



# 基于内力的卫星编队飞行动力学建模

## 摘要

基于内力的卫星编队飞行凭借良好的性能正日益受到重视,但由于该类编队的控制力对卫星间的相对位置和相对姿态均高度敏感,并且控制力和控制力矩之间存在耦合,给动力学建模带来了很大的挑战.首先,建立了六自由度的内力编队姿轨耦合动力学模型,该动力学模型利用了控制力和控制力矩的耦合效应,可以同时针对编队卫星的相对位置和相应姿态设计相应的控制律,从而实现编队的六自由度协同控制.最后,通过采用伪谱法求解编队构型重构问题,对该动力学模型进行了验证.

## 关键词

内力编队卫星;姿轨耦合;六自由度;伪谱法

中图分类号 V412.4

文献标志码 A

## 0 引言

卫星编队<sup>[1]</sup>是由多颗卫星组成的系统,在围绕中心天体运动的同时,彼此形成特定的编队构形,在运动的过程中,卫星协同工作(包括星间通信、信息交互、姿态和轨道协同等),共同完成空间任务.近年来,光子激光推进器(PLP)、电磁推进和静电力(库伦力)控制等新概念推进器的出现,使得内力控制的卫星编队飞行<sup>[2]</sup>成为可能.

基于内力的编队飞行大多采用电磁力<sup>[3-4]</sup>、库伦力<sup>[5-6]</sup>等保守力实现卫星相对位置和相对姿态的控制,与传统的化学推进卫星相比,采用内力来控制卫星的质心运动具有无需消耗工质、延长任务寿命、无羽流污染、消除质心摆动、可实现控制力连续变化等优点.但由于内力编队飞行控制力的特性,其控制力和控制力矩耦合,对卫星间的相对位置和相对姿态均高度敏感,具有很强的非线性和不确定性,传统的编队动力学模型<sup>[7]</sup>和控制方法<sup>[8]</sup>不能适应这样的要求,无法适应姿轨联合控制的需求.本文将推导内力编队的姿轨耦合动力学模型,并采用伪谱法就内力编队的重构问题进行仿真,对该动力学模型进行验证.

## 1 相对轨道动力学建模

不同于常规的卫星编队,内力编队的控制力具有如下特点:

- 1) 对于内力编队,其控制力(如电磁力和库伦力)均为保守力,不能改变编队系统质心的运动,但可以改变单星的运动状态;
- 2) 控制力具有很强的非线性,这体现在控制力是卫星间相对状态的非线性函数,例如电磁力/库伦力与卫星相对距离的幂成反比;
- 3) 编队卫星的姿轨耦合效应主要体现在控制力和控制力矩之间的耦合作用,如切向的电磁力会引起电磁力矩的产生<sup>[9]</sup>、不经过质心的库伦力会产生附加力矩;
- 4) 在内力场作用下,编队系统内的各卫星也是耦合的,改变一颗卫星的控制量,将引起编队内所有卫星受力的变化,“牵一发而动全身”.

正是由于内力编队卫星中的控制力具有如此多的特性,因此有必要考虑姿轨耦合效应,建立六自由度的动力学模型,为内力编队卫星的姿轨联合控制奠定基础.

将内力编队卫星的相对轨道动力学方程写在常规定义的 Hill 坐

收稿日期 2014-10-28

资助项目 国家自然科学基金(11172235)

作者简介

陈晶,女,硕士生,研究方向为编队飞行动力学与控制.mirandacc9@sina.com

1 西北工业大学 航天学院,西安,710072

标系  $\mathcal{L}$  下. 设编队内从星  $i$  相对于主星  $c$  的位置矢量  $\mathbf{r}$  在 Hill 坐标系中的表达式为  $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$ , 相对控制加速度  $\mathbf{a}$  在 Hill 坐标系中的表达式为  $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]^T$ , 当不考虑轨道摄动时, 相对轨道动力学模型为<sup>[4]</sup>

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{A}_2 \mathbf{r} = \mathbf{a}, \quad (1)$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2\dot{\theta} & 0 \\ 2\dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -2\dot{\theta}^2 - 2\frac{\mu}{r_c^3} & -\dot{\theta}^2 & 0 \\ \dot{\theta} & -\dot{\theta}^2 + \frac{\mu}{r_c^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{r_c^3} \end{bmatrix},$$

其中  $\mu$  为地球引力常数,  $r_c$  为主星到地心的距离,  $\theta$  为主星的真近点角.

## 2 相对姿态动力学建模

由于控制力(如电磁力、不过质心的库仑力等)会引起附加力矩的产生, 这些附加力矩可以视为控制力矩的一部分, 但往往由于幅值有限, 因此还需辅助控制力矩陀螺(CMG)等姿态控制元件, 实现编队卫星间相对姿态的控制.

不考虑干扰力矩时, 主星  $c$  的姿态动力学模型为

$$\dot{\mathbf{q}}_c = \frac{1}{2} \mathbf{q}_c \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_c \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{I}_c \dot{\boldsymbol{\omega}}_c + \boldsymbol{\omega}_c \times (\mathbf{I}_c \boldsymbol{\omega}_c) = \mathbf{T}_{ec} + \mathbf{T}_{cc}, \quad (3)$$

其中  $\mathbf{q}_c = [\mathbf{q}_{c0}, \mathbf{q}_{cv}^T]^T$  是主星姿态四元数,  $\boldsymbol{\omega}_c$  是姿态角速度,  $\mathbf{I}_c$  是转动惯量矩阵,  $\mathbf{T}_{ec}$  为附加力矩,  $\mathbf{T}_{cc}$  为控制力矩陀螺系统的控制力矩,  $\otimes$  表示四元数乘法. 编队内第  $i$  个从星姿态动力学模型与式(2)、(3)类似, 下标标记为  $i$ .

从星本体系相对于主星本体系的姿态角速度  $\boldsymbol{\omega}_c$  定义如下, 所对应的姿态四元数即为  $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_v]$ :

$$\boldsymbol{\omega}_{ri} = \boldsymbol{\omega}_i - \mathbf{A}_{ic} \boldsymbol{\omega}_c, \quad (4)$$

其中  $\mathbf{A}_{ic}$  为主星本体系到从星本体系的转换矩阵.

将主星和从星的附加力矩与控制力矩之和分别记为合控制力矩  $\mathbf{T}_c$  和  $\mathbf{T}_i$ , 对式(4)求导, 可得从星相

对于主星姿态动力学方程:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ri} = -\mathbf{I}_i^{-1} \{ (\boldsymbol{\omega}_{ri} + \mathbf{A}_{ic} \boldsymbol{\omega}_c) \times [\mathbf{I}_i (\boldsymbol{\omega}_{ri} + \mathbf{A}_{ic} \boldsymbol{\omega}_c)] \} + \boldsymbol{\omega}_{ri} \times (\mathbf{A}_{ic} \boldsymbol{\omega}_c) + \mathbf{A}_{ic} \mathbf{I}_c^{-1} [\boldsymbol{\omega}_c \times (\mathbf{I}_c \boldsymbol{\omega}_c) - \mathbf{T}_c] + \mathbf{I}_i^{-1} \mathbf{T}_i. \quad (5)$$

当  $\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_i = \mathbf{I} = \text{diag}[I_1, I_2, I_3]$  满足  $I_1 = I_2 = I_3$  时, 可定义等效合控制力矩  $\mathbf{T}_{\Delta ri}$  为

$$\mathbf{T}_{\Delta ri} := \mathbf{T}_i = \mathbf{I} \mathbf{A}_{ic} \mathbf{I}^{-1} \mathbf{T}_c = \mathbf{T}_i - \mathbf{A}_{ic} \mathbf{T}_c. \quad (6)$$

忽略下标  $ri$ , 可以得到用相对姿态四元数的二阶形式描述的姿态动力学方程:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_0 \\ \ddot{\mathbf{q}}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} (\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega}) \mathbf{q}_0 - \frac{1}{2} \mathbf{q}_v^T \mathbf{f} - \frac{1}{2} \mathbf{q}_v^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{T}_{\Delta} \\ -\frac{1}{4} (\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega}) \mathbf{q}_v - \frac{1}{2} \mathbf{Q} \mathbf{f} - \frac{1}{2} \mathbf{Q}_v \mathbf{I}^{-1} \mathbf{T}_{\Delta} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

式(4)和(7)构成了内力编队飞行相对姿态的动力学模型, 该模型形式复杂, 具有很强的非线性. 控制量  $\mathbf{T}_{\Delta}$  的引入能保证姿轨耦合效应的充分利用, 将附加力矩视为控制力矩的一部分, 而非干扰力矩; 此外,  $\mathbf{T}_{\Delta}$  内含有  $\mathbf{T}_i$  和  $\mathbf{T}_c$  这两个控制量, 因此可通过最优控制问题的求解, 实现姿态控制的分配.

## 3 六自由度姿轨耦合动力学模型

对于考虑姿轨耦合效应的动力学模型, 联立式(1)和(7), 将  $\mathbf{x} = [\mathbf{r}^T, \mathbf{e}^T]$  和  $\mathbf{u} = [\mathbf{a}^T, \mathbf{T}_{\Delta}^T]^T$  作为状态变量和控制变量, 则六自由度相对动力学模型可写为如下形式:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{C} \mathbf{u}. \quad (8)$$

基于该动力学模型, 将附加力矩设为控制力矩的一部分, 实现姿轨耦合效应的充分利用. 针对编队卫星的相对位置和相对姿态设计控制律, 可同时得到所需的控制力和控制力矩, 从而实现内力编队卫星的姿轨协同控制.

## 4 内力编队的重构问题仿真

为了验证上述姿轨耦合动力学模型, 以下将采用伪谱法<sup>[10]</sup>求解编队构型重构问题<sup>[11]</sup>.

以4星编队的重构问题为仿真算例, 编队重构的目的是转移至另一相对轨道. 为了简化问题, 假设4颗卫星的机动轨迹相对于原点旋转对称, 在转移过程中始终在机动平面上保持正方形的构形. 将卫星A视为从星1, 卫星D视为主星, 仿真中的参数选取如表1所示.

表 1 4 星共面编队的仿真参数

Table 1 Simulation parameters for four-satellite planar formation

参数	参数值
卫星质量/kg	250
转动惯量/(kg · m <sup>2</sup> )	160
初始参考轨道半径/km	7 200
终止参考轨道半径/km	7 200
最大磁矩/(H/m)	81 250
CMG 最大输入力矩/(N · m)	1
主星姿态四元数	[0.953 9, -0.2, 0.2, -0.1] <sup>T</sup>
主星姿态角速度/(rad/s)	[-0.01, 0.02, 0.01] <sup>T</sup>
[ $\Omega_i, i, \omega, \theta_0$ ]/(°)	[20 10 5 0]
$K_p$	diag(0.2, 0.2, 0.2)
$K_d$	diag(6.0, 6.0, 6.0)

初始相对姿态四元数的矢部为  $q_{vi} = [-0.7, 0.5, -0.1]^T$ . 相对位置的始、末标称状态(其中  $\beta_i$  和  $\beta_f$  均由伪谱法优化设计得到) 选取为

$$\begin{cases} x_i = 5\sin(n_i t + \beta_i), & x_f = 5\sin(n_f t + \beta_f), \\ y_i = 10\cos(n_i t + \beta_i), & y_f = 10\cos(n_f t + \beta_f), \\ z_i = 5\sqrt{3}\sin(n_i t + \beta_i), & z_f = 5\sqrt{3}\sin(n_f t + \beta_f). \end{cases}$$

经过仿真计算,机动过程中,从星 1 的相对位移和相对速度的变化如图 1 所示,相对位移的始、末相对误差分别为 1.25 % 和 2.18 %

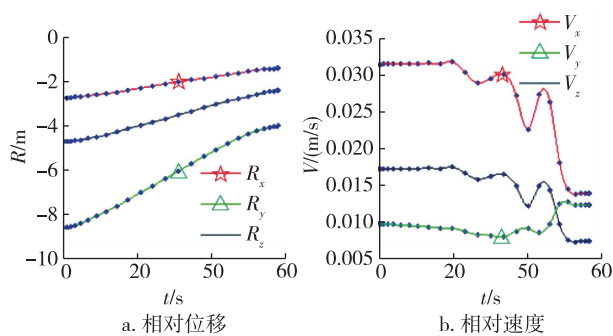


图 1 4 星编队构型重构的相对平动(从星 1 相对于主星)

Fig. 1 Relative translation of four-satellite planar reconfiguration (the 1<sup>st</sup> deputy satellite with respect to the chief satellite)

从星 1 的相对姿态四元数和控制力矩的变化情况如图 2 所示.主星的控制力矩与从星 1 的大小相同,方向相反,相对姿态四元数的稳态误差小于 0.03.

仿真结果显示,基于六自由度的姿轨耦合动力学模型,可以实现姿轨联合控制.对于编队卫星的相对轨道控制,内力编队虽无法改变编队质心的运动轨迹,但可以控制卫星间的相对位置.对于编队的相

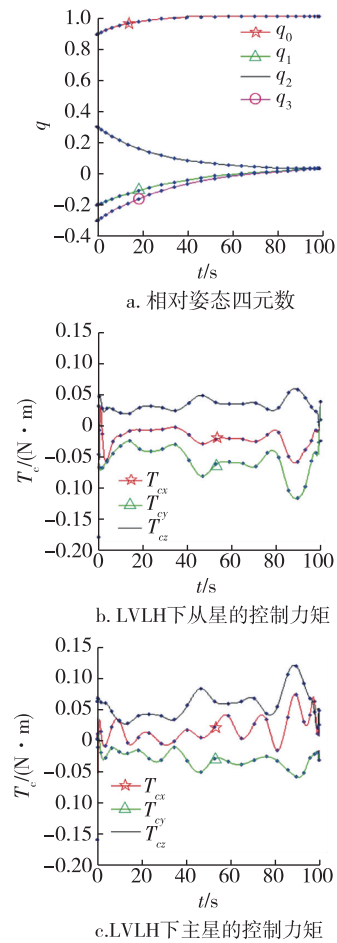


图 2 4 星编队构型重构的相对转动

Fig. 2 Relative rotation of four-satellite planar reconfiguration

对姿态控制,使用本文所推导的动力学模型,可以充分利用内力产生的附加力矩,并实现姿态控制的分配.

## 5 结论

内力编队卫星具有众多的优点,具有一定的应用前景.但由于其控制力对卫星间的相对位置和相对姿态均高度敏感,具有很强的非线性和不确定性,并且控制力和控制力矩之间存在耦合,给内力编队卫星的动力学建模带来了难题.

本文充分利用控制力和附加力矩间的耦合效应,建立了六自由度的姿轨耦合动力学模型,并基于此动力学模型,采用伪谱法就内力编队的重构问题进行了仿真,验证了该动力学模型的可行性.仿真结果显示,利用该动力学模型可以实现内力编队卫星相对位置和相对姿态的协同控制.

## 参考文献

## References

- [ 1 ] Alfriend K T, Vadali S R, Gurfil P, et al. Spacecraft formation flying: Dynamics, control and navigation [ M ]. Oxford, UK: Elsevier, 2010
- [ 2 ] Norman M C, Peck M A. Integrals of motion for planar multibody formations with internal forces [ J ]. AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2011, 24 ( 6 ): 1790-1797
- [ 3 ] Kwon D W. Propellantless formation flight applications using electromagnetic satellite formations [ J ]. Acta Astronautica, 2010, 67 ( 9/10 ): 1189-1201
- [ 4 ] Miller D W, Sedwick R J, Kong E M C, et al. Electromagnetic formation flight for sparse aperture telescope [ C ] // Proceedings of the 2002 IEEE Aerospace Conference, 2002, 2: 729-741
- [ 5 ] Schaub H, Parker G G, King L B. Challenges and prospects of coulomb spacecraft formations [ C ] // AAS John L. Junkins Astrodynamics Specialist Symposium, 2003, AAS-03-278
- [ 6 ] Berryman J, Schaub H. Analytical charge analysis for 2-craft and 3-craft coulomb formations [ J ]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2007, 30 ( 6 ): 1701-1710
- [ 7 ] Segal S, Gurfil P. Effect of Kinematic rotation-translation coupling on relative translational dynamics [ J ]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2009, 32 ( 3 ): 1045-1050
- [ 8 ] Pan H, Kapila V. Adaptive nonlinear control for spacecraft formation flying with coupled translation and attitude dynamics [ C ] // Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, 2001: 2057-2062
- [ 9 ] Kaneda A R, Sakai S I, Hashimoto T, et al. The relative position control in formation flying satellites using superconducting magnets [ J ]. Journal of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, 2008, 56 ( 652 ): 203-210
- [ 10 ] Hui Y, Ross I M, Alfriend K T. Pseudospectral feedback control for three-axis magnetic attitude stabilization in elliptic orbits [ J ]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2007, 30 ( 4 ): 1107-1115
- [ 11 ] Guibout V M, Scheeres D J. Spacecraft formation dynamics and design [ J ]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2006, 29 ( 1 ): 121-133

## Flying dynamic modeling of satellite formation with internal forces

CHEN Jing<sup>1</sup> YUE Xiaokui<sup>1</sup><sup>1</sup> School of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072

**Abstract** Satellite formation flying with internal forces has attracted great attention for its high performance. However, the control force is highly sensitive to the relative position and relative attitude between satellites, and coupling effect exists between control forces and control torques, both of which pose challenges to building the dynamic model for formations with internal forces. A 6-dof ( degree of freedom ) relative translational and rotational dynamic model is established in this paper, considering the coupling between control forces and control torques. The cooperative control of relative states between the satellites is realized by designing the control law for both relative position and relative attitude. Finally, the dynamic model is testified through the simulation of formation reconfiguration using the pseudospectral method.

**Key words** satellite formation with internal forces; coupling of relative position and attitude; 6-dof ( degree of freedom ); pseudospectral method