



# 金融领域的随机建模与基于软件 R 的 Monte Carlo 模拟(4):随机微分方程模型

## 摘要

主要研究线性随机微分方程模型,为此定义 Itô 随机微积分,建立 Itô 公式.鉴于研究的重点是利用 R 软件进行数值模拟,所以详细讨论了过去 10 多年来随机微分方程数值解的研究.

## 关键词

Monte Carlo 模拟;Euler-Maruyama 方法;Backward Euler 方法;Split-Step Backward Euler 方法;随机 Theta 方法

中图分类号 F830;O211

文献标志码 A

## 0 引言

文献[1-2]讨论的 Cox-Ross-Rubinstein (CRR)模型<sup>[3]</sup>和随机线性(SLL)模型<sup>[4]</sup>并不需要深入的数学背景,因此至今为止在实际中它们仍被使用.然而广义 CRR 模型的研究需要新的理论.本文开始讨论深刻的随机微分方程(SDE)模型,包括获得诺贝尔奖的模型<sup>[5-7]</sup>、Cox-Ingersoll-Ross (CIR)模型<sup>[8]</sup>以及平方根过程<sup>[9-11]</sup>.自 19 世纪 40 年代 Itô 创立随机微积分以来,这些随机微分方程模型已被广泛发展.为了帮助读者理解 SDE 模型,本文将阐述 Itô 微积分与经典微积分之间的差别,对股票价格建模时 Itô 积分的必要性,以及如何建立重要的 Itô 公式.鉴于本系列论文的核心内容是利用 R 软件来模拟,因此将详细讨论近 10 多年来随机微分方程数值解的研究,这是随机微分方程研究领域中最活跃的方向之一,仍有许多问题有待解决.

## 1 资产价格的 SDE 模型

在复杂的金融环境中,利率通常是关于时间的函数或是随机过程,但这使资产价格分析变得异常复杂,因此本文将假设短期银行存款利率是已知常数.这一假设虽然有点牵强,但由于典型的股票期权有效期仅为 9 个月,在这短暂的时间里,利率有可能发生变化但还不足以影响期权价格,因此使用该假设.

有时资产价格的绝对变化量并不能很好地体现自身的变化,例如,对 20 元的资产价格变化 1 元相比于 200 元资产价格变化 1 元,变化量更为显著.因此引入资产价格的相对变化量定义,它表示资产变化的价格与原价格之比,它对资产价格变化量的描述更为清晰.

现在假设  $t$  时刻资产价格为  $S(t)$ .考虑在微小时间段  $dt$  里,资产价格由  $S(t)$  变为了  $S(t+dt) = S(t) + dS(t)$ .根据定义,时刻  $t$  时资产价格相对变化量为  $dS(t)/S(t)$ ,下面对它进行建模.

为了让读者更容易理解建模的过程,假设银行存款利率为  $r$ ,且  $t$  时刻存款账户里的资金为  $X(t)$ ,则  $t$  时刻资金变化量  $dX(t)/X(t)$  为  $r dt$ ,即

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = r dt,$$

收稿日期 2014-09-13

资助项目 国家自然科学基金(11171056,11171081)

## 作者简介

毛学荣,男,博士,教授,研究方向为随机分析,随机微分方程理论及应用.

x.mao@strath.ac.uk

李晓月(通信作者),女,博士,教授,研究方向为随机微分方程理论及应用.

lixxy209@nenu.edu.cn

1 斯特莱斯克莱德大学 数学系,格拉斯哥, G1 1XT,英国

2 东北师范大学 数学与统计学院,长春,130024

或者

$$X(t) = X_0 + \int_0^t rX(u) du,$$

或者

$$\frac{dX}{dt} = rX(t).$$

这个常微分方程精确可解,它的解意味着存款账户价值呈指数增长,即

$$X(t) = X_0 e^{rt},$$

其中  $X_0$  表示初始 0 时刻的存款金额.

该模型表明将资金投资在风险自由的银行里,资金数额也并不波动,然而在有效市场假说理论下,资产价格是随机波动的.不同假设都在阐释 2 件事情:

1) 过去的历史在现在的价格中已经完全体现,预测未来的价格没必要考虑历史;

2) 市场环境即时影响资产价格.

根据以上 2 条假设,难以预料的资产价格的变化是马科夫过程.

根据假设,大多数建模将资产价格相对变化量  $dS(t)/S(t)$  分解为 2 个部分:一部分是可预测的、确定的部分,类似于资金投资于风险自由的银行,用  $\mu dt$  表示,其中  $\mu$  表示资产价格平均增长率,也称为漂移率;另一部分资产价格的相对变化来自外界影响,例如无法预测的事件.由于外界影响事件很多,因此根据著名的中心极限定理,第 2 部分变化量可以由服从

$$N(0, \sigma^2 dt) = \sigma N(0, dt)$$

的正态分布的一个样本来表示,其中  $\sigma$  表示资产价格相对变化的标准偏差,称为波动率.利用布朗运动的定义,有

$$N(0, \sigma^2 dt) = \sigma dB(t),$$

其中  $dB(t) = B(t+dt) - B(t) \sim N(0, dt)$  表示布朗运动的增量.将以上两部分合在一起,就得到随机微分方程(SDE)模型:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dB(t),$$

或者

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dB(t), \quad (1)$$

或者

$$S(t) = S_0 + \mu \int_0^t S(u) du + \sigma \int_0^t S(u) dB(u), \quad (2)$$

其中  $S_0$  是 0 时刻的初始资产价格.以上过程简单地描述了资产价格模型的建立.对于新类型的积分

$$\int_0^t S(u) dB(u), \quad (3)$$

它是一个相对布朗运动的积分,但布朗运动  $B(t)$  是处处不可微的,即  $dB(t)/dt = \dot{B}(t)$  不存在,则积分

(3) 不能处理为经典 Riemann 积分  $\int_0^t S(u) \dot{B}(u) du$ .

另一方面,如果布朗运动  $B(t)$  具有有限变差,则积分(3)可以按照经典的 Riemann-Stieltjes 积分,不幸的是布朗运动的几乎每条样本路径都没有有限变差.没有理论可以解释积分(3),直到 19 世纪 40 年代,日本数学家 Kiyoshi Itô 发展了新的理论去解释和运算这种积分,该理论被称为 Itô 微积分.

## 2 Itô 微积分

以 Kiyoshi Itô 命名的 Itô 微积分发展了处理随机过程例如布朗运动(维纳过程)的微积分方法,在数学金融以及随机微分方程等领域具有重要应用.该理论的核心是 Itô 随机积分的定义,它是 Riemann-Stieltjes 积分定义的推广,这主要体现在随机积分能够处理随机过程的积分,还可以处理不可微函数的积分,例如布朗运动.

### 2.1 Itô 积分

类似于 Riemann-Stieltjes 积分的定义,Itô 积分在概率意义上被定义为 Riemann 和的极限,而样本路径的黎曼和极限未必存在.假设  $B(t)$  是一个布朗运动, $H(t)$  是左连续的(适应的)局部有界过程.令  $\Delta > 0, N = t/\Delta$ , 且  $t_i = i\Delta, 0 \leq i \leq N$ , 则到时间  $t$ ,  $H$  关于  $B$  的 Itô 积分是一个随机变量:

$$\int_0^t H(s) dB(s) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N H(t_{i-1}) (B(t_i) - B(t_{i-1})).$$

可以证明该极限依概率收敛.随机积分具有性质:

$$E \left( \int_0^t H(s) dB(s) \right) = 0.$$

同时,如果  $H$  是有界的,则满足 Itô 等距同构公式:

$$E \left[ \left( \int_0^t H(s) dB(s) \right)^2 \right] = E \left[ \int_0^t (H(s))^2 ds \right].$$

进一步,如果对一般的  $H$ , 上式右端存在,该公式也成立.特殊地,如果  $H$  是一个确定函数,则

$$\int_0^t H(s) dB(s) \sim N(0, \sigma^2),$$

其中  $\sigma^2 = \int_0^t (H(s))^2 ds$ .

下面阐述 Itô 积分与 Riemann-Stieltjes 积分的不同之处.尽管 Itô 积分定义的方式与 Riemann-Stieltjes 积分类似,但它们之间却有着本质的差异.回忆 Rie-

mann-Stieltjes 积分  $\int_0^t \sin s ds \sin s = \frac{1}{2}(\sin t)^2$ , 自然地猜测 Itô 积分  $\int_0^t B(s) dB(s) = \frac{1}{2}(B(t))^2$ , 然而这是错误的. 正确的答案是

$$\int_0^t B(s) dB(s) = \frac{1}{2}(B(t))^2 - \frac{t}{2}. \quad (4)$$

式(4)的证明要用到 Itô 引理, 也被称为 Itô 公式.

### 2.2 Itô 引理

前一节中定义了 Itô 随机积分, 然而在具体随机积分计算时利用该定义并不便捷. 这与经典的 Riemann 或者 Lebesgue 积分类似, 微积分计算并不利用基本定义, 而是利用微积分基本定理 (Newton-Leibniz 公式) 和链式法则. 例如利用链式法则而不是定义得:

$$\int_0^t (\sin s \cos s) ds = \frac{1}{2} \sin^2 t.$$

本节将建立适用于 Itô 随机积分的链式法则, 即 Itô 公式或引理. Itô 公式不仅对计算 Itô 积分有用, 而且对随机分析也起到关键作用. 为节省篇幅, 本文仅给出一维情况 Itô 公式及其证明, 高维情况请参考文献 [12-13].

**定义 1** 假设随机过程  $f$  和  $g$  满足:

$$\int_0^t |f(s)| ds < \infty, \quad \int_0^t |g(s)|^2 ds < \infty, \quad \forall t > 0.$$

如果连续随机过程  $x(t)$  满足:

$$dx(t) = f(t) dt + g(t) dB(t), \quad t \geq 0,$$

等价地

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s) ds + \int_{t_0}^t g(s) dB(s), \quad t \geq t_0 \geq 0,$$

则称  $x(t)$  为一维 Itô 过程.

后会经常用到 Itô 过程  $x(t)$  和它在  $[a, b]$  上微分的定义, 它们的意思是明显的, 不再重复.

为了叙述的便利, 令  $C^{2,1}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, \mathbf{R})$  表示定义在  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$  上对  $x$  二阶连续可微, 对  $t$  一阶连续可微的实值函数  $V(x, t)$  的全体. 若  $V \in C^{2,1}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ , 令

$$V_t = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad V_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad V_{xx} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

**定理 1** (Itô 引理或公式) 假设随机过程  $f$  和  $g$  满足:

$$\int_0^t |f(s)| ds < \infty, \quad \int_0^t |g(s)|^2 ds < \infty, \quad \forall t > 0.$$

令  $x(t)$  是满足:

$$dx(t) = f(t) dt + g(t) dB(t), \quad t \geq 0$$

的 Itô 过程. 令  $V \in C^{2,1}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ , 则  $V(x(t), t)$  仍是 Itô 过程, 且满足:

$$dV(x(t), t) = \left[ V_t(x(t), t) + V_x(x(t), t)f(t) + \frac{1}{2}V_{xx}(x(t), t)g^2(t) \right] dt + V_x(x(t), t)g(t) dB(t), \quad (5)$$

其中

$$V_t(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}, \quad V_x(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x},$$

$$V_{xx}(x, t) = \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2}.$$

**证明** 本文仅介绍证明步骤, 详细证明参见文献 [12-14].

**步骤 1** 如果  $x(t)$  是以常数  $K$  为界的, 则  $x \notin [-K, K]$ , 对  $V(x, t)$  取值无任何影响, 否则, 对每个  $n \geq 1$ , 定义停时

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0; |x(t)| \geq n\}.$$

显然,  $\tau_n \uparrow \infty$  a.s. 在  $t \geq 0$  上, 定义随机过程

$$x_n(t) = [-n \vee x(0)] \wedge n + \int_0^t f(s) I_{[0, \tau_n]}(s) ds + \int_0^t g(s) I_{[0, \tau_n]}(s) dB(s),$$

则  $|x_n(t)| \leq n$ , 即  $x_n(t)$  是有界的. 进一步, 对每个  $t \geq 0$  和几乎每个  $\omega \in \Omega$ , 都存在一个正整数  $n_0 = n_0(t, \omega)$  使得对所有的  $n \geq n_0$ , 有

$$x_n(s, \omega) = x(s, \omega), \quad 0 \leq s \leq t.$$

因此, 如果对  $x_n$ , 能够建立式(5), 即

$$V(x_n(t), t) - V(x(0), 0) =$$

$$\int_0^t \left[ V_t(x_n(s), s) + V_x(x_n(s), s)f(s) I_{[0, \tau_n]}(s) + \frac{1}{2}V_{xx}(x_n(s), s)g^2(s) I_{[0, \tau_n]}(s) \right] ds + \int_0^t V_x(x_n(s), s)g(s) I_{[0, \tau_n]}(s) dB(s),$$

上式两端令  $n \rightarrow \infty$ , 就可以得到想要的结果.

**步骤 2** 假设  $V(x, t)$  是  $C^2$ , 即关于 2 个变量  $(x, t)$  都是二阶连续可微的, 否则可以找到  $C^2$  函数列  $\{V_n(x, t)\}$  使得在  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$  的任何紧子集上

$$V_n(x, t) \rightarrow V(x, t), \quad \frac{\partial}{\partial t} V_n(x, t) \rightarrow V_t(x, t),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} V_n(x, t) \rightarrow V_x(x, t), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_n(x, t) \rightarrow V_{xx}(x, t)$$

一致地成立. 如果能够证明对每个  $V_n$ , Itô 公式都成立, 即

$$V_n(x(t), t) - V_n(x(0), 0) = \int_0^t \left[ \frac{\partial}{\partial t} V_n(x(s), s) + \frac{\partial}{\partial x} V_n(x(s), s) f(s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_n(x(s), s) g^2(s) \right] ds + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} V_n(x(s), s) g(s) dB(s),$$

则令  $n \rightarrow \infty$ , 就可以得到要证的式(5). 根据步骤 1 和 2, 不失一般性, 可以假设对每个  $t \geq 0$ , 在  $\mathbf{R} \times [0, t]$  上,  $V, V_t, V_u, V_x, V_{tx}$  和  $V_{xx}$  都是有界的.

**步骤 3** 由于  $f$  和  $g$  可以被简单过程逼近, 因此只需要对  $f$  和  $g$  是简单过程的情形证明式(5)成立.

**步骤 4** 对任意给定的  $t > 0$ , 假设在  $\mathbf{R} \times [0, t]$  上  $V, V_t, V_u, V_x, V_{tx}, V_{xx}$  均是有界的, 且  $f(s), g(s)$  是  $[0, t]$  上的简单过程. 令  $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$  是  $[0, t]$  上足够细的分割 (即  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t$ ), 使得  $f(s)$  和  $g(s)$  在每个  $(t_i, t_{i+1}]$  都是随机常数, 即

$$f(s) = f_i, \quad g(s) = g_i, \quad s \in (t_i, t_{i+1}].$$

利用熟知的泰勒展开式, 有

$$V(x(t), t) - V(x(0), 0) = \sum_{i=0}^{k-1} [V(x(t_{i+1}), t_{i+1}) - V(x(t_i), t_i)] = \sum_{i=0}^{k-1} V_t(x(t_i), t_i) \Delta t_i + \sum_{i=0}^{k-1} V_x(x(t_i), t_i) \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} V_{tt}(x(t_i), t_i) (\Delta t_i)^2 + \sum_{i=0}^{k-1} V_{tx}(x(t_i), t_i) \Delta t_i \Delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} V_{xx}(x(t_i), t_i) (\Delta x_i)^2 + \sum_{i=0}^{k-1} R_i, \quad (6)$$

其中

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i, \quad \Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i), \\ R_i = o((\Delta t_i)^2 + (\Delta x_i)^2).$$

令  $|\Pi| = \max_{0 \leq i \leq k-1} \Delta t_i$ . 显然, 当  $|\Pi| \rightarrow 0$  时,

$$\sum_{i=0}^{k-1} V_t(x(t_i), t_i) \Delta t_i \rightarrow \int_0^t V_t(x(s), s) ds, \quad (7)$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} V_x(x(t_i), t_i) \Delta x_i \rightarrow \int_0^t V_x(x(s), s) dx(s) =$$

$$\int_0^t V_x(x(s), s) f(s) ds + \int_0^t V_x(x(s), s) g(s) dB(s), \quad (8)$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} V_{tt}(x(t_i), t_i) (\Delta t_i)^2 \rightarrow 0, \quad \sum_{i=0}^{k-1} R_i \rightarrow 0 \quad (9)$$

以概率 1 或几乎处处 (a.s.) 成立. 注意到

$$\sum_{i=0}^{k-1} V_{tx}(x(t_i), t_i) \Delta t_i \Delta x_i =$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} V_{tx}(x(t_i), t_i) f_i (\Delta t_i)^2 + \sum_{i=0}^{k-1} V_{tx}(x(t_i), t_i) g_i \Delta t_i \Delta B_i,$$

其中  $\Delta B_i = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ . 当  $|\Pi| \rightarrow 0$ , 第 1 项几乎处处趋于 0, 第 2 项在  $L^2$  意义下趋于 0, 即

$$E \left( \sum_{i=0}^{k-1} V_{tx}(x(t_i), t_i) g_i \Delta t_i \Delta B_i \right)^2 = \sum_{i=0}^{k-1} E [V_{tx}(x(t_i), t_i) g_i]^2 (\Delta t_i)^3 \rightarrow 0.$$

换句话说, 由于有界性的假设, 下式

$$\sum_{i=0}^{k-1} V_{tx}(x(t_i), t_i) \Delta t_i \Delta x_i \rightarrow 0 \quad (10)$$

在  $L^2$  意义下成立. 又由于

$$\sum_{i=0}^{k-1} V_{xx}(x(t_i), t_i) (\Delta x_i)^2 = \sum_{i=0}^{k-1} V_{xx}(x(t_i), t_i) [f_i^2 (\Delta t_i)^2 + 2f_i g_i \Delta t_i \Delta B_i] + \sum_{i=0}^{k-1} V_{xx}(x(t_i), t_i) g_i^2 (\Delta B_i)^2,$$

同理, 当  $|\Pi| \rightarrow 0$ , 第 1 项在  $L^2$  意义下趋于 0, 第 2 项在  $L^2$  意义下趋于  $\int_0^t V_{xx}(x(s), s) g^2(s) ds$ . 事实上, 令

$$h(t) = V_{xx}(x(t), t) g^2(t), \quad h_i = V_{xx}(x(t_i), t_i) g_i^2,$$

计算

$$E \left( \sum_{i=0}^{k-1} h_i (\Delta B_i)^2 - \sum_{i=0}^{k-1} h_i \Delta t_i \right)^2 = E \left( \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} h_i h_j [(\Delta B_i)^2 - \Delta t_i][(\Delta B_j)^2 - \Delta t_j] \right) = \sum_{i=0}^{k-1} E(h_i^2 [(\Delta B_i)^2 - \Delta t_i]^2) = \sum_{i=0}^{k-1} E h_i^2 E [(\Delta B_i)^4 - 2(\Delta B_i)^2 \Delta t_i + (\Delta t_i)^2] = \sum_{i=0}^{k-1} E h_i^2 [3(\Delta t_i)^2 - 2(\Delta t_i)^2 + (\Delta t_i)^2] = 2 \sum_{i=0}^{k-1} E h_i^2 (\Delta t_i)^2 \rightarrow 0,$$

其中  $E(\Delta B_i)^{2n} = (2n)! (\Delta t_i)^n / (2^n n!)$ . 因此在  $L^2$  意义下

$$\sum_{i=0}^{k-1} h_i (\Delta B_i)^2 \rightarrow \int_0^t h(s) ds.$$

换言之, 已经证明了在  $L^2$  意义下

$$\sum_{i=0}^{k-1} V_{xx}(x(t_i), t_i) (\Delta x_i)^2 \rightarrow \int_0^t V_{xx}(x(s), s) g^2(s) ds. \quad (11)$$

带入式(7)–(11)到式(6), 有

$$V(x(t), t) - V(x(0), 0) = \int_0^t \left[ V_t(x(s), s) + V_x(x(s), s)f(s) + \frac{1}{2}V_{xx}(x(s), s)g^2(s) \right] ds + \int_0^t V_x(x(s), s)g(s) dB(s). \quad \text{a.s.}$$

证毕.

**实例 1** 现在利用 Itô 公式来证明式(4). 令 Itô 过程  $x(t)$  满足

$$dx(t) = dB(t) = 0dt + 1dB(t),$$

且  $x(0) = 0$ . 即  $f(t) = 0, g(t) = 1$ , 因此  $x(t) = B(t)$ . 定义  $V(x, t) = x^2 \in C^{2,1}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ , 因此  $V_t = 0, V_x = 2x, V_{xx} = 2$ . 代入到 Itô 公式(5), 得到

$$dV(x(t), t) = dt + 2x(t)dB(t),$$

即

$$V(x(t), t) = V(x(0), 0) + t + 2 \int_0^t x(s)dB(s),$$

这意味着

$$(B(t))^2 = t + 2 \int_0^t B(s)dB(s).$$

故

$$\int_0^t B(s)dB(s) = \frac{1}{2}(B(t))^2 - \frac{t}{2},$$

即为所求.

### 3 资产价格的精确解

为了说明 Itô 公式的重要性, 下面证明如何利用资产价格的数学模型获得方程(1)的精确解.

**定理 2** 假设  $t = t_0 \geq 0$  时刻资产初始价格为  $S(t_0) = S_0 > 0$ , 则在任何  $t \geq t_0$  时刻资产价格为

$$S(t) = S_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (t - t_0) + \sigma(B(t) - B(t_0)) \right]. \quad (12)$$

**证明** 首先定义  $V: (0, \infty) \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$  为  $V(S, t) = \log S$ . 显然

$$V_t = 0, \quad V_s = \frac{1}{S}, \quad V_{ss} = -\frac{1}{S^2}.$$

根据 Itô 公式

$$dV(S(t), t) = \left[ V_t(S(t), t) + V_s(S(t), t)\mu S(t) + \frac{1}{2}V_{ss}(S(t), t)\sigma^2 S^2(t) \right] dt + V_s(S(t), t)\sigma S(t)dB(t),$$

因此

$$d \log S(t) = \left[ \frac{1}{S(t)}\mu S(t) - \frac{1}{2S^2(t)}\sigma^2 S^2(t) \right] dt +$$

$$\frac{1}{S(t)}\sigma S(t)dB(t) = \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dB(t).$$

由  $t_0$  到  $t$  积分, 得

$$\log S(t) - \log S(t_0) = \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (t - t_0) + \sigma(B(t) - B(t_0)).$$

回忆  $S(t_0) = S_0$ , 整理上式有

$$\log S(t) =$$

$$\log S_0 + \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (t - t_0) + \sigma(B(t) - B(t_0)) =$$

$$\log \left( S_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (t - t_0) + \sigma(B(t) - B(t_0)) \right] \right), \quad (13)$$

证毕.

由式(13)可知  $\log S(t)$  服从期望为  $\log S_0 + \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (t - t_0)$ , 方差为  $\sigma^2(t - t_0)$  的正态分布. 换言之,  $S(t)$  服从对数正态分布, 因此可以很容易获得资产价格  $S(t)$  的概率分布函数, 这一问题留给读者思考.

作为 Itô 公式的另一个应用, 本文将证明如何获得资产价格  $S(t)$  的期望和方差. 对  $t \geq t_0$ , 令

$$m_1(t) = ES(t), \quad m_2(t) = ES^2(t).$$

即  $m_1(t)$  和  $m_2(t)$  分别是  $S(t)$  的期望和二阶矩. 显然  $m_1(t_0) = S_0, m_2(t_0) = S_0^2$ . 由方程(1), 有

$$S(t) = S(t_0) + \int_{t_0}^t \mu S(u) du + \int_{t_0}^t \sigma S(u) dB(u).$$

两端取期望

$$m_1(t) = m_1(t_0) + \int_{t_0}^t \mu m_1(u) du,$$

得到精确解

$$m_1(t) = S_0 e^{\mu(t-t_0)}.$$

对  $S^2(t)$  应用 Itô 公式, 有

$$dS^2(t) = (2\mu + \sigma^2)S^2(t)dt + 2\sigma S^2(t)dB(t),$$

意味着

$$S^2(t) = S^2(t_0) + \int_{t_0}^t (2\mu + \sigma^2)S^2(u) du + \int_{t_0}^t 2\sigma S^2(u) dB(u),$$

两端取期望

$$m_2(t) = S_0^2 + \int_{t_0}^t (2\mu + \sigma^2)m_2(u) du.$$

因此

$$m_2(t) = S_0^2 e^{(2\mu + \sigma^2)(t-t_0)}.$$

故  $S(t)$  的方差为

$$\text{var}(S(t)) = m_2(t) - (m_1(t))^2 = S_0^2 e^{(2\mu + \sigma^2)(t-t_0)} - S_0^2 e^{2\mu(t-t_0)} =$$

$$S_0^2 e^{2\mu(t-t_0)} (e^{\sigma^2(t-t_0)} - 1).$$

利用同样的方法,可以获得  $S(t)$  的任何阶矩,在此不再详述.

## 4 利用 R 软件模拟

### 4.1 样本路径

利用线性方程(1)显式表达式和 R 软件,可以模拟真实解的样本路径.通过 R 中程序

```
> lsde <-function(S0,Dt,M,a,b) {
+## give S0,Dt,M,a,b,first, dS=aSdt+bSdB(t), 0≤t≤Dt
* M
+t <-1:M
+t <-Dt * t
+S <-numeric()
+x <-numeric()
+S[1]=S0
+x[1]=S0
+for (i in 2:M) N=rnorm(1)
+S[i]=S[i-1] * exp((a-0.5 * b^2) * Dt+b * sqrt(Dt) *
N)
+x[i]=x[i-1] * exp(a * Dt)
+}
+plot(t,S,pch=".",type="l",col="black",xlab="t",
ylab="S(t)")
+lines(t,x,pch=".",type="l",col="red")
+legend("topright",c("S(t)","mean"),lty=1,col=c
("black","red"))}
```

可以实现这个过程.

### 实例 2 对线性 SDE

$$dS(t) = 1.5S(t)dt + S(t)dB(t), \quad (14)$$

且  $S(0) = 1$ , 在 R 软件中输入

```
> par(mfcol=c(2,2))
> lsde(1,0.001,5000,1.5,1)
> lsde(1,0.001,5000,1.5,1)
> lsde(1,0.001,5000,1.5,1)
> lsde(1,0.001,5000,1.5,1)
```

可以获得  $S(t)$  的 4 条样本路径,如图 1 所示(其中红色的线表示  $S(t)$  的期望,黑色的线表示  $S(t)$  的样本路径).

### 4.2 Monte Carlo 模拟

线性随机微分方程(SDE)被广泛用于测试 Monte Carlo 模拟的有效性,对线性 SDE 的 Monte Carlo 模拟基于 Euler-Maruyama(EM)方法

$$x(0) = S_0, \quad x(i+1) = x(i) [1 + \lambda \Delta + \sigma \Delta B_i], \quad i \geq 0 \quad (15)$$

展开,其中  $\Delta B_i = B((i+1)\Delta) - B(i\Delta) \sim N(0, \Delta)$ .相应的 R 程序为

```
> EMforlsde <-function(S0,Dt,M,a,b) {
+## give S0,Dt,M,a,b,for dS(t) = aSdt+bSdB(t), 0≤t≤
Dt * M
+t <-1:M
+t <-Dt * t
+S <-numeric()
+x <-numeric()
+}
```

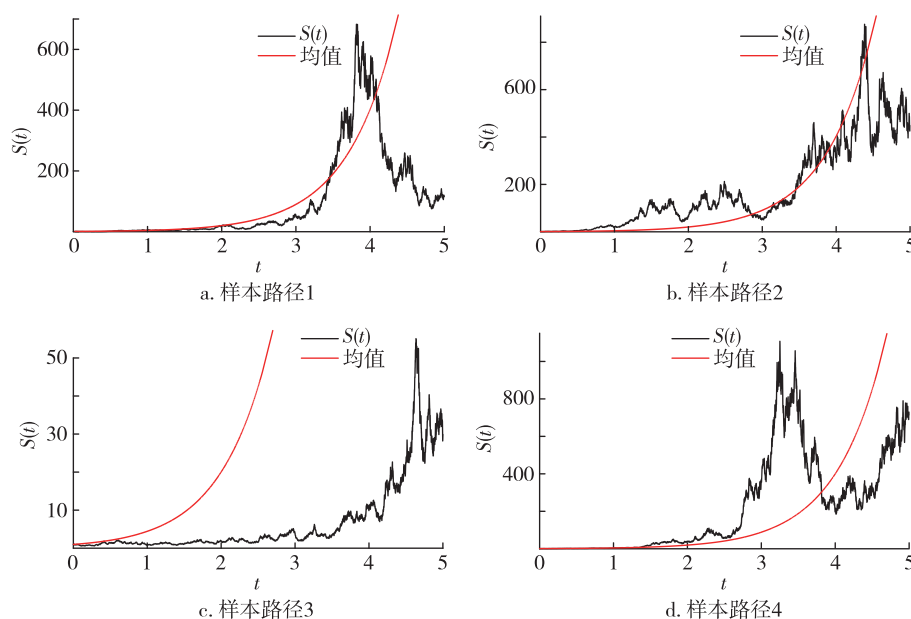


图 1 SDE(14)解的样本路径

Fig. 1 Sample paths of the solution to the SDE (14)

```

+S[1]=S0
+x[1]=S0
+for (i in 2:M) N=rnorm(1)
+S[i]=S[i-1] * exp((a-0.5 * b^2) * Dt+b * sqrt(Dt) *
N)
+x[i]=x[i-1] * (1+a * Dt+b * sqrt(Dt) * N)
+}
+plot(t,S,pch=".",type="l",col="red",xlab="t",
ylab="S(t) or x(t)")
+lines(t,x,pch=".",type="l",col="blue")
+legend("topright",c("true soln","EM soln"),lty=1,
col=c("red","blue"))

```

**实例3 对线性 SDE**

$$dS(t) = 1.5S(t)dt + S(t)dB(t), \quad (16)$$

且  $S(0) = 1$ , 在 R 中输入

```

> par(mfcol=c(2,2))
> EMforlsde(1,0.001,5000,1.5,1)
> EMforlsde(1,0.001,5000,1.5,1)
> EMforlsde(1,0.001,5000,1.5,1)
> EMforlsde(1,0.001,5000,1.5,1)

```

可以获得 4 条比较的样本路径,如图 2 所示(红色的线表示真实解,而黑色的线表示 EM 数值解).显然 EM 数值解与真实解完美地吻合.可是理论上是如何确定这种完美吻合的?要回答这个问题,必须研究

随机微分方程的数值解.

**5 数值方法**

本章利用 EM 方法来演绎 Monte Carlo 模拟.EM 方法是获得 SDEs 近似解的最有用的数值格式之一.鉴于利用 R 进行 Monte Carlo 模拟是本系列论文研究的关键问题之一,随机微分方程数值解的研究是近些年来非常热门的课题之一,因此首先回顾随机微分方程数值解的发展历程.

金融领域中大多数 SDE 模型是非线性的,例如, CIR 模型和  $\theta$  过程<sup>[8,11,13,15]</sup>.一般的 SDE 具有如下形式:

$$dy(t) = f(y(t))dt + g(y(t))dB(t), \quad t \geq 0, \quad (17)$$

满足初值条件  $y(0) = y_0 \in \mathbf{R}^n$ , 其中  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times m}$ , 且  $B(t)$  是  $m$  维布朗运动.给定步长  $\Delta > 0$ , 利用 EM 方法得到式(17)解的近似值  $X_k \approx y(t_k)$ , 其中  $t_k = k\Delta$ , 令  $X_0 = y_0$ , 且

$$X_{k+1} = X_k + f(X_k)\Delta + g(X_k)\Delta B_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (18)$$

其中  $\Delta B_k = B(t_{k+1}) - B(t_k)$ . 2 个连续意义下的近似解分别定义为

$$X(t) := X_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (19)$$

和

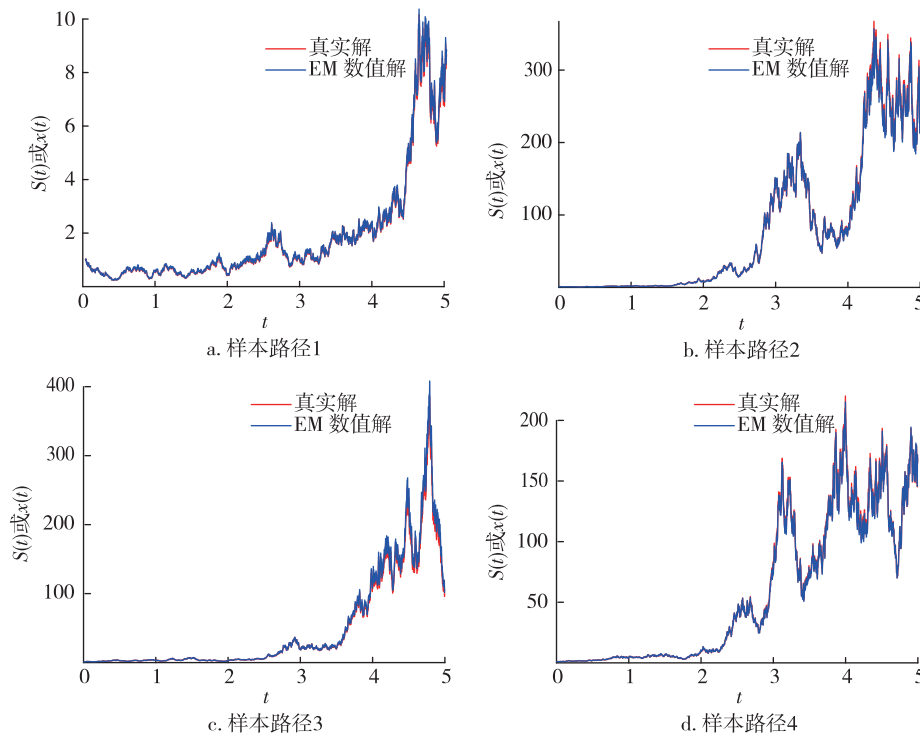


图2 真实解与 EM 数值解的样本路径  
Fig. 2 The true and EM sample pathes

$$\bar{X}(t) := X_0 + \int_0^t f(X(s)) ds + \int_0^t g(X(s)) dB(s). \quad (20)$$

式(18)的定义解释了式(15).注意到  $X(t_k) = \bar{X}(t_k) = X_k$ , 即  $X(t)$  和  $\bar{X}(t)$  在节点上与离散的近似解的值相同.因此可以认为  $X(t)$  和  $\bar{X}(t)$  是离散的近似解  $\{X_k\}$  的连续延拓.近似解收敛到真实解的重要原则之一是强收敛原则,即在

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} E \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{X}(t) - y(t)|^2 \right) = 0, \quad \forall T > 0 \quad (21)$$

意义下的收敛.这是在上确界模意义下的收敛,它被用于障碍期权的研究中.显然,由式(21)很容易得到离散近似的收敛性

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} E \left( \sup_{0 \leq k \leq T/\Delta} |X_k - y(t_k)|^2 \right) = 0. \quad (22)$$

除了强收敛,还有其他的收敛原则,譬如依概率收敛<sup>[16-17]</sup>和几乎处处收敛<sup>[18]</sup>.当前,最热点的问题之一是研究当  $f$  和  $g$  不满足全局 Lipschitz 条件时,数值解是否强收敛.

直到 2002 年之前,大多数关于数值方法强收敛的结论总是要求  $f$  和  $g$  是全局 Lipschitz 的<sup>[13,19]</sup>,即  $|f(x) - f(y)| \vee |g(x) - g(y)| \leq K|x - y|, \forall x, y \in \mathbf{R}^n$ . (23) 在此条件下,可以证明数值解以  $1/2$  阶收敛到真实解,即

$$E \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{X}(t) - y(t)|^2 \right) = O(\Delta), \quad \forall T > 0. \quad (24)$$

该结果保证了前文的 Monte Carlo 模拟时数值解和真实解之间的完美吻合.然而,在金融领域乃至自然科学和工业的很多分支领域中,很多 SDE 模型并不满足全局 Lipschitz 条件,例如,后面要研究的 CIR 模型和  $\theta$  过程.

2002 年,Higham 等<sup>[20]</sup>发表了一篇非常有影响力的论文,它开辟了 SDEs 数值解研究的新篇章,研究了当  $f$  和  $g$  仅满足局部 Lipschitz 条件,即对所有  $x, y \in \mathbf{R}^n$ ,且  $|x| \vee |y| \leq j, j \geq 1$ , 都有

$$|f(x) - f(y)| \vee |g(x) - g(y)| \leq K_j |x - y|, \quad (25)$$

其中  $K_j$  是关于  $j$  的递增数列,且当  $j \rightarrow \infty$  时,有  $K_j \rightarrow \infty$ .显然,局部 Lipschitz 条件不能保证全局解的存在性.保证全局解存在的另一个令人熟知的条件是线性增长条件<sup>[12,14,21]</sup>,即对所有的  $x \in \mathbf{R}^n$ ,有

$$|f(x)| \vee |g(x)| \leq K(1 + |x|), \quad (26)$$

其中  $K$  是一个正常数;或者更一般的, Khasminskii 型条件也可以作为另一个保证全局解存在的条件<sup>[22-23]</sup>.Khasminskii 型条件仍然被发展着,请读者参阅近期的文献<sup>[24]</sup>.代替以上熟知的条件,Higham 等<sup>[20]</sup>提出了以下条件:

**假设 1** 对某个  $p > 2$ ,

$$E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{X}(t)|^p \right] \vee E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |y(t)|^p \right] < \infty, \quad \forall T > 0. \quad (27)$$

这个假设意味着对某个  $p > 2$ ,数值解和真实解的  $p$  阶矩都是有限的.文献<sup>[20]</sup>的主要结论见下述定理.

**定理 3** 假设局部 Lipschitz 条件(25)和假设 1 均成立,则对任意  $T > 0$ ,在连续延拓(20)意义下的 EM 数值解(18)满足

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{X}(t) - y(t)|^2 \right] = 0. \quad (28)$$

定理 3 将强收敛问题转换为在局部 Lipschitz 条件下验证真实解和数值解的  $p$  阶矩有界性问题.文献<sup>[13]</sup>证明了在线性增长条件(26)下,真实解和 EM 数值解满足假设 1.利用定理 3,可以知道在局部 Lipschitz 条件(25)和线性增长条件(26)成立的前提下,EM 数值解强收敛到真实解.由于这 2 个条件是保证 SDEs 全局唯一解存在的经典条件,在实际领域中有很多 SDEs 满足它们,因此定理 3 在实际中具有广泛的应用.

更加值得强调的是定理 3 不依赖于数值格式的选取,它不仅对 EM 方法成立,对其他满足假设 1 的数值方法都成立.为了说明这点,定义 3 种有用的隐式数值方法:

**定义 2** 令  $Y_0 = y_0$ , 且

$$Y_k^* = Y_k + f(Y_k^*) \Delta, \quad (29)$$

$$Y_{k+1} = Y_k^* + g(Y_k^*) \Delta B_k, \quad (30)$$

这就定义了分离倒向 Euler(SSBE)方法.

**定义 3** 令  $Z_0 = y_0$ , 且

$$Z_{k+1} = Z_k + f(Z_{k+1}) \Delta + g(Z_k) \Delta B_k, \quad (31)$$

这就定义了倒向 Euler(BE)方法.

**定义 4** 令  $U_0 = y_0$ , 且

$$U_{k+1} = U_k + [(1-\theta)f(U_k) + \theta f(U_{k+1})] \Delta + g(U_k) \Delta B_k, \quad (32)$$

其中  $\theta \in [0, 1]$  是一个预先给定的自由参数,这就定义了随机  $\theta$  方法.

当然还有其他的数值方法,譬如 Milstein 方法<sup>[25]</sup>,留给读者自行研究.注意到当  $\theta = 0$  时,随机  $\theta$  方法退化为 EM 方法;当  $\theta = 1$  时,随机  $\theta$  方法退化为 BE 方法.因此随机  $\theta$  方法综合了 EM 方法和 BE 方法,其中自由参数  $\theta$  的选取对平衡 EM 和 BE 方法利弊起到至关重要的作用.

对这 3 种数值方法定义的离散时间解进行连续时间延拓,可以得到连续时间的数值解,分别记为



$\bar{Y}(t)$ ,  $\bar{Z}(t)$  和  $\bar{U}(t)$  (具体细节参见文献[20,26-27]).

**定理4** 假设局部 Lipschitz 条件(25)成立.若真实解和以上3种方法中任意一种定义的连续时间数值解满足假设1(即分别用  $\bar{Y}(t)$ ,  $\bar{Z}(t)$  或  $\bar{U}(t)$  替换  $\bar{X}(t)$ ), 则

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |\bar{V}(t) - y(t)|^2 \right] = 0, \quad \forall T > 0, \quad (33)$$

其中  $\bar{V}(t)$  代表  $\bar{Y}(t)$ ,  $\bar{Z}(t)$  或  $\bar{U}(t)$ .

以上3种数值方法均是隐式方法,即对每一给定时间步长,都对应了一个需要求解的隐式方程.例如,对 SSBE 方法,为了得到  $Y_k^*$  必须求解的隐式方程(29).获得  $Y_k^*$  后,添加适当的随机片段  $g(Y_k^*) \Delta B_k$ , 利用式(30)就得到了下一个  $Y_{k+1}$ . 为了保证这些数值方法被很好地定义(即对每个给定步长隐式方程可解),需要添加额外的条件,最常用的条件是关于  $f$  的单边 Lipschitz 条件,即:

**假设2** 假设  $f$  是  $C^1$  的,且存在常数  $\mu > 0$  使得

$$\langle x - y, f(x) - f(y) \rangle \leq \mu |x - y|^2, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n \quad (34)$$

成立.

如果假设2成立,通过压缩映射定理不难验证只要步长  $\Delta$  充分小,以上3种隐式方法都是定义好的.进一步,以下结论成立:

**定理5** 假设  $f$  满足假设2,  $g$  满足全局 Lipschitz 条件(23),则真实解和任意一种隐式方法定义的连续时间数值解满足假设1,且收敛结论(33)成立.

定理3和4要求真实解和数值解的  $p$  阶矩的有界性.关于真实解的  $p$  阶矩的有界性已经有很多很好的工作<sup>[13-14,21]</sup>,然而,很难验证关于数值解的  $p$  阶矩的有界性,譬如 EM 方法的数值解不一定是有限的(参见文献[28]中的反例).在过去的10年,受文献[20]的影响,许多论文致力于研究数值解的有界性并建立收敛理论.在后续连载论文中,将研究更多金融领域中的 SDE 模型并进行更多关于数值方法的讨论.

## 参考文献

### References

[1] 毛学荣,李晓月.金融领域的随机建模与基于软件 R 的 Monte Carlo 模拟(2):Cox-Ross-Rubinstein 模型[J].南京信息工程大学学报:自然科学版,2015,7(2):125-132  
MAO Xuerong, LI Xiaoyue. Stochastic modelling in finance and Monte Carlo simulations with R. Part B: Cox-Ross-Rubinstein model[J]. Journal of Nanjing University of Information Science & Technology: Natural Science Edition, 2015, 7(2): 125-132

[2] 毛学荣,李晓月.金融领域的随机建模与基于软件 R 的 Monte Carlo 模拟(3):随机对数线性模型[J].南京信息工程大学学报:自然科学版,2015,7(3):214-220  
MAO Xuerong, LI Xiaoyue. Stochastic modelling in finance and Monte Carlo simulations with R. Part C: Stochastic log-linear model[J]. Journal of Nanjing University of Information Science & Technology: Natural Science Edition, 2015, 7(3): 214-220

[3] Cox J C, Ross S A, Rubinstein M. Option pricing: A simplified approach [J]. Journal of Financial Economics, 1979, 7(3): 229-263

[4] Korn R, Korn E. Option pricing and portfolio optimization: Modern methods of financial mathematics [M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 2001

[5] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities [J]. The Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637-654

[6] Merton R C. Theory of rational option pricing [J]. The Bell Journal of Economics and Management Science, 1973, 4(1): 141-183

[7] Samuelson P A. Rational theory of warrant pricing [J]. Industrial Management Review, 1965, 6(2): 13-39

[8] Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. A theory of the term structure of interest rates [J]. Econometrica, 1985, 53(2): 385-407

[9] Etheridge A. A course in financial calculus [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002

[10] Higham D J. An introduction to financial option valuation [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004

[11] Tretyakov M V. Introductory course on financial mathematics [M]. London: Imperial College Press, 2013

[12] Karatzas I, Shreve S E. Brownian motion and stochastic calculus [M]. New York: Springer-Verlag, 1988

[13] Mao X R. Stochastic differential equations and applications [M]. 2nd Ed. Chichester: Horwood Publishing, 2007

[14] Mao X R, Yuan C G. Stochastic differential equations with Markovian switching [M]. London: Imperial College Press, 2006

[15] Lewis A L. Option valuation under stochastic volatility: With mathematica code [M]. Newport Beach, California: Finance Press, 2000

[16] Bernard P, Fleury G. Convergence of numerical schemes for stochastic differential equations [J]. Monte Carlo Methods and Applications, 2001, 7(1/2): 35-44

[17] Gyöngy I, Krylov N. Existence of strong solutions for Itô's stochastic equations via approximations [J]. Probability Theory Related Fields, 1996, 105(2): 143-158

[18] Gyöngy I. A note on Euler's approximations [J]. Potential Analysis, 1998, 8(3): 205-216

[19] Kloeden P E, Platen E. Numerical solution of stochastic differential equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1999

[20] Higham D J, Mao X R, Stuart A M. Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2002, 40(3): 1041-1063

[21] Mao X R. Stochastic differential equations and applications [M]. Chichester, UK: Horwood Publishing, 1997

- [22] Khasminskii R. Stochastic stability of differential equations [M]. Alphen; Sijthoff and Noordhoff, 1980
- [23] Mao X R. Numerical solutions of stochastic differential delay equations under the generalized Khasminskii-type conditions [J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217(12): 5512-5524
- [24] Song M H, Hu L J, Mao X R, et al. Khasminskii-type theorems for stochastic functional differential equations [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems- Series B, 2013, 18(6): 1697-1714
- [25] Milstein G N, Tretyakov M V. Stochastic numerics for mathematical physics [M]. Berlin; Springer-Verlag, 2004
- [26] Baduraliya C, Mao X R. The Euler-Maruyama approximation for the asset price in the mean-reverting-theta stochastic volatility model [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2012, 64(7): 2209-2223
- [27] Mao X R, Szpruch L. Strong convergence and stability of implicit numerical methods for stochastic differential equations with non-globally Lipschitz continuous coefficients [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2013, 238(1): 14-28
- [28] Higham D J, Mao X R, Stuart A M. Exponential mean-square stability of numerical solutions to stochastic differential equations [J]. LMS Journal of Computation and Mathematics, 2003, 6: 297-313

## Stochastic Modelling in Finance and Monte Carlo Simulations with R Part D: Stochastic Differential Equation Model

MAO Xuerong<sup>1</sup> LI Xiaoyue<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Mathematics and Statistics, University of Strathclyde, Glasgow, G1 1XT, Scotland, UK

<sup>2</sup> School of Mathematics and Statistics, Northeast Normal University, Changchun 130024

**Abstract** The key aim of this serial is to study various stochastic models in finance with emphasis on the Monte Carlo simulations with R for these models. In this paper, we will study the linear stochastic differential equation (SDE) model for the asset price. We will define the Itô calculus and establish the Itô formula. Moreover, as the Monte Carlo simulations with R is our key topic in this serial, we will review the developments of numerical solutions in order to highlight this very popular area in the study of SDEs.

**Key words** Monte Carlo simulations; Euler-Maruyama method; Backward Euler method; Split-Step Backward Euler method; stochastic Theta method