文章编号:1674-7070(2015)02-0125-08

毛学荣[1]　李晓月[2]

金融领域的随机建模与基于软件 R 的 Monte Carlo 模拟(2):Cox-Ross-Rubinstein 模型

摘要

主要讨论了 Cox-Ross-Rubinstein (CRR) 模型和广义的 CRR 模型,并研究了如何基于 CRR 模型和广义的 CRR 模型利用 Monte Carlo 模拟计算资产价格以及期权价值.

关键词

CRR 模型;Monte Carlo 模拟;期权定价;二项分布

中图分类号 F830;O211

文献标志码 A

收稿日期 2014-09-13

资助项目 国家自然科学基金(11171056,11171081)

作者简介

毛学荣,男,博士,教授,研究方向为随机分析,随机微分方程理论及应用.

x.mao@ strath.ac.uk

李晓月(通信作者),女,博士,教授,研究方向为随机微分方程理论及应用.

lixy209@ nenu.edu.cn

1 斯特莱斯克莱德大学 数学系,格拉斯哥,G1 1XT,英国

2 东北师范大学 数学与统计学院,长春,130024

0 引言

本文研究一些金融领域中熟知的随机模型,首先介绍 Cox-Ross-Rubinstein 模型(CRR)[1].由于仅用到概率论中的二项分布,因此就数学而言 CRR 模型是简单的,然而它却被广泛地应用和发展着.

假设金先生今天有 100 万投资 1 年,他有 2 种选择:1)投资在银行储蓄,获得风险自由的利息;2)买一套价值 100 万的房子,1 年后卖出.金先生应该采取哪种投资策略?

假设年利率为 $r_a = 1\%$,并令 X 代表 1 年后的房价.考虑

1)$P(X=110$ 万元$)=0.5$ 和 $P(X=90$ 万元$)=0.5$,即房价涨 10% 和跌 10% 的概率一样;

2)$P(X=110$ 万元$)=0.6$ 和 $P(X=90$ 万元$)=0.4$.

如果情况 1) 发生,由于 $E(X)=100$ 万元,因此存在银行更好,1 年后金先生将得到 101 万元;如果情况 2) 发生,$E(X)=0.6\times 110$ 万元 $+ 0.4\times 90$ 万元 $=102$ 万元,投资房产的平均回报将比银行储蓄高出 1 万元.

如果你认为房地产市场遵循情况 2)(当然,这是个案,如果房地产市场实际遵循情况 2),则银行有责任提升存款利率由 1% 至 2%),你有 100 万元,投资到房地产市场能获得预期收益 2 万元吗?关键的问题在于你没有 100 万元那么大一笔资金,相比金先生那样的富人,这时你会觉得很不公平.如果这时我们(期权卖方)愿意卖一份欧式看涨期权给你(期权买方),使得你有权利而不是义务 1 年后以 100 万元买一套房子,你愿意与我们签署这份期权协议吗?

现在回顾一下第一部分中定义的欧式看涨期权定义[2-4]:欧式看涨期权赋予它的持有人在将来的一个指定时间以指定的价格从期权卖方购买指定资产的权利(而没有义务).购买的价格被称为合约价格或执行价格或预购价格,未来设定的行权时间被称为到期日.

如果你今天签订这份期权协议,1 年后你将有 2 种选择:

1)如果 1 年后真实房价为 110 万元,你就可以行权以 100 万元从我们手里买来房子,再以 110 万元卖掉,获得盈利 10 万元;

2)如果 1 年后真实房价为 90 万元,你可以不行权,这样就无收益.

注意到由于你(买方)没有义务买房子,因此你不会有任何损失.事实上,若选择 1)发生你获利 10 万元,而若选择 2)发生你既不获利也无损失.另一方面,由于 1 年后我们(卖方)可能没有任何收益或者损失无法估量,为了弥补这种失衡,协议签订时,你需要付钱购买这种权利(公平的价格被称为期权价值).

问题 如果我们要收你 2 万元费用,你还愿意签订这份期权协议吗?

令 C 表示到期日期权的收益,则

$$C=\begin{cases}10\text{ 万元}, & X=110\text{ 万元};\\ 0\text{ 万元}, & X=90\text{ 万元}.\end{cases}$$

如果 X 的概率分布 $P(X=110\text{ 万元})=0.6$, $P(X=90\text{ 万元})=0.4$,平均收益为 $E(C)=0.6\times10$ 万元$+0.4\times0$ 万元$=6$ 万元,但是 2 万元存在银行,1 年后将成为 $(1+1\%)\times2$ 万元$=2.02$ 万元,因此,期权产生收益多出部分为 6 万元-2.02 万元$=3.98$ 万元.

现在将你的收益和金先生的收益进行比较.金先生投资 100 万元到房地产,期望获得高于银行利息 1 万元的更高收益,而你只需要投资 2 万元购买看涨期权,就可以期望获得高于银行存款利息 3.98 万元的额外收益.期权的另一个明显好处在于你只需要投入资金 2 万元,而不是 100 万元.

接下来分析另一种情况:如果今天我们的看涨期权卖 5.99 万元,你还会买吗?你可以考虑一下,如果你在银行存款 5.99 万元,1 年后你得到$(1+1\%)\times5.99$ 万元$=6.05$ 万元,将比期权收益 6 万元高出 500 元.因此,你会认为我们卖价太高了.

关键问题 你认为多少是期权公平的价格?

显然,如果今天你在银行存款

$$\frac{E(C)}{1+r_{\rm a}}=\frac{6\text{ 万元}}{1+1\%}=5.940\,6\text{ 万元},$$

1 年后你将获得 6 万元,因此你会认为 5.940 6 万元是期权的合理卖价.

以上想法可以用于处理更加复杂的情况.

实例 1 假设房地产价格每半年以 60%概率上涨 5%,以 40%概率下降 4%,则 1 年后房价 X 具有以下概率分布:

X/万元	92.16	100.80	110.25
P	0.16	0.48	0.36

故 $E(C)=0.48\times0.80+0.36\times10.25=4.074$ 万元,因此期权公平售价为

$$\frac{E(C)}{1+r_{\rm a}}=\frac{4.074\text{ 万元}}{1+1\%}=4.034\text{ 万元}.$$

实例 2 假设房价每个季度以 60%概率上涨 3%,以 40%概率下降 2%,则 1 年后房价 X 具有以下概率分布:

X/万元	92.237	96.943	101.889	107.087	112.551
P	0.025 6	0.153 6	0.345 6	0.345 6	0.129 6

故 $E(C)=0.345\,6\times1.889+0.345\,6\times7.087+0.129\,6\times12.551=4.729$ 万元,因此期权公平售价为

$$\frac{E(C)}{1+r_{\rm a}}=\frac{4.729\text{ 万元}}{1+1\%}=4.682\text{ 万元}.$$

1 Cox-Ross-Rubinstein(CRR)模型

CRR 模型由 Cox 等[1]在 1979 年建立,上述例子仅仅是该模型的简单特例.该模型建立仅用到概率理论中的二项分布,为了方便读者的阅读,先介绍一些概率理论中的基本定义[5-7]以及免费的统计软件 R[8].

1.1 二项分布和软件 R

掷骰子时,6 个面出现的可能性是均等的,因此每个面出现的概率都是 1/6.推广这种想法到取值于有限数集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 的离散随机变量 X,相应的概率分别为 $\{p_1,p_2,\cdots,p_m\}$,即 x_i 出现的概率是 p_i.为使上述说法有意义,要求对所有 i,有 $p_i\geqslant0$(不允许负的概率),且 $\sum_{i=1}^{m}p_i=1$.

定义 $E(X)$ 为 X 的均值或期望,则

$$E(X):=\sum_{i=1}^{m}x_ip_i.$$

特别地,掷骰子随机变量的期望为 $E(X)=1\times1/6+2\times1/6+\cdots+6\times1/6=3.5$,这也接近人们的直觉.$X$ 的方差定义为

$$\operatorname{var}(X):=E((X-E(X))^2),\tag{1}$$

它测定了 X 与期望值之间的偏差.方差 $\operatorname{var}(X)$ 的平方根被称为 X 的标准差.

若随机变量 X 取值为 1 的概率为 p(其中 $0<p<1$),取值为 0 的概率为 $1-p$,则它被称为参数为 p 的伯努利随机变量,记为 $X\sim B(p)$(这里,$m=2$, $x_1=1$, $x_2=0$, $p_1=p$, $p_2=1-p$).对伯努利随机变量,有 $E(X)=1\times p+0\times(1-p)=p$.随机变量 $(X-E(X))^2$ 以概率 p 取值 $(1-p)^2$,以概率 $1-p$ 取值 p^2.因此,$\operatorname{var}(X)=E((X-E(X))^2)=(1-p)^2p+p^2(1-p)=p(1-p)$.

一般地,如果 X 和 Y 是 2 个离散的随机变量,则可以通过组合它们得到新的随机变量,如 $X+Y, X^2+\sin(Y)$ 等.假设 X 是取值于有限数集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 的离散随机变量,相应的概率分别为 $\{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$,则 $\sin(X)$ 取值 $\{\sin(x_1), \sin(x_2), \cdots, \sin(x_m)\}$ 的概率分别为 $\{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$.假设 X 和 Y 是 2 个离散的随机变量,则基本等式

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y) \tag{2}$$

成立,即和的期望等于期望的和.

令 X 和 Y 是 2 个离散随机变量,分别取值为 $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 和 $\{y_1, x_2, \cdots, y_n\}$.如果

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j),$$

成立,则称它们是独立的.如果 X 和 Y 是独立的,则

$$\mathrm{var}(X+Y)=\mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(Y).$$

类似地可定义多个随机变量的独立性.令 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的随机变量(简记为 i.i.d),它们均是参数为 p 的伯努利随机变量,则 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 是以 n 和 p 为参数的二项分布,记为 $X \sim B(n,p)$.易证

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)=np$$

和

$$\mathrm{var}(X)=\mathrm{var}(X_1)+\mathrm{var}(X_2)+\cdots+\mathrm{var}(X_n)=np(1-p),$$

还可证 X 具有概率分布

$$P(X=i)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}, \quad i=0,1,\cdots,n,$$

其中 $\binom{n}{i}=n!\ /(i!\ (n-i)!)$.二项分布的数值模拟可以通过免费的计算软件 R[8] 获得.R 中的命令"dbinom(0:n,n,p)"可以给出 $B(n,p)$ 的概率分布,而命令"dbinom(i,n,p)"可以给出概率 $P(X=i)$.例如,为了获得 $B(3,0.5)$ 的概率分布,可以在 R 中简单地敲入命令"dbinom(0:3,3,0.5)"就会得到概率分布:0.125,0.375,0.375,0.125.当然,如果对 $X \sim B(3,0.5)$,只需要 $P(X=2)$,可以敲入"dbinom(2,3,0.5)"就可以得到值 0.375.

接下来将演绎 Monte Carlo 模拟.如果同时掷 3 枚硬币,令 X 代表出现正面的次数,则 $X \sim B(3,0.5)$.同时掷 3 枚硬币 10 次,就可以得到由 0,1,2,3 组成的一列数,分别代表每次出现正面的数量.这个过程可以通过在 R 中敲入命令"rbinom(10,3,0.5)"来实现,譬如:0 1 1 3 0 2 1 1 2 3 是第一次尝试得到的结果,继续使用这个命令,得到了另一组数据:1 1 0 0 2 3 0 1 2 2.

掷骰子足够多次,比如 100 万次,可以帮助验证理论的概率分布.事实上,R 中的命令"hist(rbinom(1 000 000,3,0.5))"可以给出 100 万个随机数的柱状图,如图 1 所示.这和理论概率分布完美匹配.

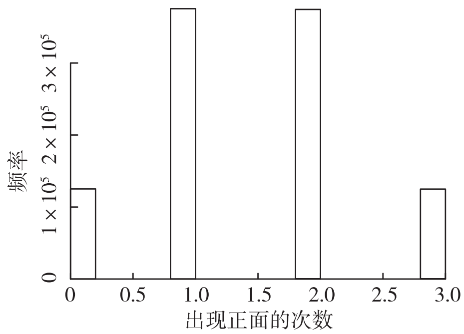

图 1 掷 3 枚硬币 1 000 000 次的柱状图

Fig. 1 Histgram of tossing 3 fair coins 1 000 000 times

同时,R 中命令"table(rbinom(1 000 000,3,0.5))"给出样本出现的频率

0	1	2	3
125 053	375 567	374 827	124 553

与理论上的频率

0	1	2	3
125 000	375 000	375 000	125 000

有很好的匹配.

1.2 CRR 模型

现在来定义 CRR 模型.假设从 0 时刻到到期日 T 分为 n 个时间段,每个时间段长为 Δt(故 $T=n\Delta t$). $t=0$ 时刻股票(或房产)价格是 S_0.每个时间段价格上涨到 u 倍的概率是 $p \in (0,1)$,价格下降到原来的 d 倍的概率是 $1-p$.假设

$$d < e^{r\Delta t} < u, \tag{3}$$

后面会给出作这样假设的原因.图 2 解释了 CRR 模型.

令 X 是价格上涨时间段的个数,则可知 $X \sim B(n,p)$ 具有概率分布

$$P(X=i)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} =: p_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant n, \tag{4}$$

其中符号 =: 表示"定义"的意思.令 Y 是最终股票价格(即到期日的价格).显然 Y 的值依赖于每个时间段价格上涨还是下跌.当 $X=i$,则

$$Y=S_0u^id^{n-i} =: y_i. \tag{5}$$

因此 $Y=y_i$ 的概率与 $X=i$ 的概率相等,即

$$P(Y=y_i)=P(X=i).$$

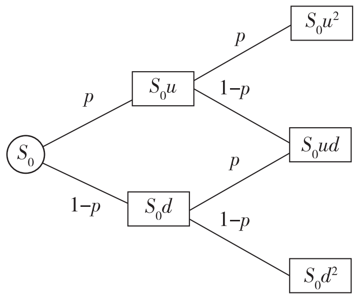

图 2　二项分布树

Fig. 2　Binomial tree

由下表清晰可见这个事实:

X	$0,1,\cdots,n$
概率	$p_0,p_1,\cdots,p_n$
Y	$y_0,y_1,\cdots,y_n$

到期日股票价格的期望为

$$E(Y)=\sum_{i=0}^{n}p_iy_i,\tag{6}$$

其中 p_i 和 y_i 由式(4) 和(5) 分别定义.计算

$$E(Y)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}S_0u^id^{n-i}=$$
$$S_0\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(pu)^i((1-p)d)^{n-i}=$$
$$S_0(pu+(1-p)d)^n.$$

换言之,如果0时刻投资 S_0 在股票市场(即持有一份股票),时刻 $n\Delta t$ 可以期望你的投资增长到 $S_0(pu+(1-p)d)^n$;另一方面,如果0时刻在银行存款 S_0,时刻 $n\Delta t$ 你将得到 $S_0e^{rn\Delta t}$.

从常识上讲,会有

$$S_0e^{rn\Delta t}=S_0(pu+(1-p)d)^n,$$

即

$$e^{r\Delta t}=pu+(1-p)d.\tag{7}$$

这是 CRR 模型中关于复利利率 r 和参数 p,u,d 的重要公式.由式(7) 可以看出式(3) 一定成立.更进一步,如果知道股票价格服从给定参数 p,u,d 的 CRR 模型,则银行有责任根据式(7) 调整利率,即

$$r=\frac{\log(pu+(1-p)d)}{\Delta t}.$$

本文总是用符号 log 表示 $\log_e$(或 ln).然而,实际中经常知道银行利率 r,上涨倍数 u 和下降倍数 d,则利用此式可以得到潜在的上涨概率为

$$p=\frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}.\tag{8}$$

在本节的最后部分,将利用 r,u,d 和 Δt 确定的潜在概率来处理 CRR 模型.

1.3　期权及其价值

现在考虑预购价格为 K 的欧式看涨期权.令 C 代表到期日的收益,则收益的期望或均值为

$$E(C)=E(\max(Y-K,0))=$$
$$\sum_{i=0}^{n}p_i\max(y_i-K,0).\tag{9}$$

关键问题　期权购买者应该支付多少钱? 换句话说,该如何计算期权价值的公平价格呢?

令 V_{call} 表示看涨期权的价值.因此购买者0时刻花费 V_{call} 买到了一份看涨期权,并且希望到期日获得平均收益 $E(C)$;另一方面,如果0时刻在银行存款 V_{call}(或者购买 V_{call}/S_0 份股票),到期日会获得收益 $V_{\text{call}}e^{rn\Delta t}$.

一般地,$E(C)=V_{\text{call}}e^{rn\Delta t}$ 成立,即

$$V_{\text{call}}=e^{-rn\Delta t}E(C).\tag{10}$$

类似地,考虑执行价为 K 的欧式看跌期权.令 P 表示到期日收益,则收益的期望或均值为

$$E(P)=\sum_{i=0}^{n}p_i\max(K-y_i,0),\tag{11}$$

且欧式看跌期权的价值为

$$V_{\text{put}}=e^{-rn\Delta t}E(P).\tag{12}$$

1.4　CRR 模型的 R 函数

利用 CRR 模型可以设计 R 软件中的函数如下:

```
> CRRcall <-function(S0,n,Dt,u,d,K,r){
+ p<-(exp(r * Dt)-d)/(u-d)
+ print(p)
+ i<-0:n
+ Y<-S0 * u^i * d^(n-i)
+ C<-Y-K+C[C<0]<-0
+ prob<-dbinom(i,n,p)
+ exp(-n * Dt * r) * sum(C * prob)}
```

将该函数记为 CRRcall 函数,利用它就可以很便捷地得到期权价值.考虑实例 1 中类似情形,利用式(8)计算 p.注意到 $r\approx r_a$(因为 $e^r\approx 1+r_a$),假设参数取值分别为 $S_0=100$, $n=2$, $\Delta t=0.5$, $u=1.05$, $d=0.96$, $K=100$, $r=0.01$.因此,在 R 中敲入" CRRcall(100,2,0.5,1.05,0.96,100,0.01)"就会得到潜在概率 $p=0.500\ 139\ 1$ 以及看涨期权价值 2.934 435 万元.

注 1　注意在实例 1 中潜在概率 $p=0.500\ 139\ 1$ 小于概率 60%.换言之,你可能已经过量估计了实际概率.如果你认为概率是 60%,则你将接受不超过

4.034 万元的期权价格(你个人认为的期权价值).因此,如果市场提供期权的实际价格为 2.934 435 万元,你就会购买.如果银行还没有根据这种情况调整利率,市场中就存在机会.

考虑实例 2 类似的情况,再次利用式(8)计算概率 p.参数分别取值为 $S_0=100$, $n=5$, $\Delta t=0.25$, $u=1.05$, $d=0.96$, $K=100$, $r=0.01$,在 R 中利用命令"CRRcall(100,5,0.25,1.05,0.96,100,0.01)"得到概率 $p=0.450\ 062\ 6$ 和 $V_{\rm call}=2.604\ 277$ 万元.

接下来考虑 2 个更难手算期权价值的例子.

实例 3 考虑以月为周期的情况.假设 $S_0=100$, $n=12$, $\Delta t=1/12$, $u=1.01$, $d=0.99$, $K=100$, $r=0.01$,在 R 中敲入命令" > CRRcall(100,12,1/12,1.01,0.99,100,0.01)" 就可以得到概率 $p=0.541\ 684$ 和期权价值 $V_{\rm call}=1.906\ 28$ 万元.

实例 4 考虑以天为周期的情况.假设参数分别取值为 $S_0=100$, $n=365$, $\Delta t=1/365$, $u=1.000\ 28$, $d=0.999\ 72$, $K=100$, $r=0.01$,在 R 中敲入命令"> CRRcall(100,365,1/365,1.000 28,0.999 72,100,0.01)"可以得到概率 $p=0.548\ 924\ 3$ 和期权价值 $V_{\rm call}=1.001\ 321$ 万元.

1.5 Monte Carlo 模拟

本文利用显示表达式(9)和(10)设计了 CRR 模型的 R 函数.在本系列文章中将研究一些没有期权价值理论公式的模型,例如下节的广义 CRR 模型.这时 Monte Carlo 模拟将对给出近似价值起到重要作用.

本节将研究如何对 CRR 模型演绎 Monte Carlo 模拟.比较精确值和利用 Monte Carlo 模拟获得的近似值时,可以看到 Monte Carlo 模拟的强有力作用.如果在 R 中运行很多独立的模拟,将发现平均期权价值与预期期权价值相同或者非常接近,这归功于"大数定律"[6-7].大数定律指出如果多次重复做相同的实验,实验结果的均值将会非常接近预期结果,并且实验次数越多,精确度将越好.生活中也很容易来验证这个理论,譬如投掷 1 000 次硬币,出现正面的次数将非常接近 500.根据这一理论就会知道如果进行多次重复模拟,结果的均值将会非常接近预期的值.这样各种类型的模拟均被称为 Monte Carlo 模拟,它被广泛应用于金融、工程、物理等多个领域.

Monte Carlo 模拟可以验证利用 R 软件的计算.如果将 Monte Carlo 模拟写成 R 函数,输入相应的信息后就可以执行一定数量的指令,并立即给出结果.

```
> MCCRRcall <-function(S0,n,Dt,u,d,K,r,N){
+ p<-(exp(r*Dt)-d)/(u-d)
+ Y <-1:N+X <-1:(n+1)
+ X[1]=S0
+ for (j in 1:N){
+ for (i in 2:(n+1)){
+ if (runif(1)<p) X[i]=X[i-1]*u else X[i]=X[i-
1]*d}
+ Y[j]=X[n+1]}
+ C<-Y-K
+ C[C<0]<-0
+ exp(-n*Dt*r)*mean(C)}
```

上述命令建立的 R 函数,记为"MCCRRcall",它运行了 N 次模拟并且给出了全部结果.对实例 3,假设参数取值为 $S_0=100$, $n=12$, $\Delta t=1/12$, $u=1.01$, $d=0.99$, $K=100$, $r=0.01$,可以多次运行数值模拟,比如 100 000 次.因此在 R 中输入命令" > MCCRRcall(100,12,1/12,1.01,0.99,100,0.01,100 000)"可以得到期权价值的期望 1.894 511,非常接近预期的精确值 1.906 28.

对实例 4,令参数分别取值为 $S_0=100$, $n=365$, $\Delta t=1/365$, $u=1.000\ 28$, $d=0.999\ 72$, $K=100$, $r=0.01$,再次运行 100 000 次模拟,即在 R 中输入命令"> MCCRRcall(100,365,1/365,1.000 28,0.999 72,100,0.01,100 000)"得到了期权价值的期望 1.000 65,也是非常接近预期的精确值 $V_{\rm call}=1.001\ 321$.

总之,凭实验或者经验,而不是理论,证明了以上计算是正确的.

2 广义 CRR 模型

前文利用二项分布,CRR 模型给出了价格范围、概率分布、收益以及期权价值.但是 CRR 模型要求 n 个阶段里的所有参数均是常数,然而现实生活中往往不是这样的.例如,石油的价格随着季节波动,同时也受到世界上战争、灾害等多种事件的影响,而 CRR 模型不能捕捉到这种参数从一个阶段向另一个阶段的变化.为此本文将建立用于变化参数的改善的 CRR 模型.

首先设定一些参数为常数,并不波动,如 S_0, n, K 和 r.当然利率 r 可以随着时间的变化而变化,这种情况留给读者考虑.本文更感兴趣的是剩余参数 p, u 和 d(分别为上涨概率、上涨倍数和下降倍数)随着时间段变化而变化,因此令 p, u 和 d 是关于时间段的函数:p_i,在第 i 个时间段上涨的概率,$1\leqslant i\leqslant n$;u_i,在第 i 个时间段上涨的倍数,$1\leqslant i\leqslant n$;d_i,在第 i 个时

间段下降的倍数,$1\leqslant i\leqslant n$.

假设 $d_i<u_i$.因此在第 1 个时间段上涨的概率是 p_1,上涨的倍数是 u_1,下降的倍数是 d_1;在第 2 个时间段上涨的概率是 p_2,上涨的倍数是 u_2,下降的倍数是 d_2,以此类推.假设 n 个阶段里的每个阶段发生的事件都是彼此独立的,如图 3 所示.甚至可以用三角函数定义季节变化,后面本文会讲到.

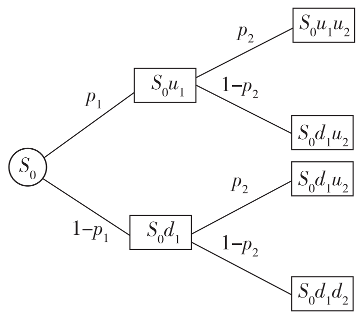

图 3　广义的 CRR 树

Fig. 3　The generalized CRR tree

首先类似于 CRR 模型中式(7),建立与 $r,\Delta t$, p_i,u_i 和 d_i 相关的公式.令第 i 阶段初始时刻股票价格为 S_{i-1},则该阶段结束时股票价格为 $S_{i-1}(p_iu_i+(1-p_i)d_i)$.另一方面,如果第 i 阶段初始时刻在银行存款 S_{i-1},则该阶段结束时会得到 $S_{i-1}e^{r\Delta t}$. 一般地,下式成立:

$$S_{i-1}(p_iu_i+(1-p_i)d_i)=S_{i-1}e^{r\Delta t}.$$

即

$$p_iu_i+(1-p_i)d_i=e^{r\Delta t},\quad 1\leqslant i\leqslant n, \tag{13}$$

这当然是式(7)的推广.由式(13)有

$$d_i<e^{r\Delta t}<u_i,\quad 1\leqslant i\leqslant n, \tag{14}$$

且

$$p_i=\frac{e^{r\Delta t}-d_i}{u_i-d_i},\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{15}$$

接下来的重要问题是如何利用上述公式得到最终股票价格、收益值以及期权价值.显然,利用上述公式可以得到最终股票价格

$$E(S_n)=S_0\prod_{i=1}^{n}[p_i\,u_i+(1-p_i)d_i]. \tag{16}$$

为了证明式(16),令 ξ_i 是第 i 个阶段($1\leqslant i\leqslant n$) 的变化倍数,则第 n 阶段结束时最终股票价格为 $S_n=S_0\prod_{i=1}^{n}\xi_i$.由于 ξ_i 是相互独立的,且概率分布为 $P(\xi=u_i)=p_i$,$P(\xi=d_i)=1-p_i$.因此 $E(\xi_i)=p_iu_i+(1-p_i)d_i$. 故

$$E(S_n)=E\left(S_0\prod_{i=1}^{n}\xi_i\right)=S_0\prod_{i=1}^{n}E(\xi_i)=S_0\prod_{i=1}^{n}[p_iu_i+(1-p_i)d_i].$$

利用式(13),有

$$E(S_n)=S_0\,e^{rn\Delta t}. \tag{17}$$

这些公式将对后文测试 Monte Carlo 模拟很有帮助.但是到目前为止,还没有得到收益的期望以及期权的价值,尤其是当 n 很大的时候.这种方法最大的问题在于参数随着时间变化,很难利用一般的公式计算分布,因此很难得到收益期望和期权价值.因此需要找到一种不依赖于一般公式的方法得到收益的期望以及期权价值,它就是 1.4 节中用到的 Monte Carlo 方法.前面用它来验证理论结果,这里当然也可以用它来找到期权价值,也可以利用所有数值模拟的结果给出概率分布,当然就可以计算得到收益期望以及期权价值.

实例 5　假设参数 S_0,n,K 和 r 与实例 3 中给出的值一样,即 $S_0=100,n=12,\Delta t=1/12,K=100,r=0.01$,而对 $i=1,2,\cdots,12$,令

$$u_i=1.005+0.001\sin\left(\frac{i}{12}\times 2\pi\right),$$

$$d_i=0.995+0.001\cos\left(\frac{i}{12}\times 2\pi\right),$$

其中依赖时间的上涨或下降率由三角函数表示,如图 4 所示.可以验证下式成立:

$$d_i<e^{0.01/12}<u_i.$$

接下来计算 p_i:

$$p_i=\frac{e^{0.01/12}-d_i}{u_i-d_i}.$$

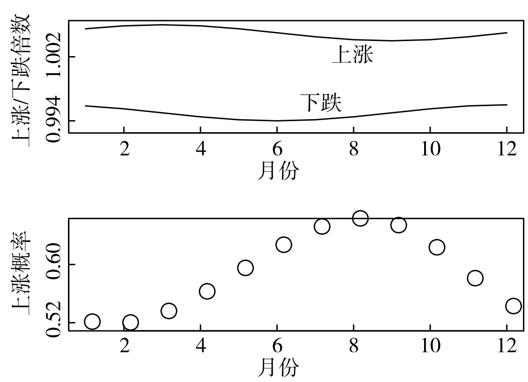

图 4　上涨/下跌倍数与上涨概率的逐月分布

Fig. 4　Monthly distribution of increase/decrease factors and imcrease probability

将以上叙述写为 R 程序：

```
> n=12
> time <-1:n
> u <-1.005+0.001 * sin(2 * pi * time/n)
> d <-0.995+0.001 * cos(2 * pi * time/n)
> p<-(exp(0.01/12)-d)/(u-d)
> par(mfcol=c(2,1))
> factors <-c(0.993,1.006,rep(1,times=n-2))
> plot(time,factors,type="n",xlab="month",ylab="factors")
> lines(time,u,col="red")
> lines(time,d,col="blue")
> legend("topright",c("Increase","Decrease"),lty=1,col=c("red","blue"))
> plot(time,p,xlab="month",ylab="probability of increase")
```

继续在 R 中写入适当的信息：

```
S0=100
K=100
r=0.01
Dt=1/12
```

本文给出模拟广义 CRR 模型 6 条样本轨道的 R 函数：

```
> GCRR <-function(){
+ x <-numeric()
+ x[1]=S0
+ for (i in 2:(n+1))
+ if (runif(1)<p[i-1]) x[i]=x[i-1] * u[i-1] else x[i]=x[i-1] * d[i-1]}
+ x}
> GCRRsamplepath <-function(){
+ t<-0:n
+ y <-c(95,105,rep(100,times=n-1))
+ colors <- c("red","blue","yellow","pink","green","black")
+ plot(t,y,type="n",xlab="month",ylab="house price")
+ for (j in (1:6)){
+ hp<-GCRR()
+ lines(t,hp,pch=".",type="l",col=colors[j])}}
```

输入"> GCRRsamplepath()"，如图 5，得到 6 条样本轨道. 重复这一过程可以得到更多的样本轨道.

类似地，可以写出 N 次模拟得到 N 个最终价格的 R 函数：

```
GCRRfinal <-function(N){
+ y <-numeric()
+ x <-numeric()
+ x[1]=S0
+ for (j in 1:N)
+ for (i in 2:(n+1)){
+ if (runif(1)<p[i-1]) x[i]=x[i-1] * u[i-1] else x[i]=x[i-1] * d[i-1]}
+ y[j]=x[n+1]}
+ y}
```

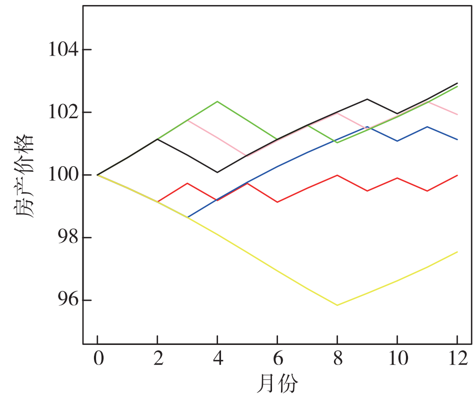

图 5 广义 CRR 模型的样本轨道

Fig. 5 Sample pathes of the generalized CRR model

现在大量运行这一函数，比如 100 000 次，并且将这些结果用"Finalprice"的变量表示：> Finalprice <- GCRRfinal(100 000)通过 R 建立的柱状图可以看到最终价格的分布：> hist(Finalprice).

如图 6 所示，通过将最终价格平均可以得到期望：> mean(Finalprice)，这个命令给出了期望 101.006 5，该值与式(13)算得的理论值：

```
> S0 * prod(p * u+(1-p) * d)
[1] 101.005
```

非常接近，利用式(17)，它等于 $100e^{0.01}$(如果 R 程序正确，将对测试问题非常有帮助). 在此基础上，还可

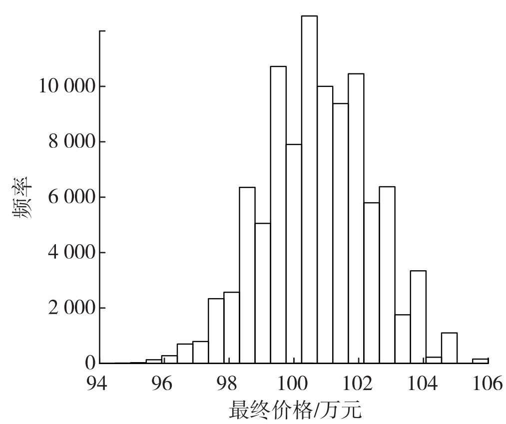

图 6 最终价格分布

Fig. 6 Distribution of final prices

以得到上涨和下跌期权价值.在 R 中输入:

```
> callpayoff <-Finalprice-K
> callpayoff[callpayoff<0]<-0
> exp(-r) * mean(callpayoff)
```

得到了上涨期权的价值 1.292 346.类似地,下跌期权价值通过输入

```
> putpayoff <-K-Finalprice
> putpayoff[putpayoff<0]<-0
> exp(-r) * mean(putpayoff)
```

得到,为 0.295 841 1.利用广义 CRR 模型得到了所有需要计算的重要数据:看涨期权价值=1.292 346,看跌期权价值=0.295 841 1,股票价值的期望=101.005.

总之,广义的 CRR 模型可以应用到很多实际金融场合,例如预测股票价格、货币汇率以及评价潜在投资.

参考文献
References

[1] Cox J C, Ross S, Rubinstein M. Oprion pricing: A simplified approach[J].J Financial Economics, 1979, 7: 229-263
[2] Etheridge A. A course in financial calculus [M]. Cambridge University Press, 2002
[3] Higham D J. An introduction to financial option valuation [M]. Cambridge University Press, 2004
[4] Tretyakov M V. Introductory course on financial mathematics[M].Imperial College Press, 2013
[5] Karatzas I, Shreve S E. Brownian motion and stochasrtic calculus[M].New York: Springer-Verlag, 1988
[6] Loève M. Probability theory [M]. D Van Nostrand Company(Canada), 1963
[7] Mao X R. Stochastic differential equations and applications [M]. 2nd Ed. Chichester: Horwood Publishing, 2007
[8] Venables W N, Smith D M, the R Development Core Team. An introduction to R: A programming environment for data analysis and graphics, Version 2.10.1[R].2009

Stochastic modelling in financeand Monte Carlo simulations with R. Part B: Cox-Ross-Rubinstein model

MAO Xuerong[1] LI Xiaoyue[2]
1 Department of Mathematics and Statistics, University of Strathclyde, Glasgow, G1 1XT, Scotland, UK
2 School of Mathematics and Statistics, Northeast Normal University, Changchun 130024

Abstract The key aim of this serial articles is to study various stochastic models in finance with emphasis on the Monte Carlo simulations with R for these models. This paper studies the Cox-Ross-Rubinstein (CRR) model and the generalized CRR model. Moreover, this paper discusses how to perform Monte Carlo simulations on the asset price and to obtain the approximate values of options.

Key words the CRR model; Monte Carlo simulations; option value; binomial distribution