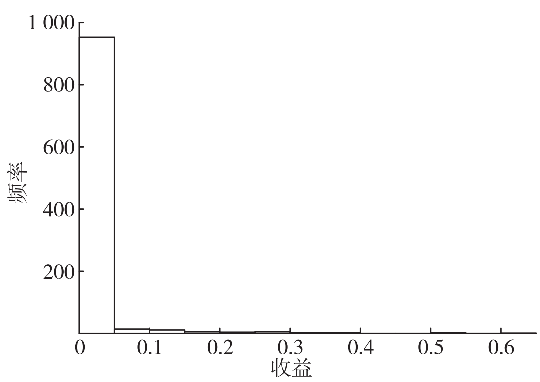

图 2 看跌期权收益的柱状图

Fig. 2 The histogram of the payoff of the put option

5 希腊符号

Black-Scholes 模型的本质想法在于以恰当的方式买卖资产从而达到避险和套利期权的目的.这种避险的方式被称为 Delta 避险,是银行投资和对冲基金业务中使用的多种复杂避险保值策略的基础.期权价值的多个偏导数被广泛使用,并以希腊符号命名,其中 *vega* 并不是希腊符号,但也被用于命名期权价值的一个偏导数.

定义 1

$$\Delta:=\frac{\partial C}{\partial S},\quad \Gamma:=\frac{\partial^2 C}{\partial S^2},\quad \rho:=\frac{\partial C}{\partial r},$$

$$\Theta:=\frac{\partial C}{\partial t},\quad vega:=\frac{\partial C}{\partial \sigma}.$$

对式(13)中 C 微分,利用 $N(s)$,d_1 和 d_2 的定义以及关系 $d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$,可以得到这些量的显式表达式.在此计算过程前,注意到两个事实,一个是由 $N(x)$ 的定义可得 $N'(x)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$.另一个事实表达为如下引理:

引理 1 $SN'(d_1)-\mathrm{e}^{-r(T-t)}EN'(d_2)=0$.

证明 事实上

$$\log\left(\frac{SN'(d_1)}{\mathrm{e}^{-r(T-t)}EN'(d_2)}\right)=$$

$$\log(S)-\frac{1}{2}d_1^2+r(T-t)-\log(E)+\frac{1}{2}d_2^2=$$

$$\log(S/E)+r(T-t)+\frac{1}{2}(d_2^2-d_1^2).$$

利用 d_1 和 d_2 的定义,计算得

$$d_2^2-d_1^2=(d_2+d_1)(d_2-d_1)=-2\log(S/E)-2r(T-t),$$

因此

$$\log\left(\frac{SN'(d_1)}{\mathrm{e}^{-r(T-t)}EN'(d_2)}\right)=0.$$

证毕.

式(13)两端对 S 求偏导,有

$$\Delta=N(d_1)+SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S}-E\mathrm{e}^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S}=$$

$$N(d_1)+\frac{N'(d_1)}{\sigma\sqrt{T-t}}-E\mathrm{e}^{-r(T-t)}\frac{N'(d_2)}{S\sigma\sqrt{T-t}}.$$

根据引理 1,消掉右端第二项和第三项,故

$$\Delta=N(d_1). \tag{22}$$

继续对 S 求偏导,有

$$\Gamma=N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S}=\frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{23}$$

接下来,式(13)两端对 r 求偏导,有

$$\rho=SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial r}+(T-t)E\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2)-$$

$$E\mathrm{e}^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial r}=$$

$$SN'(d_1)\frac{T-t}{\sigma}+(T-t)E\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2)-$$

$$Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}.$$

根据引理 1,消掉右端第一项和第三项,故

$$\rho=(T-t)Ee^{-r(T-t)}N(d_2). \tag{24}$$

进一步,式(13)两端对 t 求偏导,有

$$\Theta=\frac{\partial C}{\partial t}=SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial t}-Ere^{-r(T-t)}N(d_2)-Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial t}.$$

根据 $d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$,可知$\frac{\partial d_2}{\partial t}=\frac{\partial d_1}{\partial t}+\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}$.

利用上式和引理 1,有

$$\Theta=-\frac{S\sigma N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}}-rEe^{-r(T-t)}N(d_2). \tag{25}$$

最后,式(13)两端对 σ 求偏导,有

$$vega=\frac{\partial C}{\partial \sigma}=SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}-Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}.$$

注意到$\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}=\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}-\sqrt{T-t}$.利用上式和引理 1,有

$$vega=S\sqrt{T-t}N'(d_1). \tag{26}$$

下面从金融的观点来解释这些希腊公式:

1) 由式(22),可见 $\Delta>0$.这是合理的,因为随着到期日资产价格的增高期权收益也会增高.

2) 由式(24),可见 $\rho>0$.注意到增加的利率相当于执行价格 E 的降低(达到未来某一时刻数量为 E 的资金随着利率的提升现在的数量变少了),这使得期权收益变高,期权价值增大.

3) 由式(26),可见 $vega>0$.注意到波动率增大导致资产价格范围更大.然而,一方面,资产价格变得更低对期权价值毫无影响(期权收益保持在 0),另一方面,资产价格变得更高将导致期权更大的收益.因此,这种非对称性将导致增大的 σ 对期权价值有正的效应.

参考文献
References

[1] Black F,Scholes M.The pricing of options and corporate liabilities[J].The Journal of Political Economy,1973,81(3):637-654
[2] MacKenzie D. An engine, not a camera: How financial models shape markets [M]. Cambridge, MA: MIT Press,2006
[3] Bodie Z,Kane A,Marcus A J.Investments[M].7th Ed. New York:McGraw-Hill/Irwin,2008
[4] Merton R C. Theory of rational option pricing[J]. The Bell Journal of Economics and Management Science, 1973,4(1):141-183
[5] Mao X R. Stochastic differential equations and applications [M]. 2nd Ed. Chichester: Horwood Publishing,2007
[6] 毛学荣,李晓月.金融领域的随机建模与基于软件 R 的 Monte Carlo 模拟(4):随机微分方程模型[J].南京信息工程大学学报:自然科学版,2015,7(4):313-322
MAO Xuerong, LI Xiaoyue. Stochastic modelling in finance and Monte Carlo simulations with R.Part D:Stochastic differential equation model[J].Journal of Nanjing University of Information Science & Technology:Natural Science Edition,2015,7(4):313-322

Stochastic Modelling in Financeand Monte Carlo Simulations with R. Part E:The Black-Scholes world

MAO Xuerong[1] LI Xiaoyue[2]
1 Department of Mathematics and Statistics,University of Strathclyde,Glasgow,G1 1XT,Scotland,UK
2 School of Mathematics and Statistics,Northeast Normal University,Changchun 130024

Abstract The key aim of this serial papers is to study various stochastic models in finance with emphasis on the Monte Carlo simulations with R for these models.In this paper,we studied the Black-Scholes model,which was originally established by Black and Scholes and later developed by Merton.Our emphasis is still on the Monte Carlo simulations with R.Compared with the Black-Scholes formulas on the option values,we show once again the power of the Monte Carlo simulations.

Key words Black-Scholes PDE;Black-Scholes formulas;Monte Carlo simulations;Euler-Maruyama method