文章编号:1674-7070(2015)02-0189-04

任艳科[1]　胡良剑[1]

# 广义 Khasminskii 条件下非线性混杂随机时滞微分方程的解的存在唯一性

**摘要**

利用广义伊藤公式证明了混杂随机时滞微分方程(SDDE)在局部 Lipschitz 和广义 Khasminskii 条件下存在唯一解,从而涵盖了一大类非线性混杂 SDDE.最后给出实例说明了理论的可行性.

**关键词**

混杂随机时滞微分方程;马尔科夫链;广义 Khasminskii 条件;局部极大解;存在唯一性

**中图分类号** O175
**文献标志码** A

**收稿日期** 2014-01-06
**资助项目** 国家自然科学基金(11071037)

**作者简介**

任艳科,男,硕士生,研究方向为随机微分方程.cccbd998@foxmail.com

胡良剑(通信作者),男,教授,研究方向为随机微分方程.ljhu@dhu.edu.cn

1 东华大学 理学院,上海,201620

## 0 引言

目前,随机微分方程的解的存在唯一性分析的结果大多数是在全局 Lipschitz 条件和线性增长条件下取得的[1-2],然而,科学和工程中的很多随机微分方程模型的系数是高度非线性的.例如,金融工程中的很多随机微分方程,如著名的 CIR 模型、Henston 模型、Ait-Sahalia 模型等[3],都不具有充分好的漂移系数和扩散系数,不满足 Lipschitz 条件和线性增长条件.

马尔科夫切换型随机系统是近年来备受关注的一类混杂动态模型.这类模型中存在 2 种不同的随机性来源,其快速变化噪声影响用连续变化的布朗运动来刻画,而系统模式的突变用离散状态的马尔科夫链来表示.例如,研究证券市场在牛市和熊市不同状态下的走势情况,使得混杂随机微分方程有了广阔的应用空间.这类混杂随机微分方程(Hybrid SDE)表示为

$$\mathrm{d}x(t)=f(x(t),r(t))\mathrm{d}t+g(x(t),r(t))\mathrm{d}B(t),$$

其中,$B(t)$是布朗运动,$r(t)$是右连续马尔科夫链,且其独立于布朗运动 $B(t)$.这里“混杂”的意义是指系统状态 $x(t)$是连续的,而 $r(t)$是离散的.这类方程也称为“带马尔科夫切换的随机微分方程”.Mao 等[2]系统介绍了混杂随机微分方程,得到解的存在唯一性定理、轨道估计和矩估计以及方程零解的稳定性理论.

现实中很多系统的状态变化不但是非线性的,而且依赖于过去一段时间的状态,因此需要考虑非线性混杂随机时滞微分方程:

$$\mathrm{d}x(t)=f(x(t),x(t-\tau),r(t))\mathrm{d}t+g(x(t),x(t-\tau),r(t))\mathrm{d}B(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T,\tag{1}$$

其中,时滞 $\tau>0$ 是一个常数,$f:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times S\to\mathbf{R}^n$,$g:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times S\to\mathbf{R}^{n\times m}$,$S$ 为 $r(t)$的状态空间.

初始条件给定如下:

$$\{x(t):-\tau\leqslant t\leqslant 0\}=\xi\in C([-\tau,0],\mathbf{R}^n),\quad r(0)=h_0\in S.\tag{2}$$

注意到方程(1)的系数中不显式含有时间变量 $t$,这是考虑到现实系统中很少有关于时间变量的显示表达式.Mao 等[4]建立了一个随机时滞微分方程(SDDE)的 Khasminskii 型存在唯一性定理,其中线性增长条件被一个广义 Khasminskii 条件取代,使得该定理涵盖了一大

类非线性随机时滞微分方程.在 2013 年,文献[5]针对随机泛函微分方程建立了 Khasminskii 型存在唯一性定理.本文旨在广义 Khasminskii 条件下得到非线性混杂随机时滞微分方程(1)的存在唯一性定理.

## 1 预备知识

### 1.1 马尔科夫链

设$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0},P)$是一个完备概率空间,$\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$是其上的一个$\sigma$-域流,满足通常条件(即它是单调递增且右连续的,$\mathscr{F}_0$包含所有的$P$-零测集).令$\boldsymbol{B}(t)=(B_1(t),\cdots,B_m(t))^{\mathrm{T}}$是该完备概率空间上的一个$m$-维布朗运动.令$\{r(t),t\geqslant 0\}$是该概率空间上的一个右连续马尔科夫链,取值于有限状态空间$S=\{1,2,\cdots,N\}$,其转移速率矩阵$\boldsymbol{\Gamma}=(\gamma_{ij})_{N\times N}$给定如下:

$$P_{ij}(\Delta)=:P\{r(t+\Delta)=j\mid r(t)=i\}=\begin{cases}\gamma_{ij}\Delta+o(\Delta), & i\neq j,\\ 1+\gamma_{ij}\Delta+o(\Delta), & i=j,\end{cases}$$

其中$\Delta>0$.当$i\neq j$时,$\gamma_{ij}\geqslant 0$表示从状态$i$到状态$j$的转移速率,且有$\gamma_{ii}=-\sum_{j\neq i}\gamma_{ij}$,这里假定马尔科夫链$r(\cdot)$是$\mathscr{F}_t$-适应的,且独立于布朗运动$\boldsymbol{B}(\cdot)$.

### 1.2 广义伊藤公式

设$C^{2,1}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+\times S,\mathbf{R})$为定义在$\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+\times S$上的实值连续函数$V(x,t,h)$的全体,满足对任意的$h\in S$,其关于$x$二阶连续可导,关于$t$一阶连续可导.对给定的$V\in C^{2,1}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+\times S,\mathbf{R})$,定义算子$LV:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+\times S\to\mathbf{R}$,

$$LV(x,t,h)=V_t(x,t,h)+V_x(x,t,h)f(x,t,h)+\frac{1}{2}\mathrm{trace}[g(x,t,h)V_{xx}(x,t,h)g(x,t,h)]+\sum_{j=1}^{N}\gamma_{hj}V(x,t,j),\tag{3}$$

其中:

$$V_t(x,t,h)=\frac{\partial V(x,t,h)}{\partial t},$$

$$V_x(x,t,h)=\left(\frac{\partial V(x,t,h)}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial V(x,t,h)}{\partial x_n}\right),$$

$$V_{xx}(x,t,h)=\left(\frac{\partial^2 V(x,t,h)}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{n\times n}.$$

**引理 1**[2] 设$V\in C^{2,1}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+\times S,\mathbf{R})$,$\tau_1,\tau_2$是 2 个有界停时,满足$0\leqslant\tau_1\leqslant\tau_2$, a.s..若$V(x(t),t,r(t))$和$LV(x(t),t,r(t))$等在$t\in[\tau_1,\tau_2]$上以概率 1 有界,则

$$EV(x(\tau_2),\tau_2,r(\tau_2))=EV(x(\tau_1),\tau_1,r(\tau_1))+E\int_{\tau_1}^{\tau_2}LV(x(s),s,r(s))\mathrm{d}s.\tag{4}$$

### 1.3 极大局部解

设$\sigma_\infty$是一个停时,满足$0\leqslant\sigma_\infty\leqslant T$, a.s..$\{x(t):-\tau\leqslant t\leqslant\sigma_\infty\}$是一个$\mathbf{R}^n$值$\mathscr{F}_t$-适应的连续随机过程,若在$t\in[-\tau,0]$上$x(t)=\xi(t)$,存在一族非降停时列$\{\sigma_k\}_{k\geqslant 1}$满足$0\leqslant\sigma_k\uparrow\sigma_\infty$, a.s.,并且

$$x(t)=x(0)+\int_0^{t\wedge\sigma_k}f(x(s),x(s-\tau),r(s))\mathrm{d}s+\int_0^{t\wedge\sigma_k}g(x(s),x(s-\tau),r(s))\mathrm{d}B(s)\tag{5}$$

对任意$t\in[0,T]$和$k\geqslant 1$以概率成 1 成立,则称$\{x(t):-\tau\leqslant t\leqslant\sigma_\infty\}$为方程(1)的一个局部解.若进而$\limsup_{t\to\sigma_\infty}|x(t)|=\infty$,当$\sigma_\infty<T$时,则称它是一个极大局部解,$\sigma_\infty$称为爆炸时间.若任何其他的极大解$\{\bar{x}(t):-\tau\leqslant t\leqslant\bar{\sigma}_\infty\}$和它无差别,即在$-\tau\leqslant t\leqslant\sigma_\infty$上$x(t)=\bar{x}(t)$和$\sigma_\infty=\bar{\sigma}_\infty$都以概率 1 成立.

**引理 2**[2] 若局部 Lipschitz 条件成立,即对$\forall i\geqslant 1$,存在一个正常数$K_i$,使得

$$|f(x,y,h)-f(\bar{x},\bar{y},h)|^2\vee|g(x,y,h)-g(\bar{x},\bar{y},h)|^2\leqslant K_i(|x-\bar{x}|^2+|y-\bar{y}|^2)\tag{6}$$

对所有满足$|x|\vee|y|\vee|\bar{x}|\vee|\bar{y}|\leqslant i$的$x,y,\bar{x},\bar{y}\in\mathbf{R}^n$和任意的$h\in S$都成立,则方程(1)存在唯一极大局部解.

## 2 非线性混杂 SDDE 的 Khasminskii 型存在唯一性定理

首先给出 2 个假设条件.

**假设 1** (局部 Lipschitz 条件)对$\forall i\geqslant 1$,存在一个正常数$K_i$,使得

$$|f(x,y,h)-f(\bar{x},\bar{y},h)|^2\vee|g(x,y,h)-g(\bar{x},\bar{y},h)|^2\leqslant K_i(|x-\bar{x}|^2+|y-\bar{y}|^2)\tag{7}$$

对所有满足$|x|\vee|y|\vee|\bar{x}|\vee|\bar{y}|\leqslant i$的$x,y,\bar{x},\bar{y}\in\mathbf{R}^n$和任意的$h\in S$都成立.

令$C(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}_+)$为从$\mathbf{R}^n$到$\mathbf{R}_+$的连续函数的全体.令$C^2(\mathbf{R}^n\times S,\mathbf{R}_+)$为定义在$\mathbf{R}^n\times S$上的非负连续函数$V(x,h)$的全体,且满足对任意的$h\in S$,其关于$x$二阶连续可导.对给定的$V\in C^2(\mathbf{R}^n\times S,\mathbf{R}_+)$,定义函数$LV:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times S\to\mathbf{R}$.

$$LV(x,y,h)=V_x(x,h)f(x,y,h)+\frac{1}{2}\mathrm{trace}[g^{\mathrm{T}}(x,y,h)V_{xx}(x,h)g(x,y,h)]+$$

$$\sum_{j=1}^{N}\gamma_{hj}V(x,j),$$

其中

$$V_x(x,h)=\left(\frac{\partial V(x,h)}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial V(x,h)}{\partial x_n}\right),$$

$$V_{xx}(x,h)=\left(\frac{\partial^2 V(x,h)}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{n\times n}.$$

需要强调的是,$LV$ 定义在 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times S$ 上,而 $V$ 是定义在 $\mathbf{R}^n\times S$ 上的函数.

**假设 2** (广义 Khasminskii 条件)存在 2 个函数 $V\in C^2(\mathbf{R}^n\times S,\mathbf{R}_+)$ 和 $U\in C(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}_+)$,以及 3 个非负常数 $\lambda_j(1\leqslant j\leqslant 3)$ 满足 $\lambda_2>\lambda_3$,使得

$$\lim_{|x|\to\infty}(\inf_{h\in S}V(x,h))=\infty \tag{8}$$

和

$$LV(x,y,h)\leqslant\lambda_1-\lambda_2U(x)+\lambda_3U(y) \tag{9}$$

对任意的 $(x,y,h)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times S$ 都成立.

**定理 1** (Khasminskii 型定理)若假设 1 和假设 2 成立,则对任意的初始条件(2),混杂 SDDE(1)在 $t\in[-\tau,\infty)$ 上存在唯一解 $x(t)$,并且满足

$$\begin{cases}EV(x(t),h)<\infty,\\ E\int_0^t U(x(s))\mathrm{d}s<\infty,\quad\forall(t,h)\in\mathbf{R}_+\times S.\end{cases} \tag{10}$$

**证明** 由于混杂 SDDE(1)的系数是局部 Lipschitz 连续的,对任意给定的初始条件(2),方程在 $t\in[-\tau,\sigma_\infty)$ 上存在唯一的极大局部解 $x(t)$(见引理 2),其中 $\sigma_\infty$ 是爆炸时间.设 $i_0$ 是充分大的正整数,满足 $i_0\geqslant\|\xi\|=\max_{-\tau\leqslant t\leqslant 0}|x(t)|$.对任意的整数 $i\geqslant i_0$,定义停时

$$\tau_i=\inf\{t\in[0,\sigma_\infty):|x(t)|\geqslant i\},$$

其中约定 $\inf\varnothing=\infty$,显然 $\tau_i$ 随着 $i\to\infty$ 单调递增.令 $\tau_\infty=\lim_{i\to\infty}\tau_i$,则 $\tau_\infty\leqslant\sigma_\infty$.如果能够证明 $\tau_\infty=\infty$,则 $\sigma_\infty=\infty$,进而可得 $x(t)$ 是方程(1) 在 $t\in[-\tau,\infty)$ 上的唯一解.

利用广义伊藤公式(见引理 1)和条件(9),对任意的 $i\geqslant i_0$ 和 $t\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}&EV(x(\tau_i\wedge t),r(\tau_i\wedge t))-V(x(0),r(0))\leqslant\\&E\int_0^{\tau_i\wedge t}(\lambda_1-\lambda_2U(x(s))+\lambda_3U(x(s-\tau)))\,\mathrm{d}s\leqslant\\&\lambda_1 t-\lambda_2E\int_0^{\tau_i\wedge t}U(x(s))\mathrm{d}s+\\&\lambda_3E\int_0^{\tau_i\wedge t}U(x(s-\tau))\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{11}$$

又因为

$$E\int_0^{\tau_i\wedge t}U(x(s-\tau))\mathrm{d}s=E\int_{-\tau}^{\tau_i\wedge t-\tau}U(x(s))\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\int_{-\tau}^{0}U(x(s))\mathrm{d}s+E\int_0^{\tau_i\wedge t}U(x(s))\mathrm{d}s,$$

把上式代入(11)可得

$$\begin{aligned}&EV(x(\tau_i\wedge t),r(\tau_i\wedge t))\leqslant\\&C_1+\lambda_1t-(\lambda_2-\lambda_3)E\int_0^{\tau_i\wedge t}U(x(s))\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $C_1=V(x(0),r(0))+\lambda_3\int_{-\tau}^{0}U(x(s))\mathrm{d}s$.考虑到 $\lambda_2>\lambda_3$,得 $EV(x(\tau_i\wedge t),r(\tau_i\wedge t))\leqslant C_1+\lambda_1$.

定义 $v_i=\inf_{h\in S,|x|\geqslant i}V(x,h)$,则有

$$\begin{aligned}&EV(x(\tau_i\wedge t),r(\tau_i\wedge t))\geqslant\\&E(V(x(\tau_i\wedge t),r(\tau_i\wedge t))1_{\{\tau_i\leqslant t\}})\geqslant\\&v_iP(\tau_i\leqslant t),\end{aligned}$$

故有 $v_iP(\tau_i\leqslant t)\leqslant C_1+\lambda_1t$,又由条件(8),当 $i\to\infty$ 时 $v_i\to\infty$,因而令上述不等式中的 $i\to\infty$ 可得 $P(\tau_\infty\leqslant t)=0$,即 $P(\tau_\infty>t)=1$.由于 $t\geqslant 0$ 是任意的,故有 $P(\tau_\infty=\infty)=1$.

下面证明结论(10).由(12)可得

$$(\lambda_2-\lambda_3)E\int_0^{\tau_i\wedge t}U(x(s))\mathrm{d}s\leqslant C_1+\lambda_1t,$$

令 $i\to\infty$,得

$$E\int_0^tU(x(s))\mathrm{d}s\leqslant\frac{C_1+\lambda_1t}{\lambda_2-\lambda_3},$$

即为所求.

**推论 1** 若假设 1 和假设 2 成立,对任意的 $\varepsilon\in(0,1)$ 和 $T>0$,存在一个充分大的整数 $i^*$,依赖于 $\varepsilon$ 和 $T$,使得 $P(\tau_i\leqslant T)\leqslant\varepsilon,\forall i\geqslant i^*$,其中 $\tau_i$ 的定义见定理 1 的证明.

## 3 实例

考虑一维混杂 SDDE:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x(t)=&f(x(t),x(t-\tau),r(t))\mathrm{d}t+\\&g(x(t),x(t-\tau),r(t))\mathrm{d}B(t),\end{aligned} \tag{13}$$

其初始条件为 $\{x(t):-\tau\leqslant t\leqslant 0\}\in C([-\tau,0],\mathbf{R})$,其中 $B(t)$ 是一维布朗运动,$r(t)$ 是右连续马尔科夫链,状态空间为 $S=\{1,2\}$,其转移速率矩阵为 $\boldsymbol{\Gamma}=\begin{pmatrix}-1&1\\4&-4\end{pmatrix}$,另外,$f(x,y,1)=-2(x+x^3)$,$g(x,y,1)=y^2$,$f(x,y,2)=0.5x$,$g(x,y,2)=0.5y$,注意这里 $f(x,y,1)$ 和 $g(x,y,1)$ 不满足线性增长条件.显然,方程系数满足局部 Lipschitz 条件(7),因此,只需验证假设 2 成立.考虑 $V\in C^2(\mathbf{R}\times S,\mathbf{R}_+)$,

$$V(x,h)=\begin{cases}x^2,&h=1,\\2(x^2+x^4),&h=2,\end{cases}$$

对于 $x \in \mathbf{R}$,则算子 $LV:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times S\to\mathbf{R}$ 有如下形式:

$$LV(x,y,1) = -4x(x+x^3)+y^4-x^2+2(x^2+x^4) = -3x^2-2x^4+y^4$$

和

$$LV(x,y,2) = 2x^2+4x^4+(0.5+3x^2)y^2+4x^2-8(x^2+x^4) \leqslant -2x^2+0.5y^2-1.75x^4+y^4,$$

若令 $U(x)=x^2+x^4$ 对于 $x\in\mathbf{R}$,则有

$$LV(x,y,h) \leqslant \lambda_1-\lambda_2 U(x)+\lambda_3 U(y)$$

对 $h=1,2$ 成立,其中 $\lambda_1=0,\lambda_2=1.75$ 和 $\lambda_3=1$,所以满足假设 2,从而由定理 1 可知,非线性混杂 SDDE (13)存在唯一解.

## 参考文献
References

[1] Mao X R.Stochastic differential equations and their applications[M].Chichester:Horwood Publishing,1997
[2] Mao X R,Yuan C G.Stochastic differential equations with Markovian switching[M]. London: Imperial College Press,2006
[3] Ait-Sahalia Y.Testing continuous-time models of the spot interest rate[J]. Review of Financial Studies, 1996, 9(2):385-426
[4] Mao X R,Rassias M J.Khasminskii-type theorems for stochastic differential delay equations[J]. Stochastic Analysis and Applications,2005,23(5):1045-1069
[5] Song M H,Hu L J,Mao X R,et al.Khasminskii-type theorems for stochastic functional differential equations[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B, 2013,18(6):1697-1714
[6] Lu L J,Mao X R,Shen Y.Stability and boundedness of nonlinear hybrid stochastic differential delay equations[J].Systems & Control Letters,2013,62(2):178-187

# Existence and uniqueness of nonlinear hybrid stochastic differential delay equations under the generalized Khasminskii-Type conditions

REN Yanke[1] HU Liangjian[1]
1 Department of Applied Mathematics,Donghua Univerisity,Shanghai 201620

**Abstract** In this paper,by using the generalized It formula,a generalized existence-and-uniqueness theorem for hybrid stochastic differential delay equations(SDDEs) is established under the local Lipschitz condition and the generalized Khasminskii-type conditions.The generalized Khasminskii-type theorem covers a wide class of nonlinear hybrid SDDEs.Finally,an example is given to illustrate the application of the theory.

**Key words** hybrid SDDE;Markovian chain;generalized Khasminskii-type conditions;local maximum solution;existence and uniqueness