



金融领域的随机建模与基于软件 R 的 Monte Carlo 模拟(3):随机对数线性模型

摘要

主要研究了随机对数线性(SLL)模型以及如何基于 SLL 模型计算欧式期权平均收益.此外,还演绎了资产价格的 Monte Carlo 模拟.

关键词

SLL 模型; Monte Carlo 模拟; 欧式期权; 平均收益

中图分类号 F830;O211

文献标志码 A

0 引言

文献[1]讨论了离散时间的 CRR 模型^[2],它仅用到了二项分布的理论.本文将讨论连续时间模型.大多数连续时间模型包括几何布朗运动模型都要用到有难度的 Itô 公式^[3-5],然而随机对数线性模型(简称为 SLL 模型)是一个特例,它的建立仅用到基本的正态分布理论^[5-8].为了令读者更容易理解连续时间模型,首先介绍 SLL 模型.

1 银行存款账户

由于 SLL 模型建立的灵感来自于银行存款账户,因此先回顾一下银行存款利率以及相应的微分方程模型.

1.1 离散和连续时间利率

银行存款账户一般按年计息.令年利率为 r_a ,如果今天存入 S_0 (即 0 时刻),1 年后将得到 $S_0(1+r_a)$.经常也采用复利月利率甚至天利率计息.如果令 r_{12} 和 r_{365} 分别代表月利率和天利率,则 $(1+r_{12})^{12} = (1+r_{365})^{365} = 1+r_a$.

现在考虑连续时间付息的情形.令 r 是连续的复利率,假设你在 0 时刻存入 S_0 .为了计算连续时间下 t 时刻存款账户余额,对一个充分大的整数 n ,考虑 i/n 时刻复利利息为 $rt/n, i=1, \dots, n$,则 t 时刻银行账户有存款 $S_0 \left(1 + \frac{rt}{n}\right)^n$.令 $n \rightarrow \infty$,故 t 时刻账户有存款 $S(t) = S_0 e^{rt}$.为了说明 r 和 r_a 之间关系,注意到 $S(1) = S_0 e^r = S_0(1+r_a)$,这意味着

$$r = \log(1+r_a). \quad (1)$$

1.2 对数线性和常微分方程模型

注意到 $\log(S(t))$ 是 t 的线性函数,即 $\log(S(t)) = \log(S_0) + rt, t \geq 0$.换言之,存款账户价值符合对数线性模型(图 1).进一步, $S(t)$ 遵循以下线性常微分方程

$$\frac{dS(t)}{dt} = rS(t), \quad t \geq 0, \quad S(0) = S_0,$$

或积分方程

$$S(t) = S_0 + \int_0^t rS(u) du, \quad t \geq 0.$$

收稿日期 2014-09-13

资助项目 国家自然科学基金(11171056,11171081)

作者简介

毛学荣,男,博士,教授,研究方向为随机分析,随机微分方程理论及应用.

x.mao@strath.ac.uk

李晓月(通信作者),女,博士,教授,研究方向为随机微分方程理论及应用.

lixxy209@nenu.edu.cn

1 斯特莱斯克莱德大学 数学系,格拉斯哥, G1 1XT,英国

2 东北师范大学 数学与统计学院,长春,130024

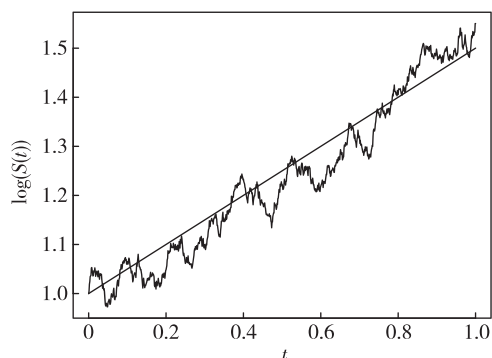


图1 随机对数线性模型

Fig.1 Stochastic log-linear model

2 股票价格的对数线性模型

考虑到股票价格类似于银行存款账户但又具有随机行为,更准确地,假设股票价格围绕内秉增长成分 b (具有确定的增长率) 波动.

为了理解随机部分的行为,可以回顾一下概率中连续值随机变量的基本概念^[9].但本文主要目的是引进免费统计软件 R 来进行连续随机变量的计算与仿真^[10].

2.1 连续值随机变量与统计软件 R

考虑取值于 \mathbf{R} 的连续随机变量.连续随机变量以密度函数为特征.假设 X 是一个连续随机变量,存在实值密度函数 f ,故

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (2)$$

为了使式(2)有意义,要求对所有 $x, f(x) \geq 0$ (不允许负概率),且 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ (全概率为1).用 $E(X)$

表示 X 的期望,定义为 $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$.注意到有些情况下期望是没有定义的,因为广义积分不存在.这里,只要提到 E ,总是假设广义积分存在.

和离散情况一样,定义方差为 $\text{var}(X) = E((X - E(X))^2)$.和离散情况一样,对连续随机变量的基本等式

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad (3)$$

仍然成立.

密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (4)$$

的随机变量 X 被称为具有 $[a, b]$ 上均匀分布的随机变量,记为 $X \sim U[a, b]$.它具有期望

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

具有密度函数

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

的连续随机变量 X ,其中 $\lambda > 0$,被称为具有参数为 λ 的指数分布的随机变量,期望 $E(X) = 1/\lambda$.

设 h 是关于连续随机变量 X 的函数,则以下关于期望的有用结论成立:

$$E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x) dx. \quad (5)$$

对2个独立的随机变量 X 和 Y ,合理的解释是 X 的取值不依赖于 Y 的取值.独立性的标准定义仍需要一些背景知识,这里给出它的一个等价条件,即对所有函数 $g, h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,有

$$E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)).$$

特别地,将 g 和 h 取为恒等函数,下式成立:

$$X \text{ 和 } Y \text{ 独立} \rightarrow E(XY) = E(X)E(Y), \quad (6)$$

同时, $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$.注意到当 X 和 Y 不独立时, $E(XY) = E(X)E(Y)$ 一般不成立.例如, X 具有指数分布, $Y = X$,但 $E(X^2) \neq (E(X))^2$.

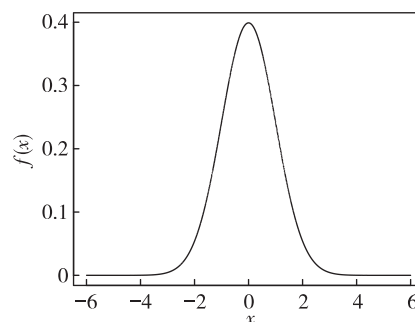


图2 服从 $N(0,1)$ 随机变量的密度函数

Fig.2 Density function for the $N(0,1)$ random variable

这里要用到的一类最重要的随机变量为标准正态随机变量,它的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \quad (7)$$

它的曲线是钟形的.对这类随机变量,有 $E(X) = 0$, $\text{var}(X) = 1$.因此,用 $N(0,1)$ 表示这类随机变量 (N 代表正态,0 是期望,1 是方差).一般地, $N(\mu, \sigma^2)$ 代表的随机变量具有密度函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (8)$$

期望是 μ ,方差是 σ^2 .若随机变量 X 是 $N(\mu, \sigma^2)$ 的,

则 $(X - \mu)/\sigma$ 是 $N(0,1)$ 的.

正态随机变量具有如下性质:若 X_1 和 X_2 是独立的正态随机变量,期望分别为 μ_1 和 μ_2 ,方差分别为 σ_1^2 和 σ_2^2 ,则 $X_1 + X_2$ 是期望为 $\mu_1 + \mu_2$ 、方差为 $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ 的正态随机变量.

概率论中的一个非常基本、漂亮、深刻的结论是中心极限定理,粗略地说,就是独立同分布的随机变量的和是正态的.更加精确地,令 X_1, X_2, X_3, \dots 是独立同分布的随机变量,期望是 μ ,方差是 σ^2 ,令 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$,则由中心极限定理可知,对充分大的 n, S_n 为接近 $N(n\mu, n\sigma^2)$ 的随机变量.换句话说, $(S_n - n\mu)/(\sigma\sqrt{n})$ 接近 $N(0,1)$.因此,对任意 x ,有

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \rightarrow \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy, \quad n \rightarrow \infty.$$

非常值得庆幸的是 R 软件可以很容易模拟概率分布^[10].文献[1]利用它模拟了二项分布,本文将继续利用它进行更多的模拟.

利用命令“runif(N, a, b)”模拟具有均匀分布的 N 个随机数.例如:

```
runif(5, 1, 2)
[1] 1.380312 1.185813 1.920874 1.012334 1.785774
```

令 a 和 b 分别为 0 和 1,可以利用简单的命令

```
runif(5)
[ 1 ] 0.08252643 0.27527076 0.91603340
```

0.92391817 0.88233594

模拟 5 个 $U[0,1]$ 的随机数.对于一个 $N(0,1)$ 的随机变量 X ,可以通过

```
pnorm(1.96)
[1] 0.9750021
```

得到它的概率 $P(X \leq 1.96)$.取自于 $N(0,1)$ 的 6 个随机数可以利用

```
rmnorm(6)
[1] -1.4739238 -2.0780982 -0.7182829 -0.2055645 -1.6394149 1.9941303
```

模拟.类似地,对非标准 $N(1,3^2)$ 的随机变量 Y ,可以利用

```
pnorm(2, 1, 3)
[1] 0.6305587
```

得到概率 $P(Y \leq 2)$,且通过

```
rmnorm(6, 1, 3)
[ 1 ] 2.8877009 2.1022136 6.8263240 -2.5385625
```

2.9306919 0.7960438

得到取自 $N(1,3^2)$ 的 6 个随机数.

为了测试 runif 和 rmnorm,进一步地,取 M 个样本 $\{\xi_i\}_{i=1}^M$,计算样本均值 $\mu_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \xi_i$ 和样本方差 $\sigma_M^2 =$

$\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (\xi_i - \mu_M)^2$.这也可以通过 R 软件做到,例如,通过

```
x <-runif(M)
mean(x)
var(x)
```

可以实现这一过程.

M	1 000	10 000	100 000
μ_M	0.514 057 4	0.496 630 9	6.71
σ_M^2	0.078 821 23	0.084 158 5	0.083 491 69

可见随着 M 的增加,对 runif 样本期望和方差越来越接近 $[0,1]$ 上均匀分布的期望 0.5 和方差 $1/12 = 0.0833$.类似地,对 rmnorm 样本期望和方差越来越接近收敛于 0 和 1.

M	1 000	10 000	100 000
μ_M	-0.030 785 22	0.002 450 75	-0.003 363 467
σ_M^2	0.983 920 5	1.022 87	1.002 46

为了验证中心极限定理,利用 runif 命令生成 $[0,1]$ 均匀分布样本 $\{\xi_i\}_{i=1}^n$,其中 $n = 10^4$.接下来,

给出样本组合的形式 $X = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$,其中 $\mu = 1/2$,

且 $\sigma = 1/\sqrt{12}$.重复这一过程 $M = 10^3$ 次,得到柱状图,如图 3 所示.由图 3 可见,尽管每个 ξ_i 不是正态随机变量,但它们和的组合 $\left(\sum_{i=1}^n \xi_i - n\mu\right)/(\sigma\sqrt{n})$ 是标准正态的.为此,设计 R- 函数 CLT:

```
CLT <-function(n, M) {
  \#input n, M
  X <-c(rep(0, M))
  for (i in 1:M) {
    y<-runif(n)
    X[i] = (sum(y) - 0.5 * n)/sqrt(n/12) }
  par(mfcol=c(1,2))
  hist(X)
  hist(rnorm(M), main="Histogram of N(0,1) ") }
```

在 R 程序中输入 CLT(10 000, 1 000) 就得到了图 3.

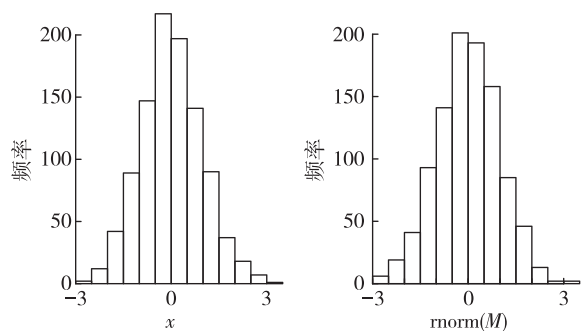


图3 中心极限定理的解释

Fig. 3 Illustration of the Central Limit Theorem

2.2 随机对数线性模型

受存款账户的对数线性模型启发,假设股票的价格服从以下随机对数线性模型:

$$\log(S(t)) = \log(S_0) + bt + \text{随机项}.$$

这里“随机项”被假设为

- 1) 没有固定趋势,即 $E(\text{随机项}) = 0$;
- 2) 依赖于时间;
- 3) 代表在 $[0, t]$ 上 $\log(S(t))$ 与 $\log(S_0) + bt$ 偏差的和;
- 4) 具有独立增量性,即对任意的 $0 < t_1 < t_2$, “随机项”在区间 $(t_1, t_2]$ 上的值与 $[0, t_1]$ 上的值独立.

如果进一步假设与 $\log(S_0) + bt$ 的偏差是很多类似独立偏差的和,根据中心极限定理有

$$\text{随机项} \sim N(0, \sigma^2 t).$$

令

$$Y(t) := \log(S(t)) - \log(S_0) - bt, \quad (9)$$

则

$$Y(t) \sim N(0, \sigma^2 t),$$

$$Y(t_2) - Y(t_1) \text{ 与 } Y(t_1) \text{ 独立, 且 } Y(t_2) - Y(t_1) \sim N(0, \sigma^2(t_2 - t_1)).$$

2.3 布朗运动

1827年,苏格兰植物学家罗伯特·布朗在观察花粉在水中扩散时,将花粉颗粒的无规则运动命名为布朗运动.这种运动后来被解释为水中分子的随机碰撞.为了描述这种运动,数学上很自然地利用随机过程 $B(t)$ 的定义解释 t 时刻花粉颗粒的位置.现在给出布朗运动的严格数学定义^[11-13]

定义1 假设 $B(t), t \geq 0$ 是一个实值连续随机过程,且 $B(0) = 0, B(t) \sim N(0, t)$, 对任意的 $0 \leq t_1 < t_2 < t_3, B(t_2) - B(t_1)$ 和 $B(t_3) - B(t_2)$ 独立.则称 $B(t)$ 是一个(标准)一维布朗运动.

对某个 $T > 0$,有时候也会提到 $t \in [0, T]$ 上的布朗运动,其定义显然.布朗运动可以被看成很多独立正态分布的和.例如,为了得到 $[0, 1]$ 区间上布朗运动的样本路径,可以令 N 是很大的数,比如 1 000, 令 $\{\xi_i\}_{i=1}^N$ 是 $N(0, 1/N)$ 的独立同分布随机变量, $B(0) = 0$, 则 $B(i/N) = \sum_{j=1}^i \xi_j, 1 \leq j \leq N$ 形成了一个离散时间的布朗运动.基于以上理论,设计了 R-函数 BM:

```
> BM <-function() {
+ t <- 1:1000
+ t <- t * 0.001
+ y <- c(-3, 3, rep(0, times = 998))
+ colors <- c("red", "blue", "yellow", "pink", "green", "black")
+ plot(t, y, type = "n", xlab = "t", ylab = "B(t)")
+ x <- numeric()
+ x[1] = 0
+ for (j in 1:6) {
+ for (i in 2:1000) x[i] = x[i-1] + sqrt(0.001) * rnorm(1)
+ lines(t, x, pch = ".", type = "l", col = colors[j]) } }
```

在 R 程序中输入“> BM()”就可以得到布朗运动的 6 条样本路径,如图 4 所示.

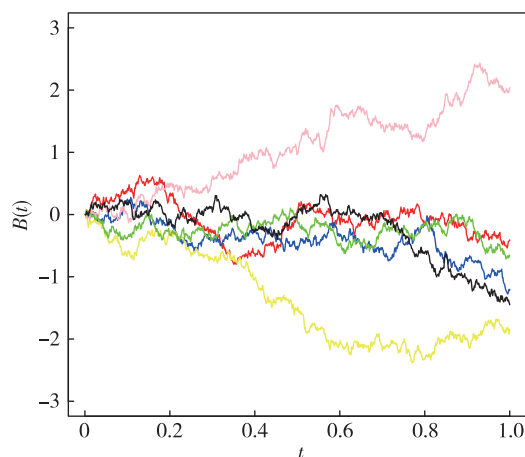


图4 布朗运动的样本路径

Fig. 4 Sample paths of a Brownian motion

布朗运动的一些重要性质如下:

- 1) $\{-B(t)\}$ 是一个布朗运动;

- 2) 对 $c > 0$, 定义 $X(t) = \frac{B(ct)}{\sqrt{c}}, t \geq 0$, 则 $\{X(t)\}$

仍是一个布朗运动;

3) 强大数定律表示为 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B(t)}{t} = 0, a.s;$

4) 几乎每条布朗运动的样本路径都是无处可微的;

5) 几乎每条布朗运动的样本路径都没有有限变差.

按照布朗运动的定义,可以将式(9) 写为 $Y(t) = \sigma B(t)$, 由此随机的对数线性(SLL) 模型有如下形式:

$$\log(S(t)) = \log(S_0) + bt + \sigma B(t) \quad (10)$$

或

$$S(t) = S_0 \exp(bt + \sigma B(t)). \quad (11)$$

2.4 R-模拟

可以利用 R 软件模拟 SLL 模型的样本路径. 例如, 考虑 SLL 模型

$$S(t) = \exp(0.5t + 0.2B(t)), \quad 0 \leq t \leq 5. \quad (12)$$

利用 R-程序

```
> S0 = exp(1)
> b = 0.5
> sigma = 0.2
> N = 5000
> dt = 0.001
> SLLM <- function()
+ x <- numeric()
+ x[1] = log(S0)
+ for (i in 2:(N+1)) {
+ x[i] = x[i-1] + b * dt + sigma * sqrt(dt) * rnorm(1)
+ x}
> t <- 0:N
> t <- t * dt
> y <- c(2, 60, rep(3, times = N-1))
> colors <- c("red", "blue", "yellow", "pink", "green", "black")
> plot(t, y, type = "n", xlab = "t", ylab = "S(t)")
> for (j in 1:6) {
+ S <- SLLM()
+ S <- exp(S)
+ lines(t, S, pch = ".", type = "l", col = colors[j])}
```

可以得到 SLL 模型的 6 条样本路径, 如图 5 所示.

3 平均收益

3.1 欧式看涨期权

给定 0 时刻资产价格 $S(0) = S_0$, 约定一份执行价格为 K , 期限为 T 的欧式看涨期权, 则执行期满时, 该份期权持有人的收益为 $(S(T) - K)^+ =$

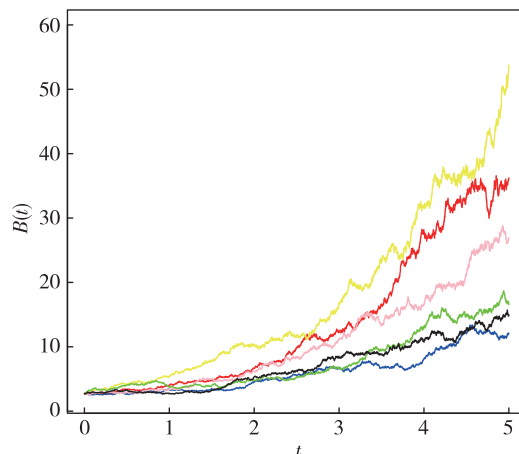


图 5 SLL 模型的样本路径

Fig. 5 Sample paths of an SLL model

$\max(S(T) - K, 0)$, 平均收益为看涨平均收益 = $E((S(T) - K)^+)$. 计算 $S(T) = S_0 \exp[bT + \sigma B(T)] = \exp(\hat{\mu} + \hat{\sigma}Z)$, 其中 $\hat{\mu} = \log(S_0) + bT$, $\hat{\sigma} = \sigma\sqrt{T}$, 且 $Z \sim N(0, 1)$.

注意到 $S(T) - K \geq 0$ 等价于 $Z \geq \frac{\log(K) - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$.

计算

$$E(S(T) - K)^+ = \int_{\frac{\log(K) - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}}^{\infty} (e^{\hat{\mu} + \hat{\sigma}z} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{\infty} e^{\hat{\mu} + \hat{\sigma}z - \frac{1}{2}z^2} dz - \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz,$$

其中

$$d_2 := -\frac{\log(K) - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} = \frac{\log(S_0/K) + bT}{\sigma\sqrt{T}}.$$

但

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz := N(d_2),$$

且

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{\infty} e^{\hat{\mu} + \hat{\sigma}z - \frac{1}{2}z^2} dz = e^{\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2} N(d_1),$$

其中 $d_1 = d_2 + \hat{\sigma}$. 故

$$E(S(T) - K)^+ = e^{\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2} N(d_1) - KN(d_2).$$

定理 1 如果资产价格变化符合 SLL 模型, 则欧式看涨期权的平均收益有显示表达式

$$\text{看涨平均收益} = S_0 \exp\left[\left(b + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right] N(d_1) - KN(d_2),$$

其中 $N(x)$ 是标准正态分布的概率分布函数, 即

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}z^2} dz,$$

而

$$d_1 = \frac{\log(S_0/K) + (b + \sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{\log(S_0/K) + bT}{\sigma\sqrt{T}}.$$

为了便捷,本文定义 R 中计算平均收益的函数为

```
>payoffcallSLLM <-function(S0,b,sigma,T,K) {
+#input S0-initial stock price
+#      b-growth rate
+#      sigma-standard deviation
+#      T-expiry date
+#      K-exercise price
+d1=(log(S0/K)+(b+sigma^2)*T)/(sigma*sqrt(T))
+d2=(log(S0/K)+b*T)/(sigma*sqrt(T))
+S0*exp((b+0.5*sigma^2)*T)*pnorm(d1)-K*
pnorm(d2)
```

实例 1 假设 $S_0 = 100, b = 0.05, \sigma = 0.02, T = 5, K = 115$. 在 R 中, 执行“> payoffcallSLLM(100, 0.05, 0.02, 5, 115)”就得到:

看涨平均收益 = 13.542 34.

为了验证公式, 写出 R 中 Monte Carlo 模拟程序如下:

```
> MCPayoffcallSLLM <-function(S0,b,sigma,T,K,size) {
+#input S0-initial stock price
+#      b-growth rate
+#      sigma-standard deviation
+#      T-expiry date
+#      K-exercise price
+#      size-sample size
+Z <-rnorm(size)
+ST <-S0*exp(b*T+sigma*sqrt(T)*Z)
+payoff <-ST-K
+payoff[payoff<0] <-0
+hist(payoff)
+mean(payoff) }
```

接下来输入“MCPayoffcallSLLM(100, 0.05, 0.02, 5, 115, 1000000)”它可以计算出均值收益为 13.544 89, 非常接近理论结果, 如图 6 所示.

3.2 欧式看跌期权

给定 0 时刻资产价格为 $S(0) = S_0$, 约定执行价格为 K , 期限为 T 的欧式看跌期权, 则期满时欧式看跌期权持有人的收益为

$$(K - S(T))^+ := \max(K - S(T), 0),$$

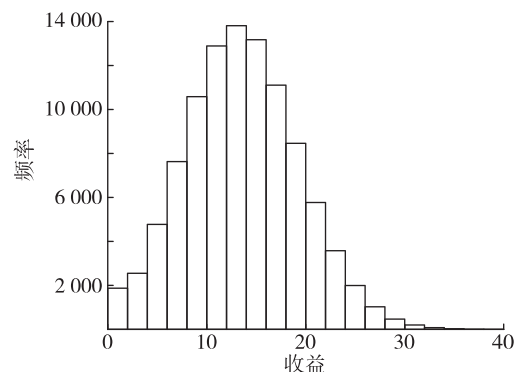


图 6 收益柱状图

Fig. 6 Histogram of the payoff

$$\text{看跌平均收益} = E(K - S(T))^+.$$

类似于看涨期权计算方法, 可以计算看跌期权的收益. 然而, 更好的方法是考虑投资组合: 0 时刻, 持有一份资产和一份看跌期权, 沽出一份看涨期权, 且看涨和看跌期权都有相同的执行价格 K 和期限 T . 期满时, 投资组合的收益为

$$S(T) + \max(K - S(T), 0) - \max(S(T) - K, 0),$$

化简得

$$S(T) + \max(K - S(T), 0) - \max(S(T) - K, 0) = K.$$

因此

$$E(S(T)) + \text{看跌平均收益} - \text{看涨平均收益} = K.$$

计算

$$E(S(T)) = E(S_0 \exp[bT + \sigma B(T)]) = E(S_0 \exp[bT + \sigma\sqrt{T}Z]),$$

利用标准正态分布的性质

$$E\left(\exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}Z\right]\right) = 1, \quad (14)$$

有

$$ES(T) = S_0 \exp\left[\left(b + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right].$$

因此

$$\text{看跌平均收益} = K + \text{看涨平均收益} - S_0 \exp\left[\left(b + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right].$$

定理 2 欧式看跌期权平均收益的显示公式为

$$\text{看跌平均收益} = KN(-d_2) -$$

$$S_0 N(-d_1) \exp\left[\left(b + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right],$$

其中 $N(x)$ 是标准正态分布的概率分布函数, 即

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}z^2} dz,$$

而

$$d_1 = \frac{\log(S_0/K) + (b + \sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{\log(S_0/K) + bT}{\sigma\sqrt{T}}.$$

参考文献

References

- [1] 毛学荣, 李晓月. 金融领域的随机建模与基于软件 R 的 Monte Carlo 模拟(2): Cox-Ross-Rubinstein 模型 [J]. 南京信息工程大学学报: 自然科学版, 2015, 7(2): 125-132
MAO Xuerong, LI Xiaoyue. Stochastic modelling in finance and Monte Carlo simulations with R. Part B: Cox-Ross-Rubinstein model [J]. Journal of Nanjing University of Information Science and Technology: Natural Science Edition, 2015, 7(2): 125-132
- [2] Cox J C, Ross S, Rubinstein M. Option pricing: A simplified approach [J]. J Financial Economics, 1979, 7(3): 229-263
- [3] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities [J]. The Journal of Political Economy, 1973: 81(3): 637-654
- [4] Merton R C. Theory of rational option pricing [J]. The Bell Journal of Economics and Management Science, 1973, 4(1): 141-183
- [5] Tretyakov M V. Introductory course on financial mathematics [M]. London: Imperial College Press, 2013
- [6] Etheridge A. A course in financial calculus [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002
- [7] Higham D J. An introduction to financial option valuation [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004
- [8] Korn R, Korn E. Option pricing and portfolio optimization: Modern methods of financial mathematics [M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 2001
- [9] Loève M. Probability theory [M]. 3rd Ed. Princeton, NJ: D Van Nostrand Company, 1963
- [10] Venables W N, Smith D M, the R Development Core Team. An introduction to R: A programming environment for data analysis and graphics [R]. Version 2. 10. 1, 2009
- [11] Karatzas I, Shreve S E. Brownian motion and stochastic calculus [M]. New York: Springer-Verlag, 1988
- [12] Mao X R. Stochastic differential equations and applications [M]. 2nd Ed. Chichester: Horwood Publishing, 2007
- [13] Mao X R, Yuan C. Stochastic differential equations with markovian switching [M]. London: Imperial College Press, 2006

Stochastic modelling in finance and Monte Carlo simulations with R Part C: Stochastic Log-linear model

MAO Xuerong¹ LI Xiaoyue²

¹ Department of Mathematics and Statistics, University of Strathclyde, Glasgow, G1 1XT, Scotland, UK

² School of Mathematics and Statistics, Northeast Normal University, Changchun 130024

Abstract The key aim of this serial articles is to study various stochastic models in finance with emphasise on the Monte Carlo simulations with R for these models. This paper investigates the stochastic Log-linear (SLL) model and obtains the mean payoff of European options. Moreover, this paper discusses how to perform Monte Carlo simulations on the asset price.

Key words the SLL model; Monte Carlo simulations; European options; the mean payoff