



# 在红利支付情形下考虑负效用的消费投资问题

## 摘要

研究了经济代理人面临红利支付和劳动负效用情形下投资与退休选择问题,其中考虑了风险资产派发红利及劳动会给经济代理人带来效用损失的情形.代理人享有退休选择权,退休决策使得代理人避免了劳动负效用,却必须要放弃工资收入.代理人效用来自消费,并且受劳动负效用的直接影响.利用动态规划的方法去解自由边值问题,得到了代理人临界财富水平和最优消费投资组合策略显示解.

## 关键词

消费和投资组合选择;退休;负效用;红利;动态规划

中图分类号 O211.6;F224.11

文献标志码 A

收稿日期 2010-12-12

资助项目 国家自然科学基金(71171003);安徽省高校自然科学基金((KJ2012B019, KJ2013B023);安徽省高校省级人文社会科学基金(SK2013B057)

## 作者简介

梁勇,男,硕士,讲师,研究方向为金融数学与金融工程.liangyong@ahpu.edu.cn

费为银(通信作者),男,博士,教授,研究方向为金融数学与金融工程、随机分析与随机控制.wyfei@ahpu.edu.cn

## 0 引言

关于消费和投资组合问题的先驱性研究是由 Merton<sup>[1-2]</sup> 做出的. Bodie 等<sup>[3]</sup> 在退休计划的背景下,考虑了最优消费投资问题,即设定一个退休时间,经济代理人通过选择消费投资策略,来实现退休休. Karatzas 等<sup>[4]</sup> 首次使用鞅方法,对自由停时问题做了研究.为了将问题简化,他们引入了自由停时问题族.后来,由 Choi 等<sup>[5]</sup> 考虑了在自由停时附近,偏好变化所带来的影响. Karatzas 等<sup>[6]</sup> 使用动态规划方法,得到了显示解.同样,使用动态规划方法,Choi 等<sup>[7]</sup> 研究工资收入者通过考虑收入和劳动引起的负效用之间的平衡,来选择消费-投资策略以及退休时间问题.红利策略对上市公司和投资者的影响一直是金融理论研究的重要课题之一. Karatzas 等<sup>[8]</sup> 描述了金融市场中存在红利情形的处理方法.赵培峰等<sup>[9]</sup> 研究了不同风险度量约束下有红利支付的投资组合模型.本文在 Choi 等<sup>[7]</sup> 研究基础上,通过考虑股票支付红利使得问题更切合实际,进而对考虑负效用的消费投资组合和退休问题进行了研究.

## 1 模型框架

假设金融市场中共有  $m+1$  个资产,包含 1 个无风险资产(国债)和  $m$  个风险资产(股票).无风险资产价格满足  $dp_0(t) = p_0(t)dt, p_0(0) = p_0$ . 与文献[6]相同,第  $j$  个风险资产的价格  $p_j(t)$  遵循几何布朗运动:

$$dp_j(t) = p_j(t) \left\{ \alpha_j dt + \sum_{k=1}^m \sigma_{jk} dw_k(t) \right\}, \quad p_j(0) = p_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

其中,  $\mathbf{w}(t) = (w_1(t), \dots, w_m(t))$  是  $m$  维标准布朗运动,定义在概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上,  $\{\mathcal{F}_t\}_0^\infty$  是由标准布朗运动  $(\mathbf{w}(t))_{t=0}^\infty$  生成的  $\sigma$ -域在  $P$  下的扩张.市场参数  $\alpha_j$  和  $\sigma_{jk}$  假设为常数.矩阵  $\mathbf{D} = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^m$  是满秩的,即  $m$  个风险资产中不存在冗余资产,故  $\Sigma \equiv \mathbf{D}\mathbf{D}^T$  是严格正定的.假设消费率  $c_t$  非负,且  $\mathcal{F}_t$ -循序可测,满足  $\int_0^t c_s ds < \infty, \forall t \geq 0, a.s.$ . 风险资产投资量  $\boldsymbol{\pi}_t \triangleq (\pi_1(t), \pi_2(t), \dots, \pi_m(t))$  是  $\mathcal{F}_t$ -可测的,并有  $\int_0^t \|\boldsymbol{\pi}_s\|^2 ds \leq \infty, \forall t \geq 0, a.s.$ . 设  $\boldsymbol{\alpha}$  是风险资产回报率向量,  $\mathbf{q}$  表示风险资产的红利支付率向量,  $r$  是无风险利率,  $\varepsilon$  表示工资收入率,则代理人财富动力学为

1 安徽工程大学 数理学院, 芜湖, 241000

$$dx_t = (\alpha + q - r\mathbf{1}_m)\boldsymbol{\pi}_t^T dt + (rx_t - c_t + \varepsilon \mathbf{1}_{|t < \tau|}) dt + \boldsymbol{\pi}_t^T D dw^T(t), \quad 0 \leq t < \infty,$$

满足初始财富约束和退休后所面临的财富约束  $x_0 = x > -\frac{\varepsilon}{r}$  和  $x_t \geq 0$ , 对所有  $t \geq \tau$  几乎必然. 特别地, 退休时刻代理人财富必须是非负的.

最优化问题被描述为最大化代理人时间可分的 Von Neumann-Morgenstern 效用

$$V_{(\tau, c, \boldsymbol{\pi})}(x) \equiv E_x \int_0^\infty \exp(-\beta t) [U(c_t) - \mathbf{1}_{|t < \tau|}] dt. \quad (1)$$

对于所有允许策略  $(\tau, c, \boldsymbol{\pi}) \in \mathcal{A}(x)$  满足

$$E_x \int_0^\infty \exp(-\beta t) U^-(c_t) dt < \infty, \quad (2)$$

其中,  $E_x$  定义为  $x_0 = x$  条件下的期望算子,  $U$  是  $(0, \infty)$  之间取实值的效用函数,  $l > 0$  是常数, 用来表示劳动引起的效用损失率,  $\beta$  是主观折现率.

**假设 1**  $U$  是严格递增、严格凹的, 3 次连续可微, 且  $\lim_{c \rightarrow \infty} U'(c) = 0$ .

令  $I(\cdot)$  是  $U'(\cdot)$  的反函数. 定义  $\kappa \equiv \frac{1}{2}(\alpha + q - r\mathbf{1}_m) \sum^{-1} (\alpha + q - r\mathbf{1}_m)^T$ . 如果假设  $\kappa > 0$ , 那么关于  $\lambda$  的二次方程  $\kappa \lambda^2 - (r - \beta - \kappa)\lambda - r = 0$ , 有 2 个解  $\lambda_- < -1$  和  $\lambda_+ > 0$ , 并且令  $\rho_+ = \lambda_+ + 1, \rho_- = \lambda_- + 1$ .  $\bar{V}(x)$  是代理人被迫选择  $\tau = 0$  时的最优值函数. 根据文献[6], 假设

$$\int_c^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} < \infty, \quad \forall c > 0 \quad (3)$$

成立, 通过一个策略, 对于所有  $x > 0$ , 可使得  $\bar{V}(x)$  有限且可达. 对于效用函数为  $U(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$  的情形, 条件 (3) 等价于  $K > 0$ , 其中

$$K \equiv r + \frac{\beta - r}{\gamma} + \frac{\gamma - 1}{\gamma^2} \kappa. \quad (4)$$

**假设 2**  $\kappa > 0, \int_c^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} < \infty, \forall c > 0$ .

由于退休后的投资者将会采用策略  $\bar{C}(x_t)$  和  $\bar{\Pi}(x_t)$ , 故只需考虑停时  $\tau^*$  和  $\tau^*$  之前的最优消费和投资策略问题.

**定义 1**  $\mathcal{A}_1(x) \subset \mathcal{A}(x)$  是满足 (2) 的允许控制集, 且有

$$(c_t, \boldsymbol{\pi}_t) = (\bar{C}(x_t), \bar{\Pi}(x_t)), \quad \forall \tau \leq t < \infty.$$

通过上述讨论, 知道在集合  $\mathcal{A}_1(x)$  上, 可以最

大化 (1). 可令满足  $x > -\frac{\varepsilon}{r}$  期望效用最优值

$$V^*(x) \equiv \sup \{V_{(\tau, c, \boldsymbol{\pi})}(x) : (\tau, c, \boldsymbol{\pi}) \in \mathcal{A}_1(x)\}.$$

## 2 一般效用类的解

在本节中将解决一般效用类下最优消费/投资问题. 当  $t < \tau$  时, 哈密尔顿-雅可比-贝尔曼 HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程定义为

$$\begin{aligned} \beta V(x) = \max_{c \geq 0, \boldsymbol{\pi}} \{ & (\alpha + q - r\mathbf{1}_m)\boldsymbol{\pi}^T V'(x) + (rx - c + \\ & \varepsilon) V'(x) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\pi} \sum \boldsymbol{\pi} V''(x) + U(c) - l \}, \\ x > -\frac{\varepsilon}{r}. \end{aligned} \quad (5)$$

本文按照如下步骤得到方程的解: 首先, 猜想存在临界财富水平  $z^*$ , 若财富达到该水平, 则代理人退休; 第二步, 猜想当  $x < z^*$  时, 代理人值函数满足 HJB 方程 (5),  $x \geq z^*$  时值函数等于  $\bar{V}(x)$  并且在  $x = z^*$  平滑通过; 最后, 证明上述猜想是正确的. 这里仅考虑  $U'(0) = \infty$  (情形  $U'(0) < \infty$  情形可类似得到, 只是所假设的中间变量不同).

在讨论之前, 需引入如下引理:

**引理 1** 若  $U'(0) = \infty$ , 那么

$$\begin{aligned} \lim_{c \downarrow 0} \frac{U(c)}{U'(c)} = 0, \quad \lim_{c \downarrow 0} (U'(c))^{\lambda_+} \int_0^c \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} = 0, \\ \lim_{c \downarrow 0} (U'(c))^{\lambda_-} \int_c^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

沿用 Karatzas 等<sup>[6]</sup> 和 Choi 等<sup>[7]</sup> 的思想, 引入财富函数  $X(c)$ , 将 HJB 方程 (5) 线性化, 那么, HJB 方程转化为

$$\begin{aligned} X''(c) = \left\{ (r - \beta - 2\kappa) \frac{U'(c)}{U'(c)} + \kappa \frac{U''(c)}{U''(c)} \right\} X'(c) + \\ \left\{ \frac{U''(c)}{U'(c)} \right\}^2 (rx(c) - c + \varepsilon), \quad c > 0, \end{aligned}$$

方程的一个特解

$$\begin{aligned} X_0(c) = \frac{c}{r} - \frac{1}{\kappa(\lambda_+ - \lambda_-)} \left\{ (U'(c))^{\lambda_+} \int_0^c \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} + \right. \\ \left. (U'(c))^{\lambda_-} \int_c^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \right\} - \frac{\varepsilon}{r}, \end{aligned}$$

并且猜想解的形式为

$$X(c; \hat{B}) = \hat{B} (U'(c))^{\lambda_-} + X_0(c). \quad (7)$$

对  $c > 0$ , 后面将给出  $\hat{B}$ , 且是确定的常量. 易知,

$X(c; \hat{B})$  是  $[0, \infty)$  到  $\left[-\frac{\varepsilon}{r}, \infty\right)$  上的一一映射, 那

么反函数  $C(\cdot; \hat{B})$  存在, 并且是由  $\left[-\frac{\varepsilon}{r}, \infty\right)$  映射

到  $[0, \infty)$ . 满足 HJB 方程的候选值函数  $V$ :  
 $\left(-\frac{\varepsilon}{r}, \infty\right) \rightarrow R$  表示为

$$V(x) \equiv J(C(x; \hat{B}); \hat{A}), \quad -\frac{\varepsilon}{r} < x < z^*,$$

$$V(x) \equiv \bar{V}(x), \quad x \geq z^*,$$

其中,

$$J(c; \hat{A}) = \hat{A}(U'(c))^{\rho_-} + J_0(c), \quad \hat{A} = \frac{\lambda_- \hat{B}}{\rho_-}, \quad (8)$$

$$J_0(c) = \frac{U(c) - l}{\beta} - \frac{1}{\kappa(\rho_+ - \rho_-)} \left\{ \frac{(U'(c))^{\rho_+}}{\rho_+} \int_0^c \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\rho_+}} + \frac{(U'(c))^{\rho_-}}{\rho_-} \int_c^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\rho_-}} \right\}.$$

由  $x = z^*$  处平滑通过条件知  $X(\bar{C}(z^*); \hat{B}) = z^*$ . 其中,  $\bar{C}(z^*)$  是  $x \geq z^*$  时最优消费, 表示为临界财富的函数. 由上式和(7)以及(8)中  $X(\cdot)$  和  $J(\cdot)$  的定义得

$$X(\bar{C}(z^*); \hat{B}) = \hat{B}(U'(\bar{C}(z^*)))^{\lambda_-} + X_0(\bar{C}(z^*)) = z^*, \quad (9)$$

$$J(\bar{C}(z^*); \hat{A}) = \hat{A}(U'(\bar{C}(z^*)))^{\rho_-} + J_0(\bar{C}(z^*)) = V(z^*). \quad (10)$$

利用  $\hat{A} = \frac{\lambda_- \hat{B}}{\rho_-}$ , 对(9)和(10)简单运算后, 定义

函数  $G: (0, \infty) \rightarrow R$ ,

$$G(z) \equiv \lambda_- U'(\bar{C}(z)) \{X_0(\bar{C}(z)) - z\} - \rho_- \{J_0(\bar{C}(z)) - \bar{V}(z)\}, \quad (11)$$

那么, 临界值  $z^*$  等价于方程  $G(z) = 0$  的解. 下面给出猜想解的正式推导和证明.

对  $c > 0$ , 定义函数

$$\bar{X}(c) = \frac{c}{r} - \frac{1}{\kappa(\lambda_+ - \lambda_-)} \left\{ \frac{(U'(c))^{\lambda_+}}{\lambda_+} \int_0^c \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} + \frac{(U'(c))^{\lambda_-}}{\lambda_-} \int_c^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \right\},$$

$$\bar{J}(c) = \frac{U(c)}{\beta} - \frac{1}{\kappa(\rho_+ - \rho_-)} \left\{ \frac{(U'(c))^{\rho_+}}{\rho_+} \int_0^c \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\rho_+}} + \frac{(U'(c))^{\rho_-}}{\rho_-} \int_c^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\rho_-}} \right\}.$$

根据(6), 若  $U'(0) = \infty$ , 则有

$$X_0(0) \equiv \lim_{c \downarrow 0} X_0(c) = -\frac{\varepsilon}{r},$$

$$\bar{X}(0) \equiv \lim_{c \downarrow 0} \bar{X}(c) = 0.$$

正如文献[6]中式(6.11),  $\lim_{c \uparrow \infty} X_0(c) =$

$\lim_{c \uparrow \infty} \bar{X}(c) = \infty$ , 并由  $\lambda_+ \lambda_- = -\frac{r}{\kappa}$ , 有

$$X'_0(c) = \bar{X}'(c) =$$

$$-\frac{U''(c)}{\kappa(\lambda_+ - \lambda_-)} \left\{ (U'(c))^{\lambda_+ - 1} \int_0^c \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} + (U'(c))^{\lambda_- - 1} \int_c^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \right\}.$$

通过计算得

$$G(z) = -\frac{\lambda_- \varepsilon}{r} U'(\bar{C}(z)) + \frac{\rho_- l}{\beta}.$$

由于  $\bar{C}(\cdot)$  严格增,  $U'(\cdot)$  严格递减, 故  $G(\cdot)$  严格递减. 由假设 1 得  $\lim_{z \downarrow 0} G(z) = \infty$  和  $\lim_{z \uparrow \infty} G(z) = \frac{\rho_- l}{\beta}$ . 令

$$z^* \equiv \bar{X} \left( I \left( \frac{\rho_- rl}{\lambda_- \beta \varepsilon} \right) \right), \quad (12)$$

易知,  $z^*$  是正的, 且满足

$$G(z^*) = 0. \quad (13)$$

常量  $\hat{B}$  为

$$\hat{B} \equiv (U'(\bar{C}(z^*)))^{-\lambda_-} \{z^* - X_0(\bar{C}(z^*))\} = \left( \frac{\rho_- rl}{\lambda_- \beta \varepsilon} \right)^{-\lambda_-} \frac{\varepsilon}{r} > 0. \quad (14)$$

在  $\hat{B} > 0$  时, 有

$$X(\bar{C}(z^*); \hat{B}) = z^*. \quad (15)$$

若  $U'(0) = \infty$ , 根据式(6), 可得  $X(0; \hat{B}) =$

$\lim_{c \downarrow 0} X(c; \hat{B}) = -\frac{\varepsilon}{r}$ . 类似于文献[6],  $\lim_{c \uparrow \infty} X(c; \hat{B}) =$

0. 利用  $\lambda_+ \lambda_- = -\frac{r}{\kappa}$ , 得到

$$X'(c; \hat{B}) = \lambda_- \hat{B} (U'(c))^{\lambda_- - 1} U''(c) - \frac{U''(c)}{\kappa(\lambda_+ - \lambda_-)} \left\{ (U'(c))^{\lambda_+ - 1} \int_0^c \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} + (U'(c))^{\lambda_- - 1} \int_c^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \right\}.$$

由于  $U(\cdot)$  是严格凹的, 对所有  $c > 0$ ,  $X'(c; \hat{B}) > 0$ .  $X(\cdot; \hat{B})$  在映射  $[0, \infty)$  到  $\left[-\frac{\varepsilon}{r}, \infty\right)$  上是严格增

的, 故反函数  $C(\cdot; \hat{B})$  存在, 且是由  $\left[-\frac{\varepsilon}{r}, \infty\right)$  到  $[0, \infty)$  上严格增函数. 在确定  $\hat{B}$  和  $z^*$  后, 定义函数

$V: \left(-\frac{\varepsilon}{r}, \infty\right) \rightarrow R$  为

$$V(x) \equiv J \left( C(x; \hat{B}); \frac{\lambda_- \hat{B}}{\rho_-} \right), \quad -\frac{\varepsilon}{r} < x < z^*, \quad (16)$$

$$V(x) \equiv \bar{V}(x), \quad x \geq z^*. \quad (17)$$

利用文献[6]引理 8.7, 有  $\lim_{x \downarrow -\frac{\varepsilon}{r}} V(x) = \frac{U(0) - l}{\beta}$ .

根据式(15)得

$$\lim_{x \uparrow z^*} C(x; \hat{B}) = C(z^*; \hat{B}) = \bar{C}(z^*),$$

那么

$$\lim_{x \uparrow z^*} V(x) = J\left(\bar{C}(z^*); \frac{\lambda_- \hat{B}}{\rho_-}\right).$$

由式(11)和(13)~(15)有

$$\bar{V}(z^*) = J\left(\bar{C}(z^*); \frac{\lambda_- \hat{B}}{\rho_-}\right), \quad \lim_{x \uparrow z^*} V(x) = \bar{V}(z^*).$$

当  $U'(0) = \infty$  时, 定理 1 给出了问题的解.

**定理 1** 当  $U'(0) = \infty$  时, (16) 和 (17) 定义了最优值函数  $V(x)$ , 并且最优策略为  $(\tau^*, c^*, \pi^*)$  为

$$\begin{aligned} \tau^* &= T^*, \quad c_t^* = C(x_t; \hat{B}), \\ \pi_t^* &= -\frac{V'(x_t)}{V''(x_t)}(\alpha + q - r\mathbf{1}_m)\Sigma^{-1}, \quad 0 \leq t < \tau^*, \\ c_t^* &= \bar{C}(x_t), \quad \pi_t^* = \bar{\Pi}(x_t), \quad \tau^* \leq t. \end{aligned}$$

**证明** 类似文献[7]的定理 3.1 的证明. 证毕.

### 3 常相对风险厌恶效用 CRRA (Constant Relative Risk Aversion) 效用类下的经济行为分析

本节中, 将假设效用函数是 CRRA 效用类, 得到值函数和最优策略. 假设效用函数表示为

$$U(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad 0 < \gamma \neq 1,$$

其中,  $c > 0$ , 这意味了代理人的相对风险厌恶系数是常数  $\gamma$ . 类似于第二节中的推导, 可得

$$\begin{aligned} \bar{C}(x) &= Kx, \quad x > 0, \\ \bar{\Pi}(x) &= -\frac{V'(x)}{V''(x)}(\alpha + q - r\mathbf{1}_m)\Sigma^{-1} = \end{aligned}$$

$$\frac{x}{\gamma}(\alpha + q - r\mathbf{1}_m)\Sigma^{-1}, \quad x \geq 0,$$

其中,  $K$  由式(4)给出. 在最优退休时刻, 式(12)临界财富水平和最优消费  $c_t^*$  的隐式猜想解(7)可写为

$$z^* = \frac{1}{K} \left( \frac{\rho_- - r\lambda}{\lambda_- \beta \varepsilon} \right)^{-\frac{1}{\gamma}},$$

$$X(c; \hat{B}) = \hat{B}c^{-\gamma\lambda} + \frac{c}{K} - \frac{\varepsilon}{r},$$

$\hat{B}$  由式(14)给出. 那么由式(16)和(17)所定义的值函数  $V: \left(-\frac{\varepsilon}{r}, \infty\right) \rightarrow R$  满足

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{\lambda_- \hat{B}(C(x; \hat{B}))^{-\gamma}}{\rho_-} + \frac{1}{(1-\gamma)K} C(x; \hat{B})^{1-\gamma} - \frac{l}{\beta}, \\ &-\frac{\varepsilon}{r} < x < z^*, \end{aligned}$$

$$V(x) = \frac{K^{-\gamma}}{(1-\gamma)} x^{1-\gamma}, \quad x \geq z^*,$$

那么, 在 CRRA 效用情形下, 定理 1 中最优策略  $(\tau^*, c^*, \pi^*)$  为

$$\begin{aligned} \tau^* &= T_{z^*}, \quad c_t^* = C(x; \hat{B}), \\ \pi_t^* &= \left( -\lambda_- \hat{B}c_t^{*\gamma\lambda} + \frac{1}{\gamma K} c_t^* \right) (\alpha + q - r\mathbf{1}_m)\Sigma^{-1}, \\ &0 \leq t < \tau^*, \end{aligned}$$

$$c_t^* = Kx_t, \quad \pi_t^* = \frac{x_t}{\gamma} (\alpha + q - r\mathbf{1}_m)\Sigma^{-1}, \quad t \geq \tau^*.$$

图 1 是关于 3 种情形下消费率的比较: 1)  $\tau = \infty$  的情形(虚直线和实直线分别为  $q=0$  和  $q=0.01$  时的图形); 2) 代理人有退休权利, 但是  $q=0$ ; 3) 代理人有退休选择权, 且  $q=0.01$ . 通过比较可以得出如下结论: 在其他参数相同的条件下, 非零红利率会使得临界财富值变小; 在退休之前, 情形 3) 中消费率要小于情形 1) 和情形 2); 退休一段时间之后, 情形 3) 的消费率会超过情形 2).

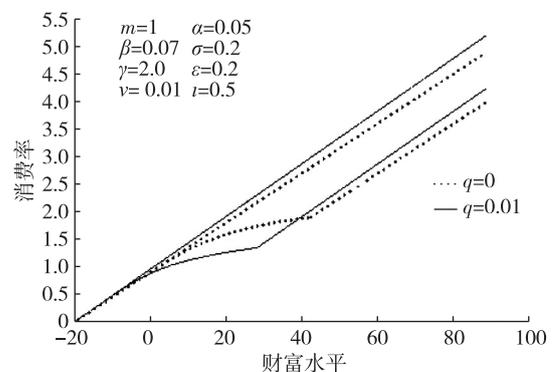


图 1 消费率的比较

Fig. 1 Comparison of consumption rates

类似于图 1 情形划分, 图 2 给出了 3 种情形下风险资产投资量的变化趋势及其比较. 从图 2 中可以看出: 在其他参数相同的条件时, 相同财富水平下, 退休之前考虑红利情形下的风险资产投资量要高于不考虑红利的情形; 退休之后, 前者依然大于后者; 仅仅在临界财富水平之间的风险资产投资量, 呈现了相反的情况. 退休前, 情形 3) 下风险资产投资量在一小段区域内小于  $\tau = \infty$  时的投资量, 这在情形 2) 中没有出现.

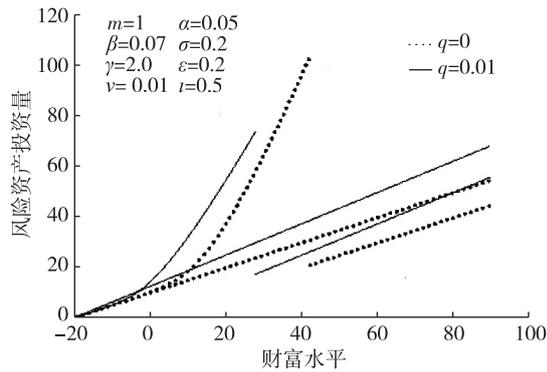


图2 风险资产投资量的比较

Fig. 2 Comparison of amount of wealth invested in the risk assets

#### 4 小结

本文研究了风险资产支付红利的金融市场,代理人存在劳动负效用下消费投资组合和退休选择问题.当假设代理人满足CRRA效用函数时,利用动态规划的方法,本文以显示解的形式给出支付红利情形下的最优策略.最优停时(退休时刻)被刻画为财富首次达到临界水平的时刻.通过分析可以看出,与没有红利支付比较,红利支付使得代理人更倾向于选择节约消费而将更多财富用于风险资产投资的决策行为,并且红利会使临界财富值变小.

本文假设了效用损失率是常数,然而实际工作中的效用损失率是随机的,这是由于代理人在不同劳动强度和心理状态下,劳动行为带来的效用是不同的,甚至会出现正效用情形.因此,考虑随机劳动

效用率所带来模型变化及问题,将作为下一步的研究.

#### 参考文献

##### References

- [ 1 ] Merton R C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case [ J ]. Rev Econ Stat, 1969, 51( 3 ):247-257
- [ 2 ] Merton R C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model [ J ]. J Econ Theory, 1971, 3( 4 ): 373-413
- [ 3 ] Bodie Z, Merton R C, Samuelson W F. Labor supply flexibility and portfolio choice in a life cycle model [ J ]. J Econ Dyn Control, 1992, 16( 3/4 ):427-449
- [ 4 ] Karatzas I, Wang H. Utility maximization with discretionary stopping [ J ]. SIAM J Control Optim, 2000, 39( 1 ):306-329
- [ 5 ] Choi K J, Koo H K. A preference change and discretionary stopping in a consumption and portfolio selection problem [ J ]. Math Method Oper Res, 2005, 61( 3 ):419-435
- [ 6 ] Karatzas I, Lehoczky J P, Sethi S P, et al. Explicit solution of a general consumption/investment problem [ J ]. Math Oper Res, 1986, 11( 2 ):261-294
- [ 7 ] Choi K J, Shim G. Disutility, optimal retirement, and portfolio selection [ J ]. Math Finance, 2006, 16( 2 ):443-467
- [ 8 ] Karatzas I, Shreve S E. Methods of mathematical finance [ M ]. New York: Springer, 1998
- [ 9 ] 赵培峰, 费为银, 王芳. 不同风险度量约束下带有红利的投资组合模型研究 [ J ]. 经济数学, 2009, 26( 1 ): 41-48  
ZHAO Peifeng, FEI Weiyin, WANG Fang. Study on portfolio model with dividend under constrained risk measures [ J ]. Mathematics in Economics, 2009, 26( 1 ): 41-48

## Optimal consumption portfolio and retirement problem with dividend-payment and disutility

LIANG Yong<sup>1</sup> FEI Weiyin<sup>1</sup> CHEN Chao<sup>1</sup>

<sup>1</sup> School of Mathematics and Physics, Anhui Polytechnic University, Wuhu 241000

**Abstract** This paper studies an agent's consumption/portfolio and retirement problem, in which the dividend-payment of risk assets as well as the utility loss from labor are considered. The agent has an option to retire from his work. Before retirement the agent receives labor income but suffers a utility loss due to work, however, by deciding to retire from work, he saves the utility loss but gives up labor income. The agent utility comes from consumption, which is directly influenced by utility loss due to labor. We obtain an explicit solution for the agent's critical wealth level and optimal consumption/portfolio strategy by using dynamic programming methods to solve a free boundary value problem.

**Key words** consumption and portfolio selection; retirement; disutility; dividend; dynamical programming